

DEPARTAMENTO DE MAQUINAS

CATEDRA DE CINEMATICA Y DINAMICA DE MAQUINAS



MECANISMOS DE ENGRANAJES

(Análisis y síntesis de engranajes y trenes de engranajes)

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE LAS PALMAS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR

DE

INGENIEROS INDUSTRIALES

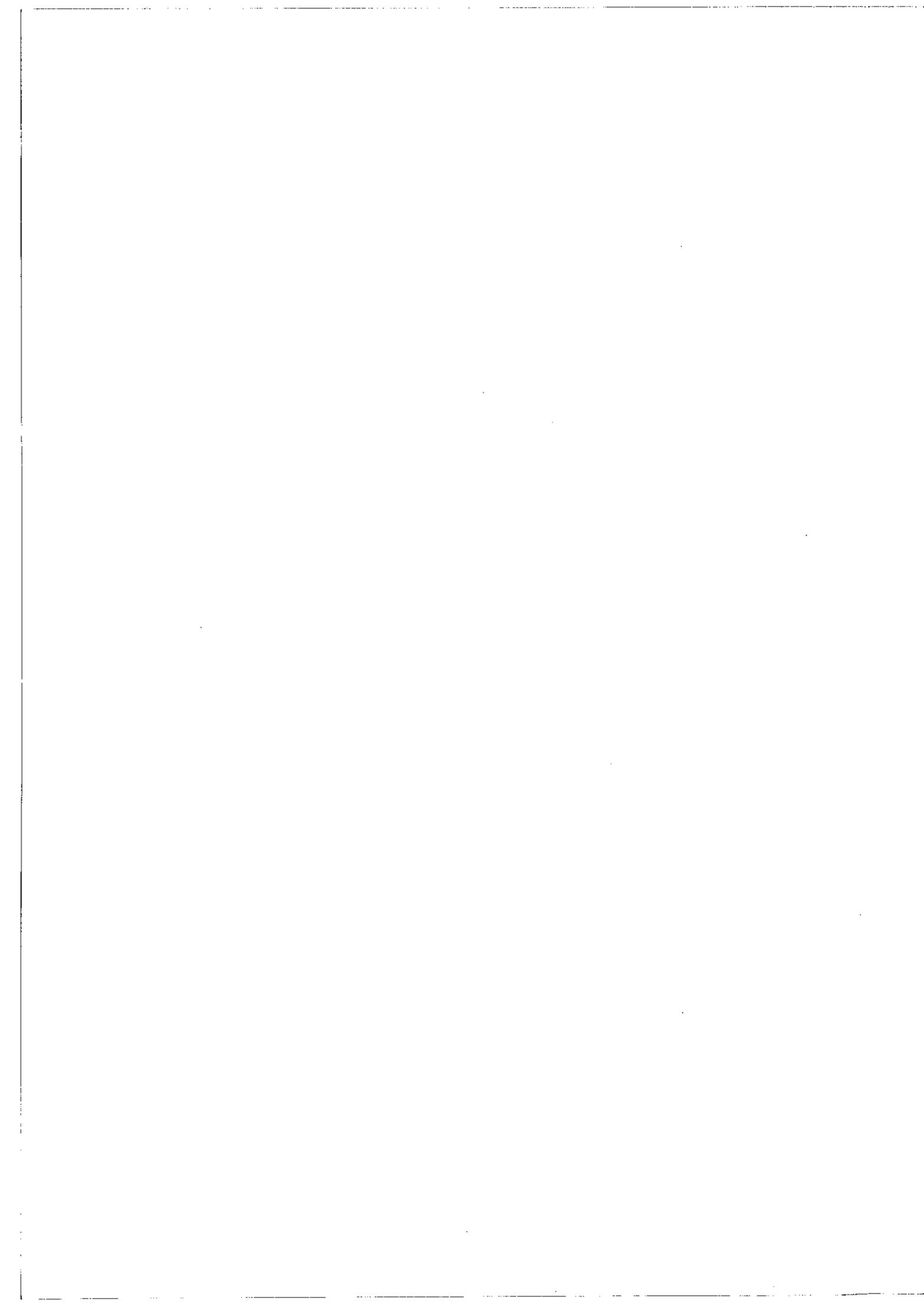


Roque Calero Pérez

Doctor Ingeniero Industrial

Las Palmas, 1984





MECANISMOS SIMPLES DE RUEDAS DENTADAS.-

A) Estudio de mecanismos genéricos:

1.- Introducción

1-1.- Generalidades

1-1-1.- Origen y formación de la rueda dentada y del engranaje

1-1-2.- Definición topológica del mecanismo

1-1-3.- Usos del mecanismo

1-1-4.- Tipos y clasificación

1-2.- Estudio general de la rueda dentada y del engranaje de perfil de evolvente.

1-2-1.- La función evolvente

1-2-2.- Engranajes cilíndricos de dientes rectos

1-2-2-1.- Formación

1-2-2-2.- Características constructivas

1-2-2-3.- Características de montaje: Condiciones de engranaje

1-2-2-4.- Casos especiales: Cremallera. Engranajes interiores. Dientes escalonados

1-2-3.- Engranajes cilíndricos de dientes helicoidales (para ejes paralelos)

1-2-3-1.- Formación

1-2-3-2.- Características constructivas

1-2-3-3.- Características de montaje. Condiciones de engranaje

1-2-3-4.- Casos especiales: Cremallera

1-2-4.- Engranajes cilíndricos de dientes helicoidales (para ejes que se cruzan)

1-2-4-1.- Generalidades

1-2-4-2.- Características constructivas

1-2-4-3.- Características de montaje

1-2-5.- Engranajes cónicos de dientes rectos

1-2-5-1.- Formación

1-2-5-2.- Casos especiales

- 1-2-5-3.- Características constructivas
- 1-2-5-4.- Características de montaje
- 1-2-6.- Engranajes cónicos de dientes inclinados
 - 1-2-6-1.- Generalidades
 - 1-2-6-2.- Dentaduras helicoidal, Gleason
- 2.- Estudio cinemático de los engranajes
 - 2-1.- Generalidades
 - 2-1-1.- Vel. y acel. en un instante. Velocidad de deslizamiento
 - 2-1-2.- Vel. en instantes sucesivos: Ecuación de la velocidad
 - 2-1-3.- Continuidad del engrane: Características
 - 2-2.- Estudio cinemático del engranaje de perfil de evolvente
 - 2-2-1.- Engranaje cilíndrico de dientes rectos
 - 2-2-1-1.- Ecuación de la velocidad
 - 2-2-1-2.- Continuidad del engrane: Características
 - 2-2-1-3.- Observaciones importantes sobre la continuidad del engrane: contacto intermitente, interferencia, número mínimo de dientes
 - 2-2-1-4.- Casos especiales
 - 2-2-2.- Engranajes cilíndricos de dientes helicoidales (ejes paralelos)
 - 2-2-2-1.- Ecuación de la velocidad
 - 2-2-2-2.- Continuidad del engrane: Características
 - 2-2-2-3.- Observaciones importantes
 - 2-2-3.- Engranajes cilíndricos de dientes helicoidales (ejes que se cruzan)
 - 2-2-3-1.- Ecuación de la velocidad
 - 2-2-3-2.- Continuidad del engrane. Características
 - 2-2-4.- Engranajes cónicos de dientes rectos
 - 2-2-4-1.- Ecuación de la velocidad
 - 2-2-4-2.- Continuidad del engrane

3.- Estudio dinámico de los engranajes

3-1.- Generalidades

3-1-1.- Transmisión de esfuerzos

3-1-2.- Rendimiento

3-2.- Estudio dinámico del engranaje de perfil de evolvente

3-2-1.- Engranajes cilíndricos de dientes rectos

3-2-2.- Engranajes cilíndricos de dientes helicoidales (ejes paralelos)

3-2-3.- Engranajes cilíndricos de dientes helicoidales (ejes no paralelos)

3-2-4.- Engranajes cónicos de dientes rectos

3-2-5.- Engranajes cónicos de dientes inclinados

4.- Generalidades sobre engranajes no intercambiables

B) Construcción (tallado) de ruedas dentadas:

1.- Introducción

2.- Tallado de ruedas por útil cremallera

2-1.- Ruedas cilíndricas de dientes rectos

2-1-1.- Datos de la cremallera herramienta

2-1-2.- Axoide de generación de la rueda dentada

2-1-3.- Desplazamiento de la herramienta

2-1-4.- Datos de la rueda obtenida con una herramienta dada: Ruedas "cero" y ruedas "V"

2-1-5.- Limitaciones al tallado de ruedas con útil cremallera: Número mínimo de dientes que se pueden tallar sin penetración

2-1-6.- Particularidades sobre el engrane de ruedas dentadas talladas con útil cremallera: Engranajes "cero" y "engranajes V"

2-2.- Tallado de ruedas cilíndricas de dientes helicoidales

2-3.- Tallado de ruedas cónicas

3.- Tallado de ruedas dentadas por otros procedimientos

1-1-1.-ORIGEN DE LA RUEDA DENTADA Y DEL ENGRANAJE.-

Introduccion:

-El problema de la transmisión del movimiento entre dos ejes, con una relación de velocidades constante, es de primordial importancia en todas las máquinas y mecanismos.

En el Tema 12 hemos visto como puede lograrse esta transmisión por medio de cilindros y conos de fricción, con relativa facilidad.

Sin embargo, al estar este sistema de transmisión condicionado a las fuerzas de rozamiento generadas entre los miembros del mecanismo, en la zona de contacto, imposibilita la transmisión de elevadas potencias.

-La necesidad de transmitir entre dos ejes potencias grandes, y la existencia de los perfiles conjugados de deslizamiento (Tema 3, punto 3-2-2-2 y siguientes), que permiten transmitir el movimiento de un miembro en rotación a otro, con relación de velocidades constante, ha permitido la creación de la rueda dentada, en las cuales la potencia a transmitir solo viene limitada por la resistencia mecánica del propio material del que se construye, y por las dimensiones que le demos a éste.

Origen de la rueda dentada y del engranaje:

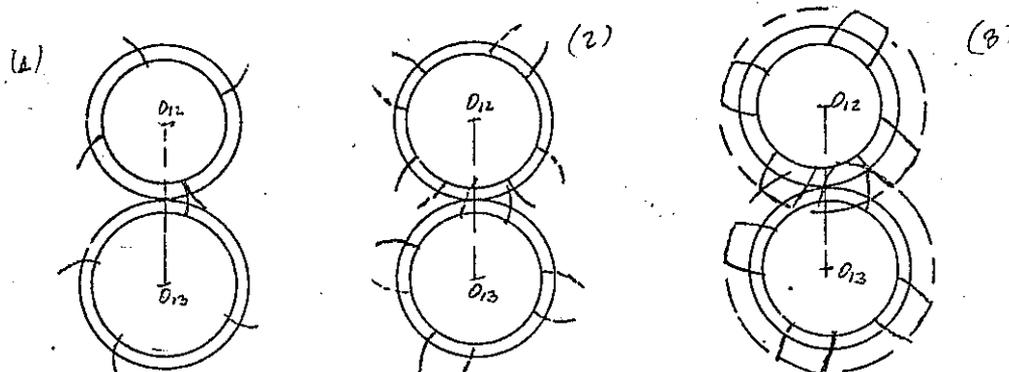
Segun vimos en el Tema 3, puntos 3-2-2-2 y siguientes, dado un perfil cualquiera siempre se puede construir su perfil conjugado de deslizamiento.

Naturalmente, como allí se vió, la transmisión del movimiento quedaría interrumpida, dada la imposibilidad de construir perfiles conjugados de deslizamiento continuo.

-Sin embargo, si nosotros disponemos sobre cada miembro una serie de estos perfiles conjugados; convenientemente dispuestos entre sí para que cuando dos de ellos pierdan el contacto ya hayan otros dos tocándose, habremos conseguido una transmisión continua del movimiento, con relación de velocidades constante. (Figura 1)

-Igualmente, si queremos transmitir el movimiento en ambas direcciones, (a derecha e izquierda), hemos de colocar, en forma simétrica, dos series de estos perfiles conjugados. (fig 2).

-Cada par de estos perfiles, tallados ó sujetos al "núcleo" del miembro, forma lo que llamaremos un "diente". Naturalmente, estos dientes habrán de limitarse superior e inferiormente, por razones que en su momento estudiaremos. (fig 3)



-Como se comprende fácilmente, la distancia entre un perfil y su simétrico define el "espesor del diente", y con ello, su resistencia mecánica.

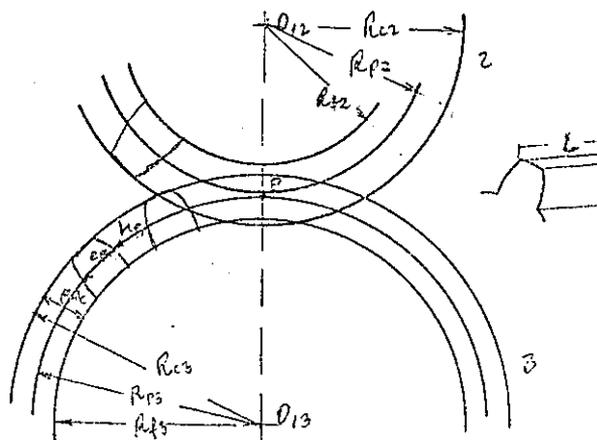
-Por otra parte también es fácil de ver que el número de dientes así contruidos ha de ser siempre un número entero, y para que los dientes de una rueda puedan encajar en los de la otra, el espesor de los dientes ha de ser menor ó igual al hueco dejado entre dos de ellos, en la otra rueda. (Todo esto será estudiado con todo detalle más adelante)

-Como es lógico, la rueda dentada no es una figura plana, sino que tiene una cierta profundidad, impuesta por consideraciones de resistencia mecánica.

Nomenclatura:

- Engranaje: El par de miembros, contruidos como se ha dicho.
- Rueda dentada: Cada uno de los miembros del engranaje.

- R_c = Radio de cabeza del diente
- R_f = Radio de fondo del diente
- R_p = Radio primitivo de los perfiles conjugados



- P=punto primitivo
- Perfil del diente. (Conjugados, necesariamente, los de las dos ruedas del engranaje)
- L = longitud del diente
- Cara y flanco: Observese que la cara de una rueda entra siempre en contacto con el flanco de la otra.
- Espesor y hueco: Observese que se miden sobre las circunferencias primitivas. Los llamaremos e_p y h_p .
- a_t = altura total del diente. Es igual a la distancia entre las circunferencias de cabeza y de fondo.
- α = ángulo de presión, ó ángulo de empuje. Como sabemos, en los perfiles conjugados, la normal común a los perfiles, en el punto de contacto, pasa siempre por el punto primitivo P. La inclinación de esta normal respecto de una perpendicular a la línea de centros es el llamado ángulo de empuje, ya que en caso de no haber rozamientos, será la dirección del esfuerzo que un miembro ejerce sobre el otro. Naturalmente, este ángulo no tiene porque tener el mismo valor de un instante a otro del movimiento, dependiendo, exclusivamente, de la forma de los perfiles conjugados.

NOTA: A las circunferencias primitivas (mejor sería decir, a los cilindros primitivos) se les denomina también AXOIDES del movimiento.

La rueda dentada de perfil de evolvente:

- Hasta ahora hemos visto como se puede formar una rueda dentada con dos perfiles conjugados cualesquiera. Al igual que vimos en el Tema 3, vamos a estudiar ahora como resulta muy sencilla la construcción de ruedas dentadas utilizando perfiles conjugados de evolvente
 - Partiremos como datos de una distancia entre ejes dada $O_{12}O_{13}$ y una relación de transmisión entre los dos miembros w_2/w_3
- El trazado de los dientes se hará en la forma siguiente:

1º.-Fijados O_{12} y O_{13} , y conocido $j = w_2/w_3$, se halla el punto P.

Con él se definen las circunferencias primitivas $C_p(2)$ y $C_p(3)$.

2º.-Trazamos una recta $\overline{T_2T_3}$, que pasa por P y que esta inclinada, respecto a la normal a la línea de centros, el ángulo α , escogido arbitrariamente. A partir de O_{12} y O_{13} trazamos las perpendiculares $\overline{O_{12}T_2}$ y $\overline{O_{13}T_3}$ a la recta $\overline{T_2T_3}$.

3º.-Con centro en O_{12} y radio $O_{12}T_2$ trazamos una circunferencia (que sera la circunferencia base de la evolvente que forma el perfil del diente de la rueda 2). Lo mismo hacemos desde O_{13} . (La circunferencia de radio $O_{13}T_3$ será la circunferencia base de la evolvente que forma los dientes de la rueda 3).

4º.-Pasando por P trazamos la evolvente q_2q_2 , que forma un lado del perfil del diente de la rueda 2, y pasando también por P trazamos la evolvente r_3r_3 , que forma el lado (conjugado) del diente de la rueda 3.

En el instante en que se han dibujado, ambos perfiles se tocan en el punto primitivo P.

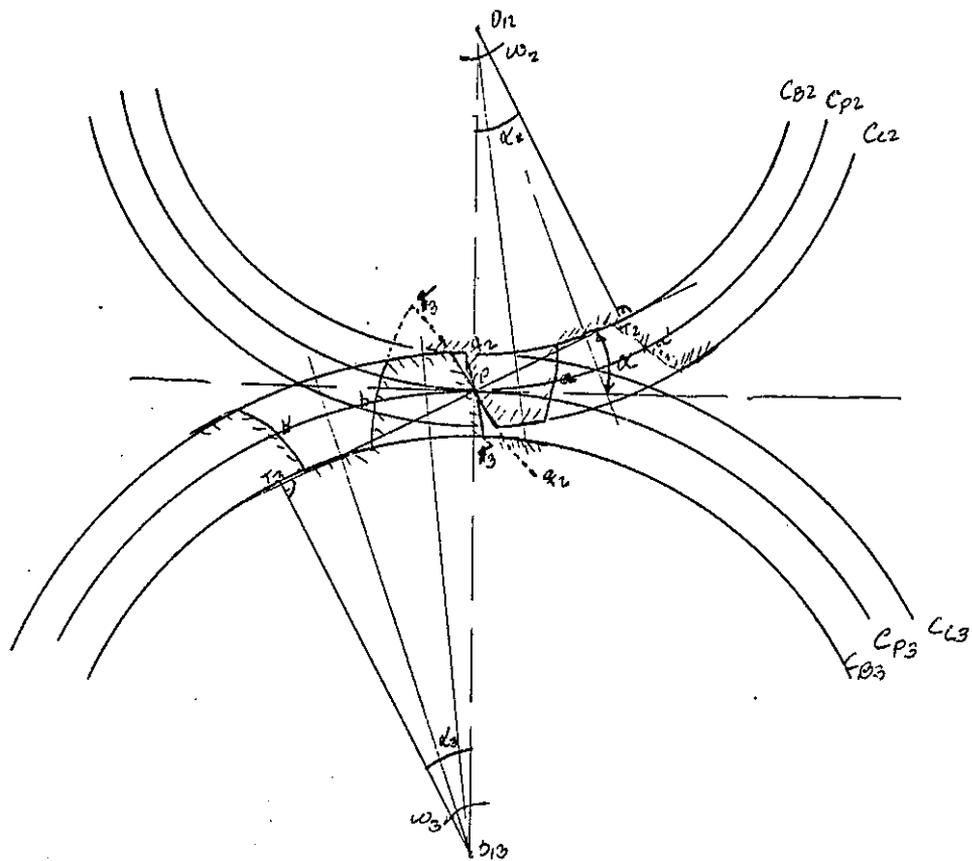
5º.-Para trazar la otra cara del diente, y dado que para un perfecto engrane el espesor de un diente ha de ser igual al hueco entre dos dientes de la otra rueda, dividiremos ambas circunferencias primitivas en un número entero de partes iguales (igual al número de dientes arbitrariamente previstos), tales que $\widehat{Pa}=\widehat{bb'}$; $\widehat{Pb}=\widehat{aa'}$; etc.

Trazando luego los radios por el centro de estos segmentos, construiríamos, graficamente, los perfiles simétricos, que constituirían la otra cara y flanco del diente.

6º.-Las evolventes así construidas se rematan superiormente por la circunferencia de cabeza, e inferiormente, por la de pié.

NOTA: Como es fácil de comprender, el diámetro máximo que puede alcanzar la circunferencia de cabeza viene limitado por el corte de las dos evolventes que forman las caras del diente.

Igualmente, el diámetro mínimo de la circunferencia de pie, si se desea que todo el perfil sea de evolvente, ha de ser igual al de la circunferencia base de dicha evolvente.



NOTA: Hemos de hacer incapié en qué las dos circunferencias base se trazaron a partir de un ángulo de inclinación α arbitrario.

Si ahora, utilizando esas dos mismas circunferencias base, separamos más los ejes de las dos ruedas, las evolventes conjugadas siguen siendolo (Recuerdese que solo variará la inclinación del "hilo" que une las dos circunferencias base, pero nó los diámetros de los "tambores de arrollamiento", que son, en definitiva, los que marcan la relación de velocidades), con lo cual la relación de velocidades no varia.

Esto significa que cuando se emplean ruedas dentadas de perfil de evolvente, la distancia entre ejes puede variarse (siempre que lo permita el sostener el contacto entre los dientes), sin modificar por ello la relación de transmisión.

NOTA: Intuitivamente se comprende la fácil intercambiabilidad de ruedas construidas con estos perfiles, lo que les ha llevado a ser (además de su fácil construcción-tallado) los de uso más general y casi exclusivo.

NOTA: Obsérvese que en esos engranajes el ángulo de presión no varía de un instante a otro del movimiento.

Sin embargo, el ángulo de presión varía, para las mismas ruedas, al separarlas en el engranaje.

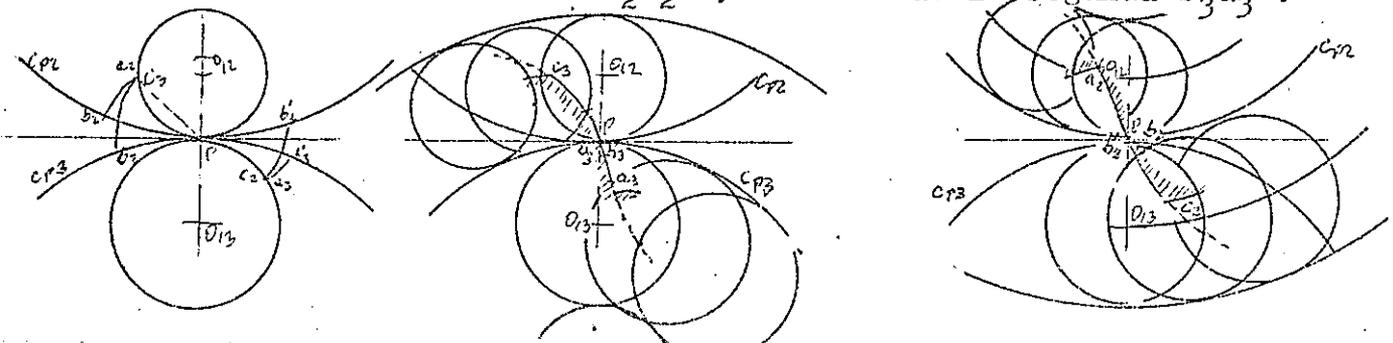
La rueda dentada de perfil cicloidal:

-El lograr una rueda dentada de perfil cicloidal no es un problema tan sencillo como con perfil de evolvente, puesto que requiere, como veremos a continuación, una "doble construcción".

En efecto, en el Tema 3, punto 3-2-2-2 vimos como una hipocicloide construida a partir de una circunferencia "ruleta" arbitraria, al rodar sobre una de las circunferencias primitivas, y la epicicloide generada al rodar la misma circunferencia ruleta sobre la ^{otra} circunferencia primitiva, eran perfiles conjugados.

En la fig. se comprende que de esta forma solo lograremos construir la cara de un diente en una rueda, y el flanco del diente en la otra rueda. (b_3c_3 y a_2b_2 respectivamente)

Para poder construir totalmente el diente hemos de poner otra circunferencia "ruleta", de diámetro también arbitrario, y no necesariamente igual a la anterior, dentro de la otra circunferencia primitiva, y proceder en igual forma. Así generariamos, respectivamente, el flanco de la primera rueda b'_2c_2 y la cara de la segunda b'_3a_3 .



-Para construir las ruedas de un engranaje de este tipo procederiamos en la forma siguiente: (Dadas una distancia entre ejes $O_{12}O_{13}$ y una relación de velocidades $w_2/w_3 = \overline{O_{13}P} / \overline{O_{12}P}$)

1º.-Situamos el punto primitivo P

2º.-Se trazan las dos "ruletas",arbitrarias, ρ_2 y ρ_3 .

3º.-Haciendo rodar ρ_2 interiormente a $C_{p(2)}$ se genera a_2b_2

Haciendo rodar ρ_2 exteriormente sobre $C_{p(3)}$ se genera b_3c_3

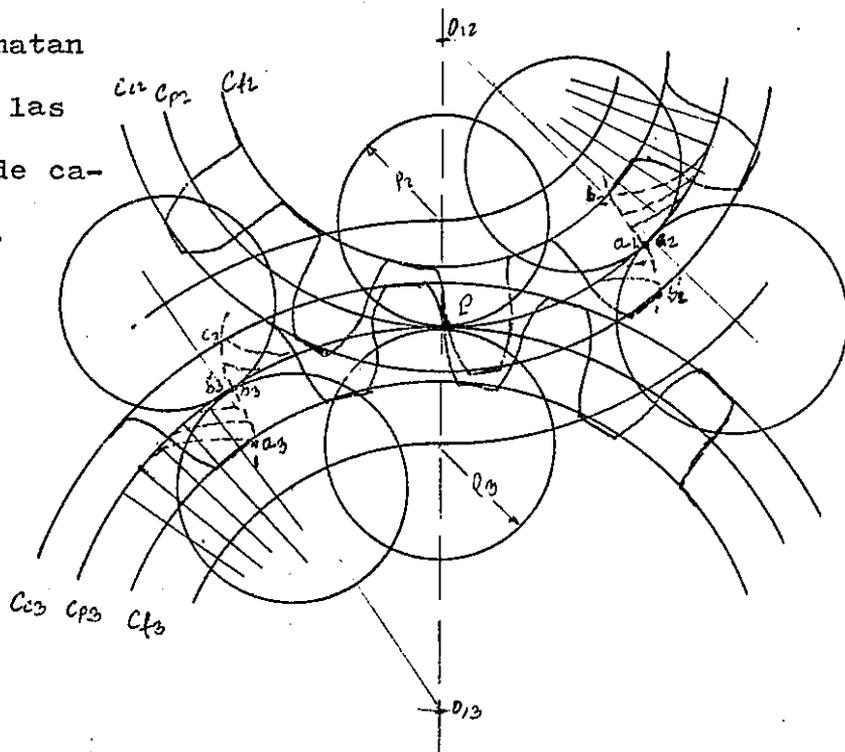
Haciendo rodar ρ_3 interiormente a $C_{p(3)}$ se genera $a_3b'_3$

Haciendo rodar ρ_3 exteriormente sobre $C_{p(2)}$ se genera b'_2c_2

4º.-Para trazar la otra cara de los dientes,se procede exactamente como en las ruedas de perfil de evolvente.

5º.-Finalmente se rematan

los perfiles con las circunferencias de cabeza y de fondo.



NOTA:Observese la complejidad de fabricación de estos perfiles.

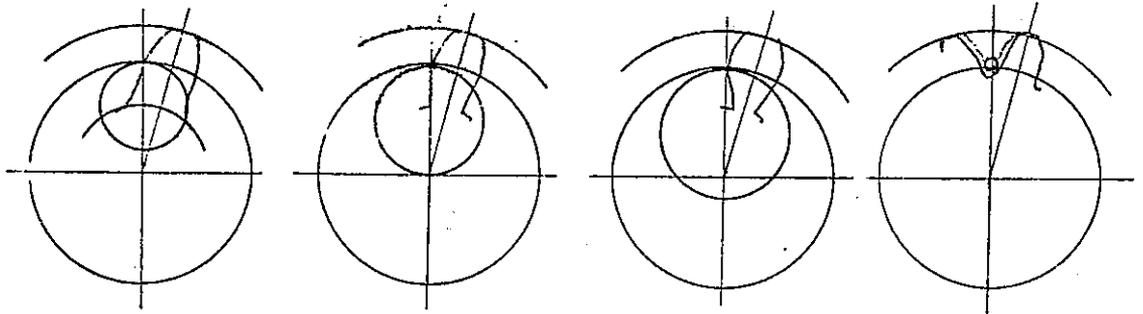
Observese también la imposibilidad de separar los centros de las ruedas,pues inmediatamente dejarían de ser conjugadas.

Igualmente podemos ver que en estos engranajes el ángulo de presión varía de un instante a otro del movimiento,siguiendo precisamente la forma de las circunferencias ruleta.

Hacemos hincapié también que para intercambiar estas ruedas es imprescindible que hayan sido construidas con las mismas ruleta

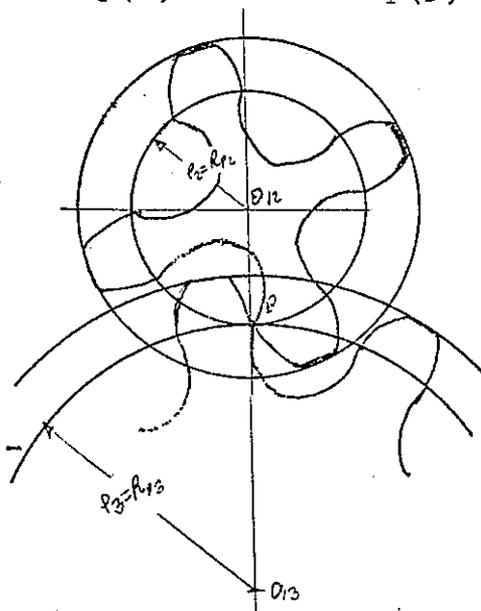
NOTA: En la construcción de estas ruedas se dan varios casos particulares de interés, en función de las dimensiones de las circunferencias "ruleta".

-Así vemos en la figura como a medida que aumenta el diametro de estas circunferencias ruleta, el diente se va debilitando en su base, llegando al extremo de que para $\rho_2 = R_p(2)$ la base del diente queda limitada a un solo punto, que es el que esta siempre en contacto con la cara del otro diente. (En este caso, la base del diente se puede construir de cualquier manera con tal de que no interfiera el movimiento)



-Si $R_p(2) = \rho_2$ y $R_p(3) = \rho_3$, los flancos de ambas ruedas se reducen a un punto, y las caras son epicycloides.

Un solo punto del diente de cada rueda es el que desliza sobre la cara del diente de la otra. (Engranaje de doble punto)



1-1-2.-DEFINICION TEORICA DEL MECANISMO.-

El mecanismo simple de engranajes consta de tres miembros. Dos de ellos (las ruedas dentadas) forman un par superior, de deslizamiento, con contacto lineal ó puntual. Los otros dos pares son los formados por los cojinetes que lo soportan en el bastidor.

-El contacto entre los dos miembros superiores (ruedas dentadas) queda asegurado siempre por medio de un cierre de cadena (bastidor)

-La rueda que recibe el movimiento por el eje y lo transmite por los dientes la llamaremos rueda conductora (en mecanismos reductores, piñón). La que recibe el movimiento por los dientes y la transmite por el eje la llamaremos conducida (en mecanismos reductores de la velocidad, rueda, simplemante)

1-1-3.-USOS DEL MECANISMO.-

-El principal empleo lo encuentra como mecanismo transmisor del giro entre dos ejes, con elevadas potencias, pudiendo estar los ejes en cualquier posición relativa.

-Otra de sus grandes aplicaciones es como mecanismo reductor (ó multiplicador) de la velocidad, uniendo adecuadamente una serie de engranajes, formando lo que llamamos un "tren de engranajes".

-También, y por la misma razón anterior, se emplea como mecanismo variador de la velocidad entre dos ejes, cuando, la transmisión de elevada potencia es fundamental (Cajas de cambio por engranajes)

1-1-4.-TIPOS DE ENGRANAJES.-

a) Según la forma del perfil del diente:

- Perfiles conjugados especiales
- Perfil de evolvente
- Perfil cicloidal

b) Segun la forma del diente:

- Eng. de dientes rectos (fig 1,2,3,6,7)
- Eng. de dientes curvos (fig 4,5,8,9,10,11,12)

c) Segun el sentido relativo de giro que impriman a los ejes

- Eng. exteriores (fig 1)
- Eng. interiores (fig 2)

d) Segun las medidas del diametro de las ruedas:

- Eng. de rueda y piñon
- Eng. de piñon y cremallera

e) Segun la forma de la rueda:

- Eng. circulares (fig 1)
- Eng. nó circulares (fig 6)

f) Segun el sistema de fabricacion:

- Eng. normalizados
- Eng. nó normalizados

g) Segun el tipo de axoide del movimiento:

- Eng. cilindricos
 - dientes rectos (fig 1,2)
 - dientes helicoidales (fig 4,5)
- Eng. conicos
 - dientes rectos (fig 7)
 - dientes helicoidales (fig 8,9)
- Eng. hiperbolicos
 - dientes helicoidales (fig 10)
 - dientes conicos hipoides (fig 11)
- Eng. de tornillo sinfin (fig 12)

Clasificacion de los engranajes, segun su empleo:

a) Para conectar ejes paralelos

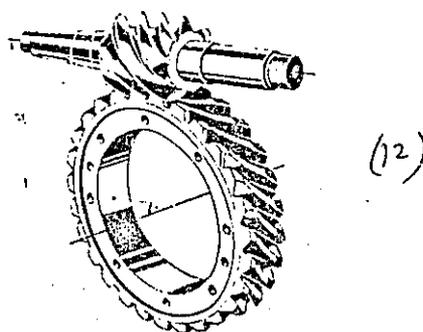
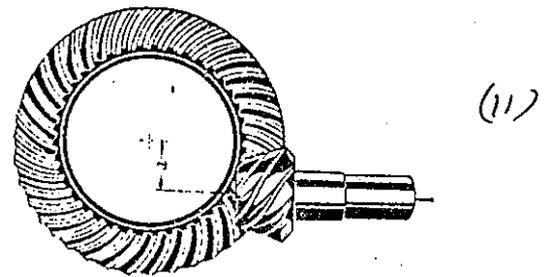
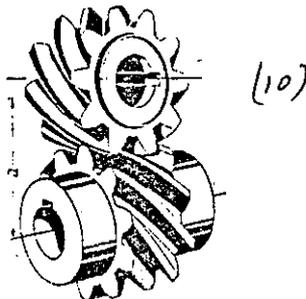
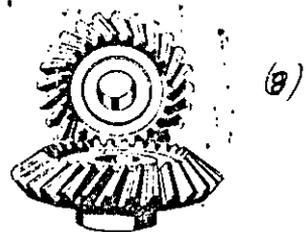
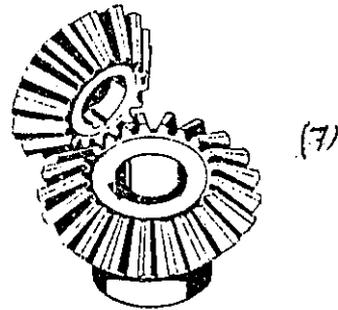
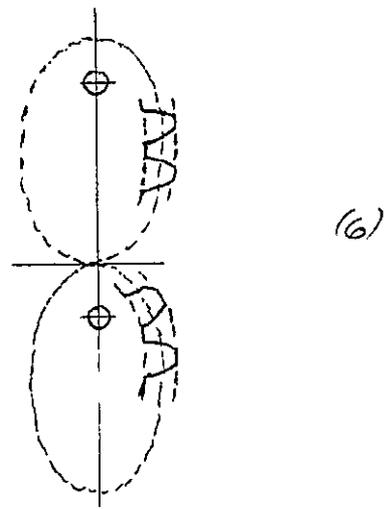
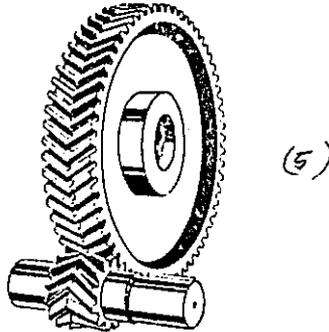
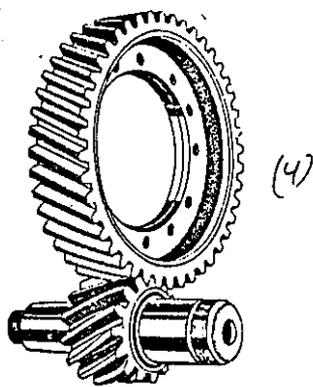
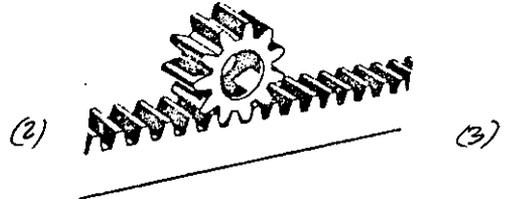
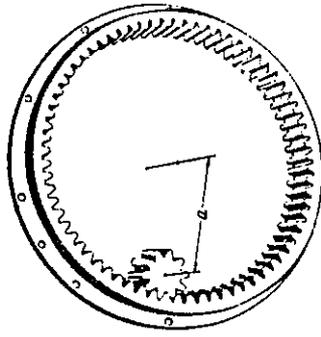
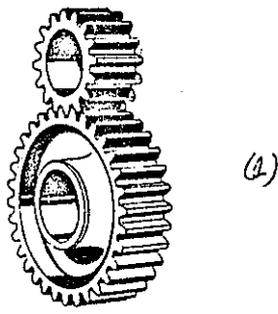
- Eng. cilindricos de dientes rectos
- Eng. cilindricos de dientes helicoidales

b) Para conectar ejes que se cortan

- Eng. conicos de dientes rectos
- Eng. conicos de dientes helicoidales

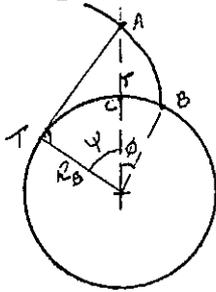
c) Para conectar ejes que se cruzan

- Eng. hiperbolicos con ruedas cilindricas helicoidales
- Eng. hiperbolicos con ruedas conicas helicoidales:hipoides
- Eng. de tornillo sinfin.



1-2-1.-LA FUNCION EVOLVENTE.-

La posicion del punto A en la evolvente de la fig. queda definida por las coordenadas (r, ϕ) . Como no podemos expresar en forma sencilla la función que las liga, se recurre a expresarla en función del ángulo ψ , tomado como parámetro. En la figura, $r = R_B / \cos \psi$



$$\widehat{BC} = \widehat{BT} - \widehat{TC} = \widehat{AT} - \widehat{TC} \quad R_B \cdot \phi = R_B \cdot \text{tag} \psi - R_B \cdot \psi$$

$$\phi = \text{Tag} \psi - \psi$$

En esta formula, ϕ y ψ deben medirse en radianes.

La función $Ev \psi = \text{tag} \psi - \psi$ es la llamada función evolvente, y aparece en varios calculos de dentaduras de este perfil.

En la tabla adjunta se expresan algunos de sus valores.

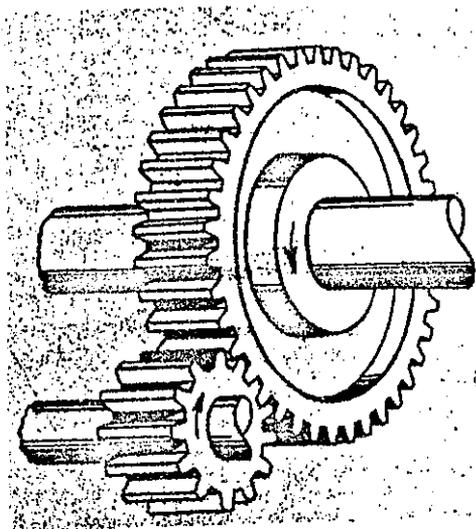
FUNCION EVOLVENTE
 $Ev \psi = (\text{tg} \psi - \psi)$

| | 50° | 51° | 52° | 53° | 54° |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,31909 | 0,34478 | 0,37237 | 0,40202 | 0,43390 |
| 0,1 | 2158 | 745 | 524 | 511 | 722 |
| 0,2 | 408 | 5014 | 813 | 821 | 4057 |
| 0,3 | 660 | 285 | 8104 | 1134 | 393 |
| 0,4 | 915 | 558 | 397 | 449 | 733 |
| 0,5 | 3171 | 833 | 693 | 767 | 5074 |
| 0,6 | 428 | 6110 | 990 | 2087 | 419 |
| 0,7 | 688 | 388 | 9290 | 409 | 766 |
| 0,8 | 949 | 669 | 592 | 734 | 6115 |
| 0,9 | 4213 | 952 | 896 | 3061 | 467 |
| | 60° | 61° | 62° | 63° | 64° |
| 0,0 | 0,68485 | 0,73940 | 0,79862 | 0,86305 | 0,93329 |
| 0,1 | 9011 | 4510 | 0,80482 | 981 | 4066 |
| 0,2 | 541 | 5085 | 1107 | 7662 | 810 |
| 0,3 | 0,70075 | 665 | 738 | 8348 | 5560 |
| 0,4 | 614 | 6250 | 2374 | 9042 | 6317 |
| 0,5 | 1157 | 839 | 3015 | 741 | 7081 |
| 0,6 | 704 | 7434 | 662 | 0,90446 | 851 |
| 0,7 | 2256 | 8033 | 4314 | 1157 | 8629 |
| 0,8 | 813 | 638 | 972 | 875 | 9414 |
| 0,9 | 3374 | 9247 | 5636 | 2599 | 1,00205 |
| | 70° | 71° | 72° | 73° | 74° |
| 0,0 | 1,52575 | 1,66503 | 1,82105 | 1,99676 | 2,19587 |
| 0,1 | 3899 | 7963 | 3768 | 2,01555 | 21724 |
| 0,2 | 5239 | 9481 | 5451 | 3458 | 3889 |
| 0,3 | 6592 | 70995 | 7154 | 5385 | 6083 |
| 0,4 | 7961 | 2527 | 8878 | 7336 | 8307 |
| 0,5 | 9345 | 4077 | 90623 | 9313 | 30561 |
| 0,6 | 60745 | 5645 | 2390 | 11315 | 2846 |
| 0,7 | 2160 | 7232 | 4178 | 3343 | 5162 |
| 0,8 | 3592 | 8837 | 5988 | 5397 | 7511 |
| 0,9 | 5039 | 80461 | 7821 | 7478 | 9891 |
| | 80° | 81° | 82° | 83° | 84° |
| 0,0 | 4,27502 | 4,90003 | 5,68420 | 6,6957 | 8,0483 |
| 0,1 | 33173 | 7040 | 77370 | 8132 | 2090 |
| 0,2 | 8963 | 5,04240 | 86552 | 9341 | 3752 |
| 0,3 | 44874 | 11608 | 95975 | 7,0587 | 5474 |
| 0,4 | 50911 | 9149 | 6,05650 | 1871 | 7257 |
| 0,5 | 7077 | 26871 | 15586 | 3195 | 9106 |
| 0,6 | 63377 | 34780 | 25793 | 4561 | 9,1023 |
| 0,7 | 9816 | 42862 | 36283 | 5970 | 3014 |
| 0,8 | 76396 | 51184 | 47068 | 7426 | 5081 |
| 0,9 | 83124 | 9694 | 58160 | 8929 | 7230 |

FUNCION EVOLVENTE
 $Ev \psi = (\text{tg} \psi - \psi)$

| | 55° | 56° | 57° | 58° | 59° |
|---------|---------|---------|---------|---------|-----|
| 0,46822 | 0,50518 | 0,54503 | 0,58804 | 0,63453 | |
| 7179 | 903 | 918 | 9253 | 939 | |
| 539 | 1291 | 5337 | 705 | 4428 | |
| 902 | 682 | 759 | 0,60161 | 921 | |
| 8267 | 2075 | 6184 | 621 | 5418 | |
| 635 | 472 | 612 | 1083 | 919 | |
| 9006 | 872 | 7044 | 550 | 6424 | |
| 380 | 3275 | 479 | 2020 | 933 | |
| 756 | 681 | 917 | 494 | 7446 | |
| 0,50135 | 4091 | 8359 | 972 | 964 | |
| | 65° | 66° | 67° | 68° | 69° |
| 1,01004 | 1,09412 | 1,18648 | 1,28826 | 1,40081 | |
| 811 | 1,10297 | 9622 | 9901 | 1272 | |
| 2624 | 1190 | 1,20604 | 30986 | 2475 | |
| 3446 | 2091 | 1597 | 2083 | 3691 | |
| 4274 | 3001 | 2599 | 3191 | 4920 | |
| 5111 | 920 | 3612 | 4310 | 6162 | |
| 955 | 4847 | 4634 | 5440 | 7417 | |
| 6807 | 5784 | 5666 | 6583 | 8686 | |
| 7667 | 6729 | 6709 | 7737 | 9968 | |
| 8536 | 7684 | 7762 | 8903 | 51264 | |
| | 75° | 76° | 77° | 78° | 79° |
| 2,42305 | 2,68433 | 2,98757 | 3,34327 | 3,76574 | |
| 4753 | 71262 | 3,02058 | 8224 | 81237 | |
| 7236 | 4133 | 5412 | 42188 | 5988 | |
| 9754 | 7048 | 8821 | 6222 | 90830 | |
| 52308 | 80007 | 12286 | 50328 | 5766 | |
| 4899 | 3012 | 5808 | 4507 | 4,00798 | |
| 7527 | 6064 | 9389 | 8762 | 5929 | |
| 60194 | 9163 | 23029 | 63094 | 11162 | |
| 2900 | 92311 | 6732 | 7505 | 6499 | |
| 5646 | 5509 | 30497 | 71998 | 21945 | |
| | 85° | 86° | 87° | 88° | 89° |
| 9,9465 | 12,7997 | 17,563 | 27,100 | 55,74 | |
| 10,1792 | 13,1658 | 18,220 | 28,607 | 62,10 | |
| 4217 | 5512 | 925 | 30,281 | 70,06 | |
| 6745 | 9576 | 19,681 | 32,152 | 80,29 | |
| 9383 | 14,3866 | 20,496 | 34,258 | 93,93 | |
| 11,2139 | 8401 | 21,377 | 36,644 | 113,03 | |
| 5022 | 15,3205 | 22,330 | 39,371 | 141,67 | |
| 8038 | 8300 | 23,367 | 42,518 | 189,42 | |
| 12,1199 | 16,3714 | 24,498 | 46,190 | 264,91 | |
| 4515 | 9478 | 25,737 | 50,529 | 371,39 | |

1-2-2-1.-FORMACION DEL ENG.CILINDRICO DE DIENTES RECTOS.-

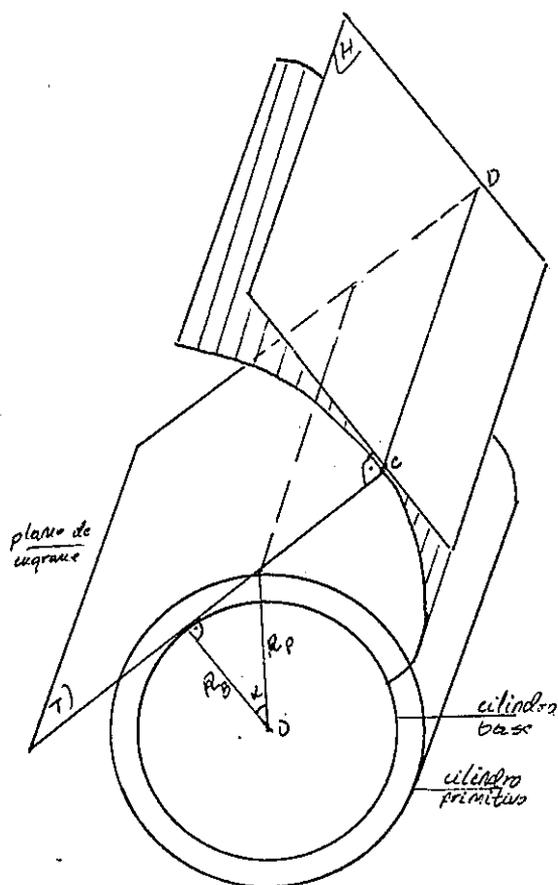


-Puede considerarse engendrado por una traslación perpendicular al papel, del perfil plano estudiado en el punto 1-1-1.

-También, como se observa en la fig., una rueda dentada cilíndrica de dientes rectos puede ser engendrada por la línea DC, del plano T, que rueda, sin deslizar, sobre el "cilindro base" de radio R_B .

-Igualmente, también puede engendrarse como la evolvente de las diferentes posiciones alcanzadas por el "plano generador" H, perpendicular en todo momento al T.

(Recuerdese las propiedades de la evolvente: la tangente a la curva en cada punto es siempre perpendicular a la tangente al círculo base trazada desde ese mismo punto)



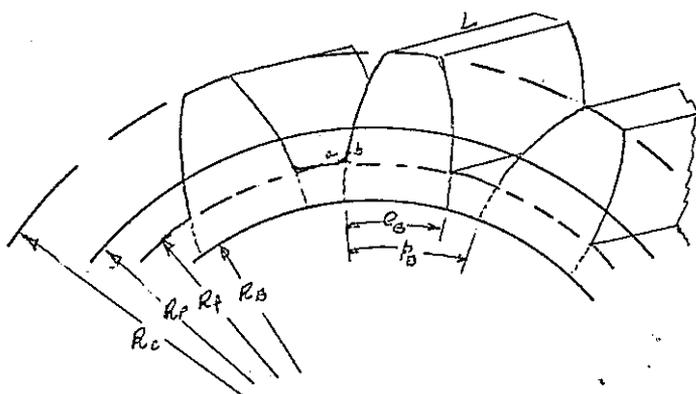
1-2-2-2.-CARACTERISTICAS CONSTRUCTIVAS.-

NOTA: Como se desprende del concepto de rueda dentada de perfil de evolvente, las dos magnitudes que definen unívocamente una rueda de este tipo son la clase de evolvente, o sea, su circunferencia base, y la distancia, medida sobre esa circunferencia base, entre dos dientes consecutivos. (Además de la altura del diente)

Como vimos, un engranaje de perfil de evolvente puede funcionar con distintos ejes, ó sea, con distintas distancias entre ejes manteniendo la misma relación de transmisión (sin dejar de ser conjugados).

Debido a esta particularidad, hemos preferido separar las características constructivas de las ruedas dentadas de este tipo, que son independientes del montaje con otra rueda para formar un engranaje (podríamos decir que las características constructivas de una rueda dentada dependen de su "montaje" con la rueda "herramienta de talla", como veremos en su momento), de las características de funcionamiento, dependientes del "montaje" que se haya hecho entre las dos ruedas del engranaje.

En la rueda dentada de la fig. se definen como características constructivas las siguientes:



- R_B = radio de la circunf. base ó radio base.
- R_C = radio de la circunf. de cabeza. (Puede tener cualquier valor, siempre que no se supere el radio de apuntamiento, que calcularemos al final de este punto)
- R_f = radio ~~xxxx~~ de fondo, ó limite inferior del diente. (Se puede hacer menor que R_B , pero en ese caso la parte ^B del diente

que penetre en la circunferencia base no podrá ser del mismo perfil de evolvente.)

-Perfil de acuerdo: Es el arco de unión entre el flanco del diente y el fondo del mismo. Generalmente se toma un arco de círculo. ($\hat{a}b$)

-Altura del diente: $a_t = R_C - R_f$

- Longitud del diente L
- Espesor en la circunferencia base ó espesor base = e_B .
- Paso base = p_B . Es la distancia entre dos puntos homologos de dos dientes consecutivos, medida sobre la circunferencia base.
- Numero de dientes = z . Siempre se verificara: $z = 2 \cdot \kappa \cdot R_B / p_B$

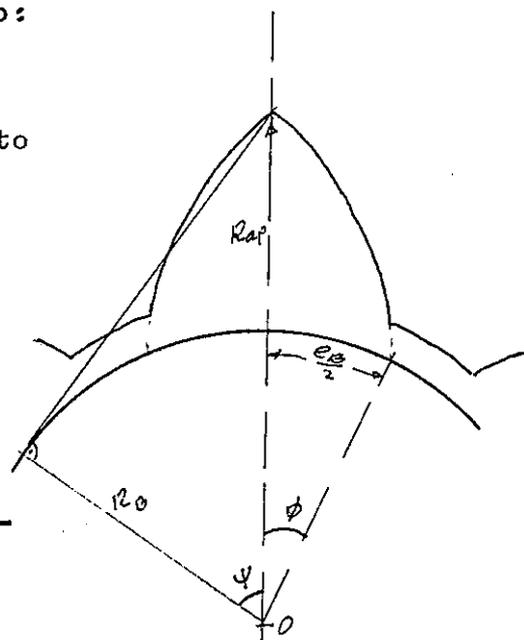
NOTA: Cálculo del radio de apuntamiento:

Como es lógico, para un radio de base dado, el radio de apuntamiento que nos dá la máxima altura del diente, depende solo del espesor del diente en la circunferencia base.

En efecto, teniendo en cuenta la expresión paramétrica de la evolvente, comprobamos en la fig:

$$R_{ap} = R_B / \cos \psi$$

$$e_B = 2 \cdot R_B \cdot \phi = 2 \cdot R_B \cdot \text{Ev} \psi$$



OBSERVACION: No confundir el ángulo ψ con el ángulo de presión α

1-2-2-3.-CARACTERISTICAS DE MONTAJE:CONDICIONES DE ENGRANE.-

De lo dicho en la NOTA primera del punto anterior se deduce la necesidad de ver separadamente todas aquellas características que son propias del montaje efectuado entre las dos ruedas que constituyen el engranaje.

Asi tenemos:

- C_p = circunferencia primitiva. Llamada tambien circunf. axoide. Es la circunferencia (en cada rueda) que pasa por el punto primitivo. Ambas circunferencias primitivas se mantienen siempre tangentes, aumentando sus radios a medida que aumenta la distancia entre centros, cumpliendose siempre:

$$w_2/w_3 = O_{13}P / O_{12}P = R_{P(3)} / R_{P(2)}$$

siendo $R_{P(3)}$ y $R_{P(2)}$ los radios primitivos.

Entre las circunferencias primitivas y las circunf. base existe la relacion:

$$R_{P(2)} = R_{B(2)} / \cos \alpha$$

$$R_{P(3)} = R_{B(3)} / \cos \alpha$$

$$R_{P(2)} / R_{P(3)} = R_{B(2)} / R_{B(3)}$$

- α = ángulo de presión de montaje, ó angulo de presión, simplemente Como se ha dicho repetidamente, no es un valor constante, sino que depende de la distancia entre centros con la que se ha calado las dos ruedas del engranaje.

$$\cos \alpha = R_{B(2)} / R_{P(2)} = R_{B(3)} / R_{P(3)} = \frac{R_{B(2)} + R_{B(3)}}{R_{P(2)} + R_{P(3)}} \neq$$

siendo $R_{P(2)} + R_{P(3)}$ la distancia entre centros, de montaje.

- p_c = paso circunferencial ó paso, simplemente. Se define como la distancia entre puntos homologos de dos dientes consecutivos, medida sobre las circunferencias primitivas.

$$p_c = 2 \cdot \kappa \cdot R_{P(2)} / z_2 = 2 \cdot \kappa \cdot R_{P(3)} / z_3$$

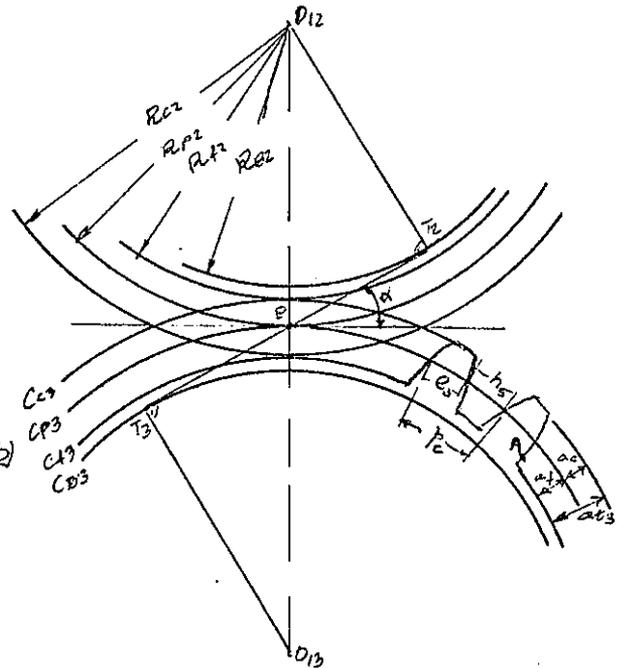
Tambien se comprueba facilmente que $p_c = p_B / \cos \alpha$

- m = módulo, ó paso diametral. Se define por $m = D_{P(2)} / z_2 = D_{P(3)} / z_3$

Con ello se tiene: $p_c = m \cdot \kappa$

(El modulo ó paso diametral corresponde a una división ficticia de diametro primitivo de una rueda, en un engranaje, en tantas partes como dientes tiene la rueda)

- a_c = altura de cabeza del diente, de valor, en cada rueda: $a_c = R_c - R_f$



- a_f = altura de fondo del diente = $R_p - R_f$

- a_t = altura total = $a_c + a_f = R_c - R_f$

R_{uf} = radio util de fondo. (El contacto entre los dientes no tiene lugar hasta el fondo del mismo, sino solo hasta el punto A, por ejemplo, pudiendo variar al modificar la distancia entre centros

- a_{ut} = altura util del diente = $R_c - R_{uf}$

- Espesor y hueco del diente: Se definen igual que se dijo en el punto anterior, solo que estos se miden sobre las circunferencias primitivas. Se representan por e y h , respectivamente.

El espesor (ó el hueco) sobre la circunferencia primitiva esta relacionado con el espesor (ó el hueco) sobre la circunferencia base, por la siguiente expresion:

En la fig., $p_c = 2 \cdot \kappa \cdot R_p / z$

$$p_B = 2 \cdot \kappa \cdot R_B / z$$

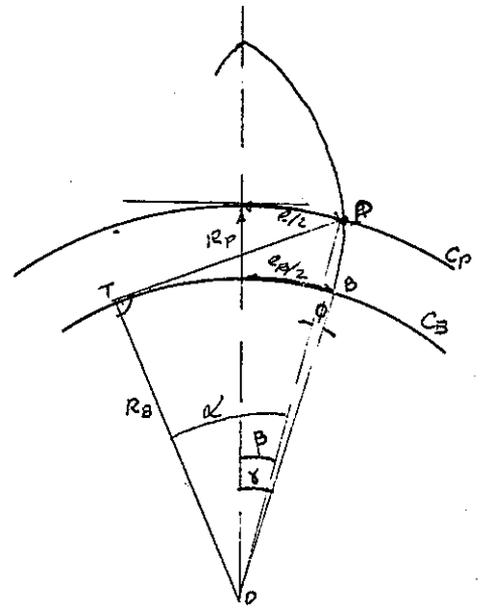
$$p_B / p_c = R_B / R_p = \cos \alpha$$

$$\beta = \delta - \phi \quad \text{y como} \quad \phi = Ev\alpha$$

$$\beta = (e/2) / R_p ; \quad \delta = (e_B/2) / R_B$$

queda: $(e/2) / R_p = (e_B/2) / R_B - Ev\alpha$

de donde
$$e = \frac{e_B - 2 \cdot R_B \cdot Ev\alpha}{\cos \alpha}$$



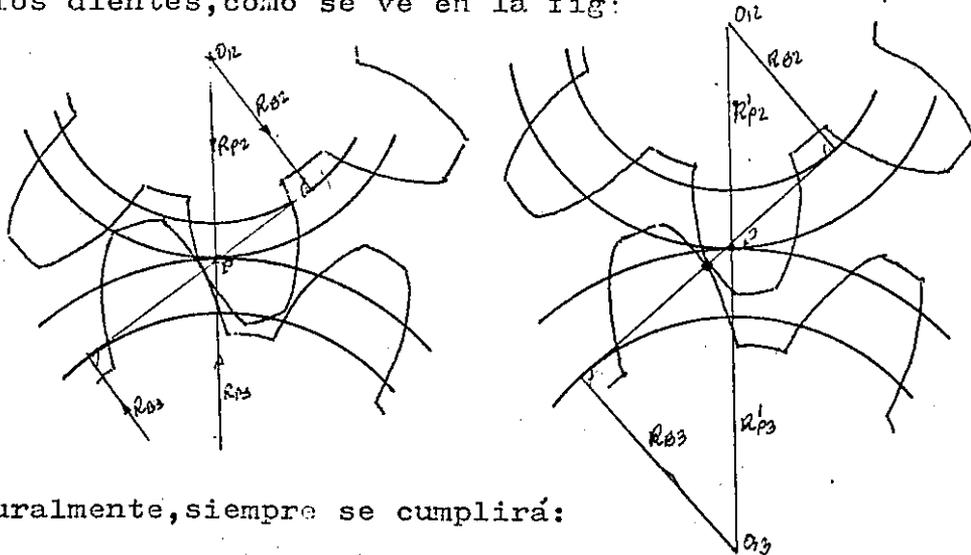
- De todo lo estudiado se desprenden las siguientes "condiciones de engrane":

1º.- Para que dos ruedas engranen, transmitiendo una relación de velocidades constante, sus evolventes respectivas han de ser perfiles conjugados (Generados sobre las circunferencias base adecuadas)

2º.- Para que dos ruedas engranen han de tener el mismo paso base (lo que también significa que habrán de tener el mismo paso circunferencial, en cualquier posición de montaje) (Y también el mismo módulo)

3º.- Dos ruedas correctamente construidas (perfiles conjugados) pueden seguir engranando al separar los centros de sus ejes, mientras los dientes no pierdan el contacto entre sí. Esto solo se traducirá en una mayor ó menor "holgura" entre los lados no activos

de los dientes, como se ve en la fig:



Naturalmente, siempre se cumplirá:

$$e_2 + h_2 = e_3 + h_3 = p_c$$

no teniendo porque ser $e_2 = h_2$ ni $e_3 = h_3$. Tampoco tendrá que ser $e_2 = e_3$ ni $h_2 = h_3$.

Sin embargo, la holgura desaparecerá cuando:

$$e_2 = h_3 \text{ y } e_3 = h_2 \text{ ó sea, cuando } e_2 + e_3 = h_2 + h_3 = p_c$$

Segun esto, dos ruedas construidas con perfiles conjugados, y de las que se conocen sus datos constructivos $e_{B(2)}$ y $e_{B(3)}$ funcionaran sin holgura cuando se cumpla:

$$e_2 + e_3 = \frac{e_{B(2)} - 2 \cdot R_{B(2)} \cdot \text{Ev} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{e_{B(3)} - 2 \cdot R_{B(3)} \cdot \text{Ev} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{p_B}{\cos \alpha}$$

$$e_{B(2)} + e_{B(3)} = p_B + 2 \cdot (R_{B(2)} + R_{B(3)}) \cdot \text{Ev} \alpha_{\min}$$

En otras palabras, estas ruedas funcionaran sin holgura cuando se monten con el ángulo de presión α_{\min} , obtenido de la expresion

$$\text{Ev} \alpha_{\min} = \frac{e_{B(2)} + e_{B(3)} - p_B}{2 \cdot (R_{B(2)} + R_{B(3)})}$$

De esto también se deduce que la distancia mínima a la que se pueden calar esas dos ruedas será:

$$R_{P(2)\min} = R_{B(2)} / \cos \alpha_{\min}$$

$$R_{P(3)\min} = R_{B(3)} / \cos \alpha_{\min}$$

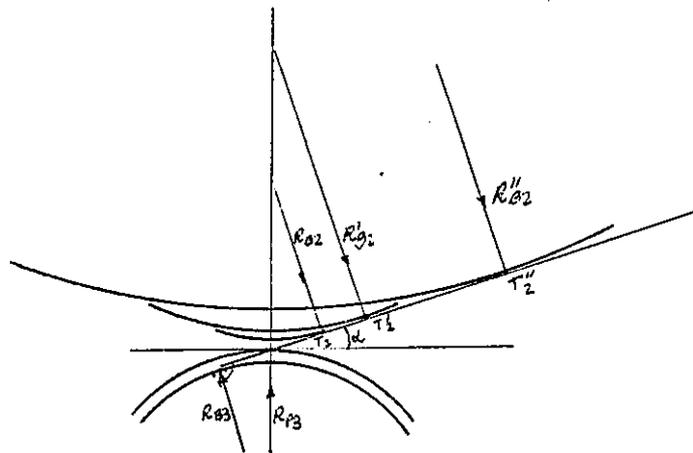
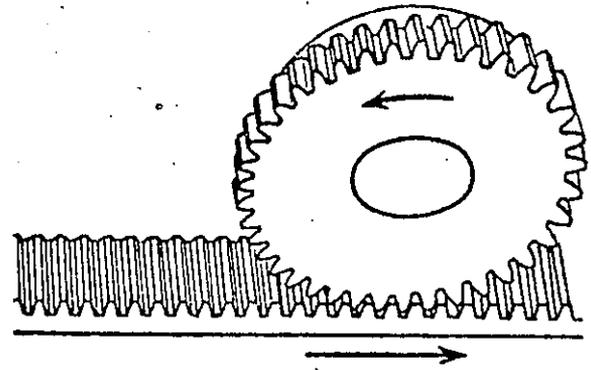
$$d_{\min} = R_{P(2)\min} + R_{P(3)\min} = \frac{R_{B(2)} + R_{B(3)}}{\cos \alpha_{\min}}$$

1-2-2-4.-CASOS ESPECIALES.-

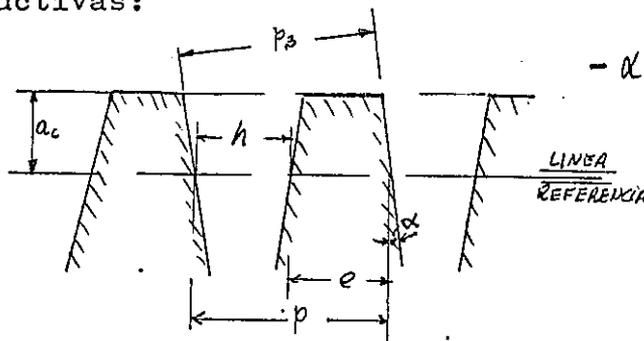
Cremallera:

La cremallera es una rueda dentada de radio infinito .

En la figura puede verse como a medida que aumenta el radio de la rueda, manteniendo fijo el radio del piñón, el radio de curvatura de la evolvente (perfil del diente) va aumentando (conservandose siempre tangente a la otra evolvente en el punto P), hasta que para un radio $R_{B(3)} = \infty$ la curva evolvente es una línea recta, con una inclinación respecto de la línea de centros igual al ángulo de presión



-Para definir una cremallera se escoge arbitrariamente una línea de referencia; a partir de ella se tienen, como características constructivas:



- α = ángulo de presión. Este es característico de cada cremallera, e independiente de la rueda que engrane con ella, como veremos más adelante. (En una cremallera, el ángulo de presión es un dato constructivo, igual al ángulo de presión de funcionamiento)

- p = paso de la cremallera, medido sobre la línea de referencia.

Como se observa en la fig., el valor de "p" es independiente de la línea escogida como referencia.

- p_B = paso base ó paso normal. Como se vé, también es un valor constante.

$$p_B = p \cdot \cos \alpha$$

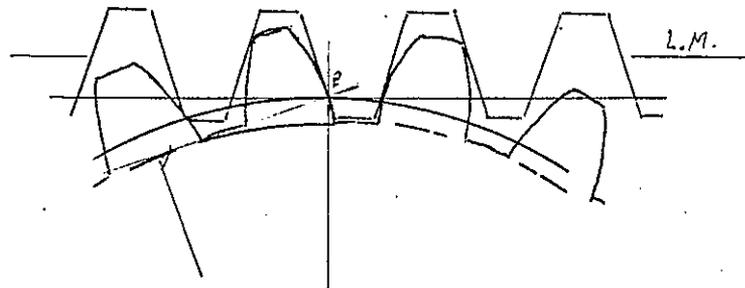
a_c = altura de cabeza. Se mide a partir de la línea de referencia
 e = espesor del diente. Se mide sobre la línea de referencia.

NOTA: En cremalleras normalizadas, se toma $e = h = p/2$, con lo que la línea de referencia queda perfectamente fijada.

-En cuanto a las características de funcionamiento de una cremallera son muy interesantes, y pasamos a analizarlas.

En primer lugar, una cremallera de flancos rectos es perfil conjugado de todas las evolventes, cualquiera que sea su radio base. Esto es, una cremallera dada puede engranar con cualquier rueda de perfil de evolvente (cualquiera que sea su radio base ó el número de diente con tal de que tenga el mismo paso base. Lo único que ocurrirá será que el axoide de la cremallera (un plano) y el de la rueda, (un cilindro), estarán más o menos adentro de la cremallera (se separará más ó menos de la línea de referencia de la cremallera).

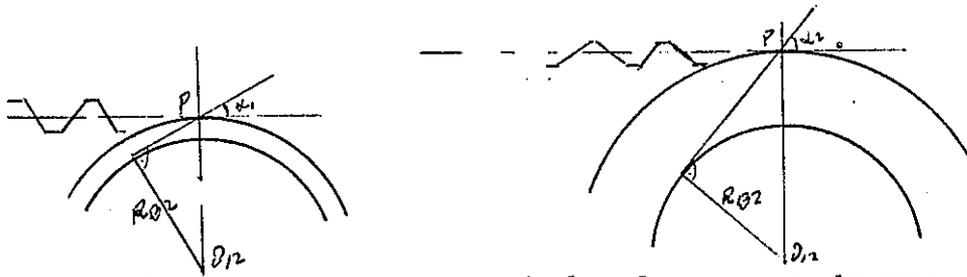
En la figura se observa el engrane de una cremallera con ruedas de diferente tamaño.



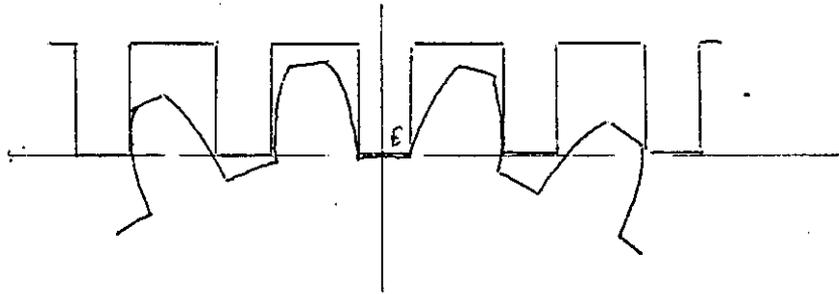
-El ángulo de presión de estos engranajes será, necesariamente, el ángulo de presión de la cremallera. Por consiguiente, para una rueda dada, los axoides del movimiento y el ángulo de presión α' no varían al separar la rueda de la cremallera (variar la distancia entre centros), a diferencia de lo que ocurría en un engranaje normal de rueda. Lo único que pasará es que irá aumentando la holgura del engranaje.

-También, dado que en una cremallera el ángulo de presión puede tomarse de cualquier valor, podemos ver que con una rueda dada pueden engranar todas las cremalleras que se quiera (con diferentes ángulos de presión), con tal de que tengan el mismo paso base.

En la figura puede observarse como engranan diferentes cremalleras con la misma rueda.



-En la figura se ha representado el engrane de una cremallera de dientes rectos ($\alpha = 0^\circ$) con una rueda. Se observa en este ultimo caso que la circunferencia axoide de la rueda coincide con la circunferencia base.



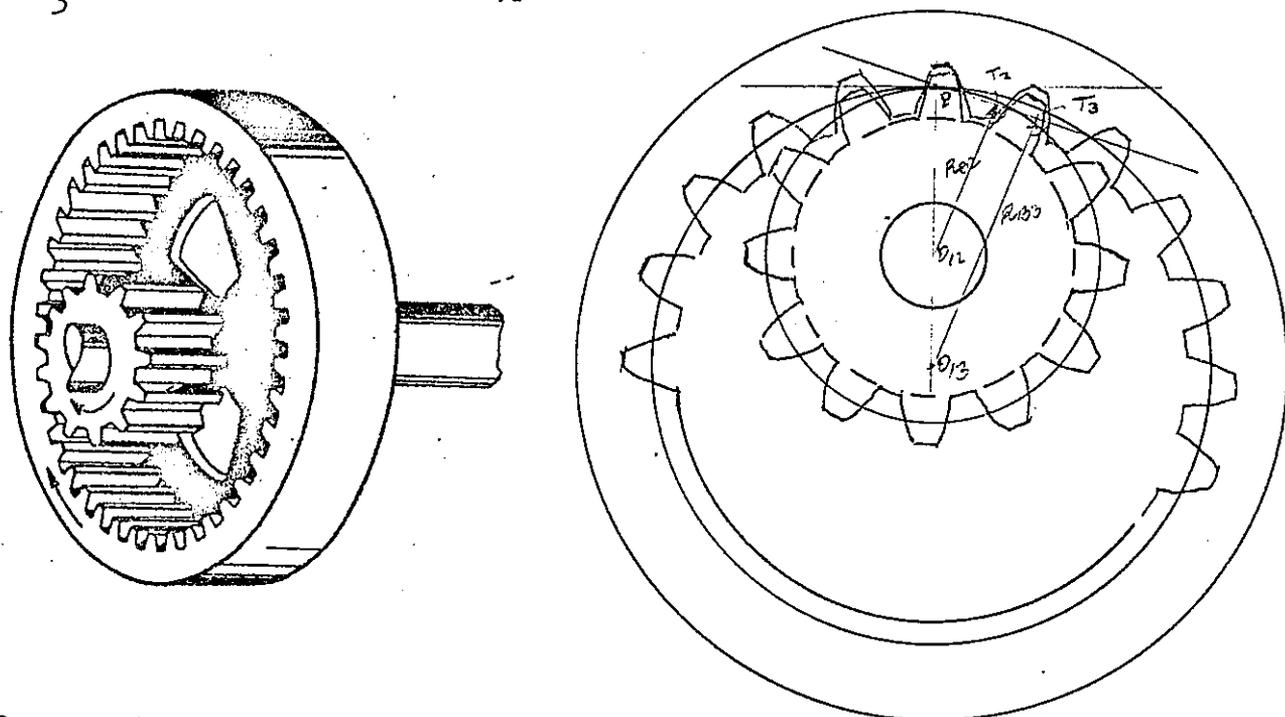
-Finalmente, "una cremallera cualquiera engranara con una rueda cualquiera, con tal de que tengan el mismo paso base".

NOTA: De todas las particularidades estudiadas para el engranaje con cremallera se deduce la gran versatilidad de esta par. Por ello, la cremallera, utilizada como herramienta de corte, se usa para el tallado de los dientes de las ruedas dentadas, lo que estudiaremos con todo detalle mas adelante.

Engranajes interiores:

En estos engranajes es de aplicación todo lo dicho para los engranajes exteriores, sin más que tener en cuenta que en estos engranajes los perfiles conjugados tienen la curvatura en el mismo sentido, por lo que hay que tener cuidado con los signos de las diferentes expresiones.

Como dato curioso, observese que en estos engranajes los puntos T_2 y T_3 están alineados con P , pero en el mismo lado

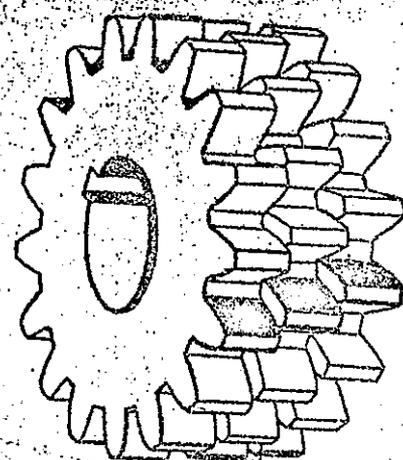


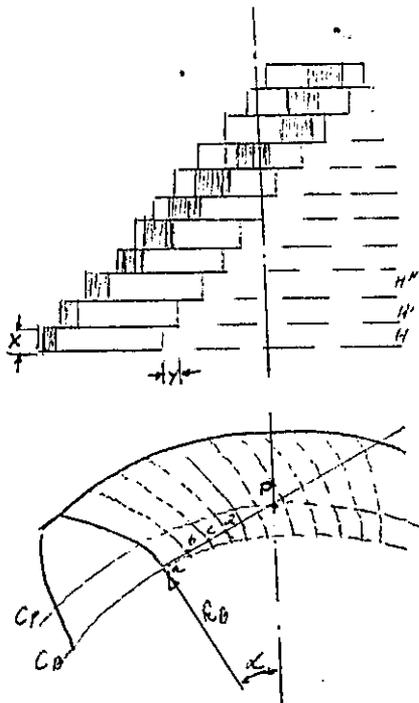
Engranaje escalonado:

Una rueda de dentado escalonado puede considerarse como la yuxtaposición de ruedas de dentado recto, idénticas todas, de espesor (longitud del diente) x , desplazadas una respecto de la otra la distancia y .

Los valores de " x " y de " y " son los mismos para la rueda y para el piñón.

-En la figura se ha representado una de estas ruedas, en planta y en una vista lateral. Para todas las "rodajas" se tiene el mismo paso, el mismo R_B , y el mismo ángulo de presión. Suponiendo que en el instante del dibujo, los perfiles H_2 y H_3 se toquen en " a ", los H_2' y H_3' se tocarán en " b "; los H_2'' y H_3'' en " c "; etc





La proyección sobre el plano del dibujo, de las líneas de contacto de cada una de las rebanadas serán los puntos $abcd...P$...que estarán alineados.

El punto P será la proyección de las líneas de puntos primitivos de todas las rebanadas consideradas, puesto que al ser todas las rebanadas iguales, en cada instante, la normal a los perfiles conjugados han de pasar por la misma recta cuya proyección es dicho punto y los axoides son los mismos para todas las rebanadas. Por tanto, todos los puntos P están, en el instante considerado, alineados.

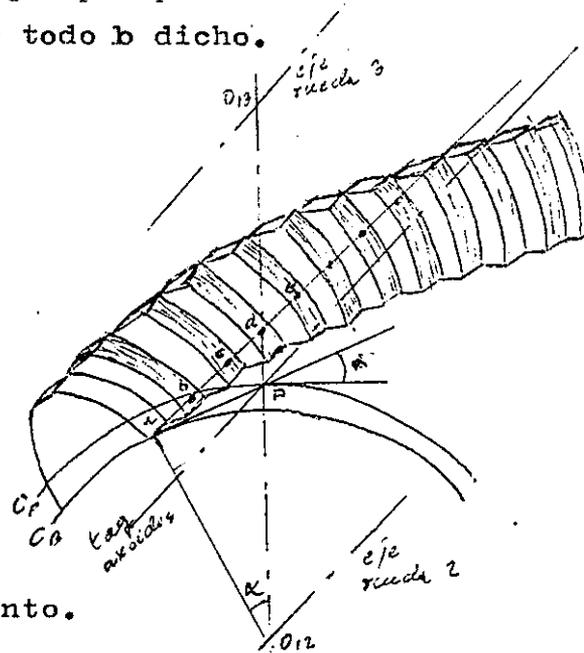
Por otra partes, y por las mismas razones, la línea proyección $abcd...$ forma el ángulo α (ángulo de presión) con la perpendicular a la línea de centros.

En la siguiente figura se muestra que perspectiva de los dientes escalonados, donde se ve mejor todo lo dicho.

Observese que en este instante hay rebanadas de la rueda 2 que no están en contacto con las correspondientes rebanadas de la 3 (concretamente las tres últimas). Obsérvese también que la tangente a los dos axoides (lugar geométrico de los puntos primitivos de todas las rebanadas) y la línea $abc...$,

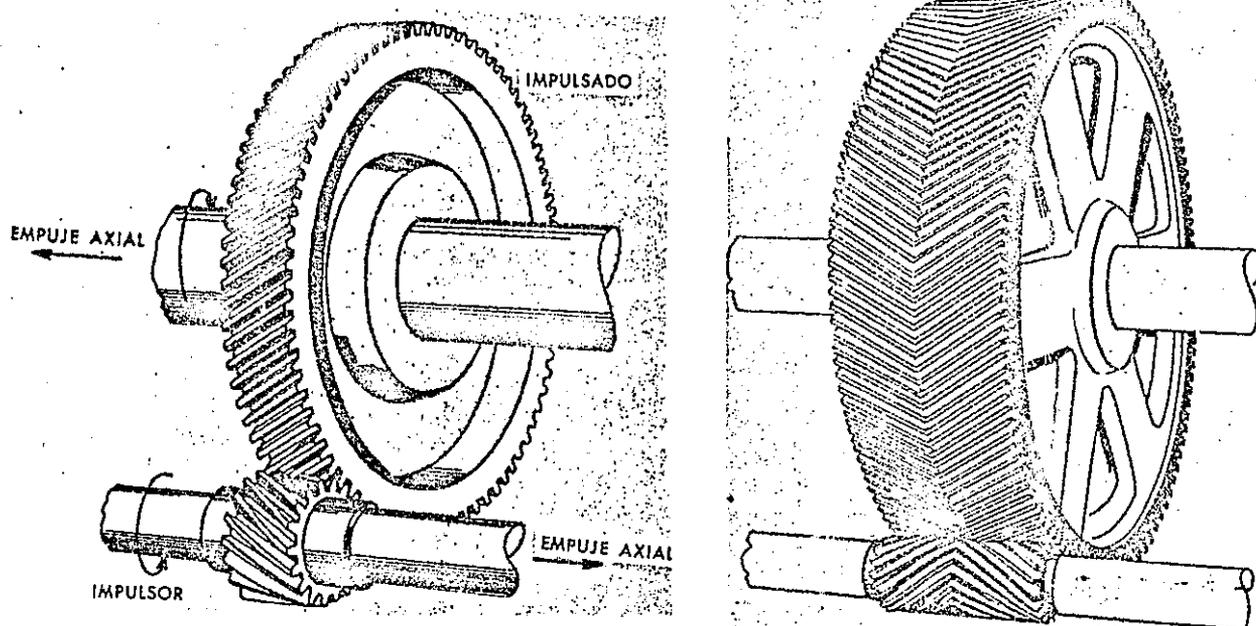
forman un cierto ángulo, que mide la inclinación dada al escalonamiento.

-Obsérvese que si a las diferentes rebanadas le hubieramos dado un corrimiento de distinto valor, la línea $abcd...$ no sería recta.



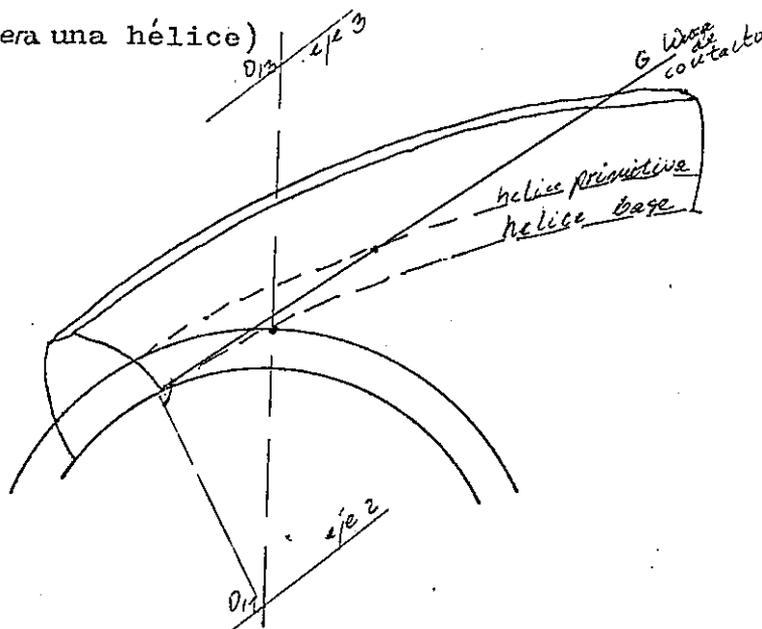
1-2-3-1.-FORMACION DE LOS ENGRANAJES CILINDRICOS HELIZOIDALES.-

En las figuras pueden verse estos engranajes, en un montaje sencillo y otro doble (empleado para evitar los empujes axiales, como veremos mas adelante).



-Esta dentado puede considerarse como un caso limite de las dentaduras escalonadas, cuando el espesor de las "rebanadas" es infinitesimal, y la inclinación, constante.

(Como es lógico, una línea de inclinación constante arrollada sobre un cilindro sera una hélice)

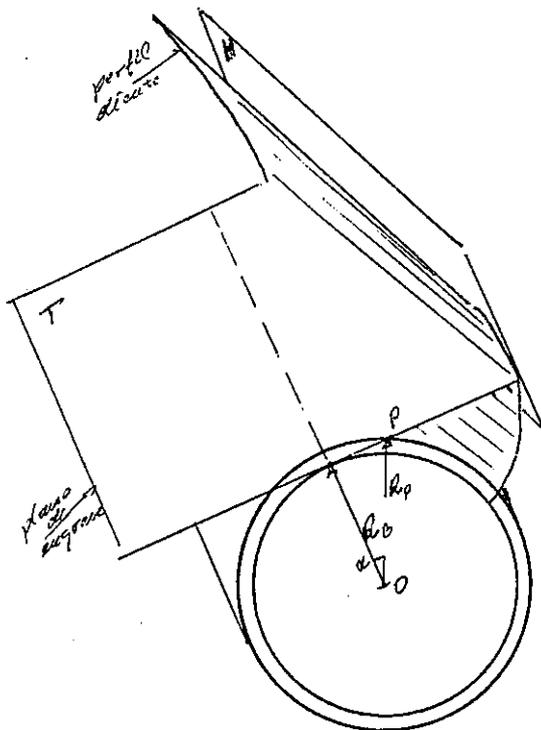
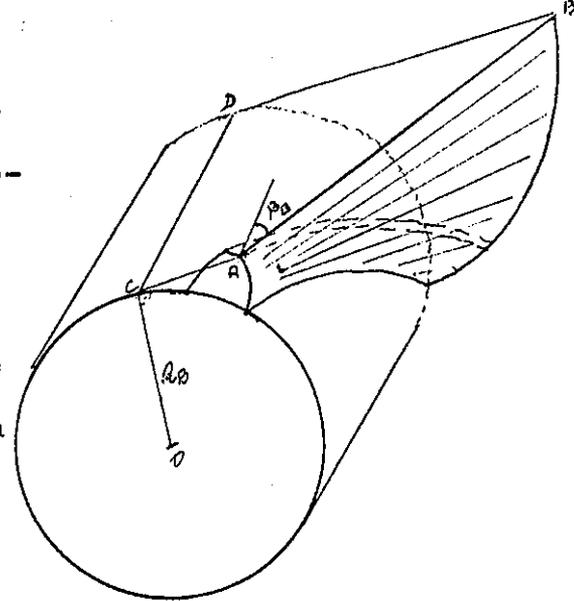


-También puede considerarse engendrado por un perfil plano, evolvente del círculo base, que se desplaza siguiendo el contorno de una hélice trazada sobre el cilindro.

-También puede considerarse como parte de un helizoide reglado, como se vé en la fig.

El segmento AB, perteneciente al plano ABCD, genera un helizoide reglado, al rodar este plano sobre el cilindro base. Cualquier sección de esta superficie por un plano tangente al cilindro base es una línea recta, y cualquier sección perpendicular al eje del cilindro, es una evolvente.

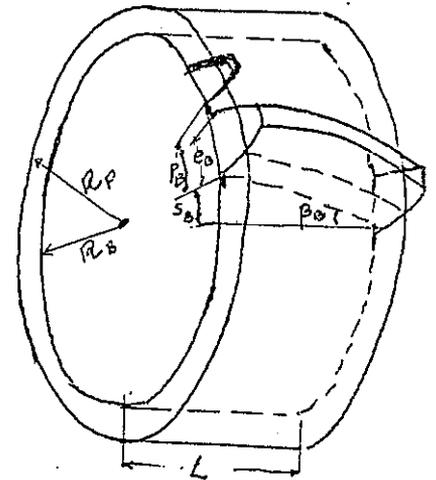
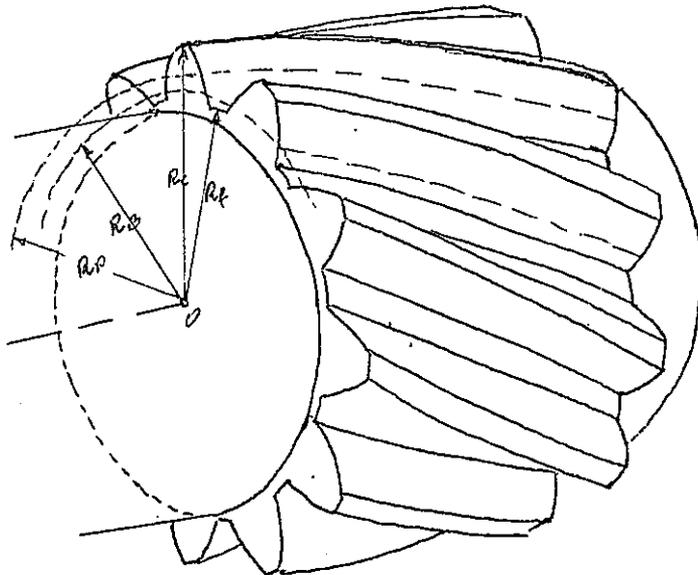
La inclinación β_B de ésta hélice, medida sobre el cilindro base, es el "ángulo de inclinación base".



-Finalmente, y como se observa en la figura, la rueda dentada puede engendrarse como la superficie evolvente de las diferentes posiciones alcanzadas por el plano generador H, perpendicular en todo momento al T, pero "no paralelo" a la generatriz de los axoides.

1-2-3-2.-CARACTERISTICAS CONSTRUCTIVAS.-

Dado que cualquier sección perpendicular al eje de la rueda es igual que si se tratara de una rueda dentada de dientes rectos, (sólo existe un "desfase" entre las diferentes secciones), podemos considerar las mismas características constructivas que vimos para aquellos, a las que habrá que añadir, naturalmente, las características debidas a la inclinación de la hélice.



- R_B = radio base

- R_C = radio de cabeza

- R_f = radio de fondo

- a_t = altura del diente = $R_C - R_f$

- L = longitud del diente

- e_B = espesor base

- p_B = paso base

- p_H = paso helicoidal, ó paso de la hélice

- β_B = ángulo de inclinación base, ó ángulo de inclinación de la hélice medido sobre el cilindro base.

$$\text{tag } \beta_B = 2. \pi. R_B / p_H$$

- z = numero de dientes = $2. \pi. R_B / p_B$

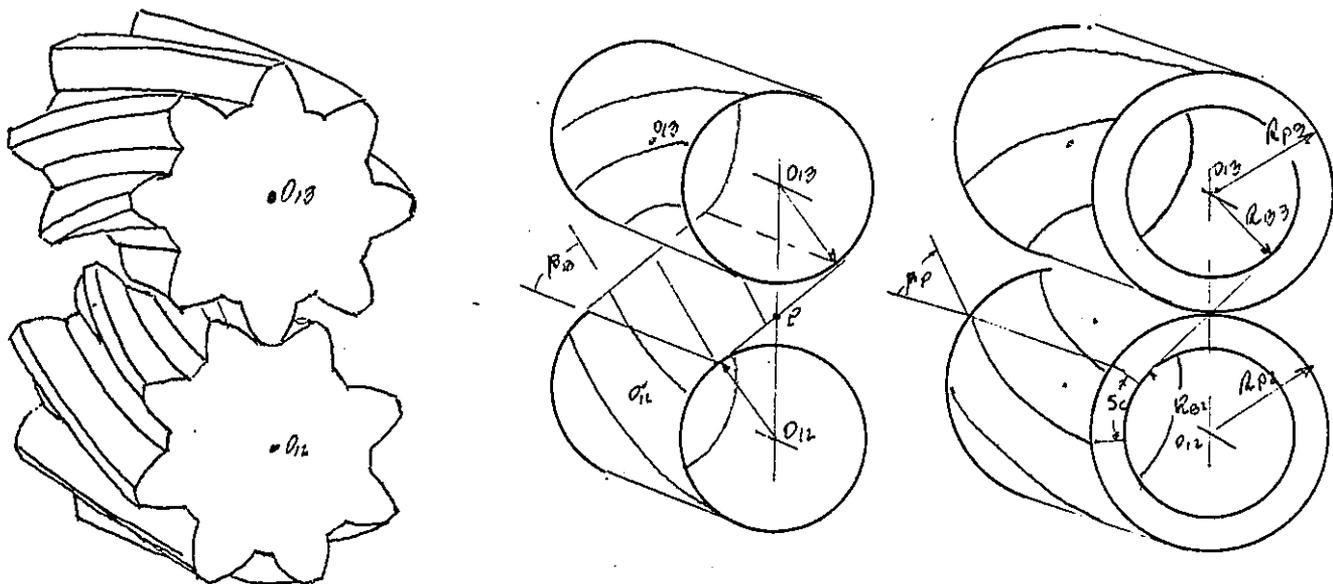
- s_B = desplazamiento angular base, medido en relación con un mismo plano axial. En la fig. se observa:

$$s_B = L. \text{tag } \beta_B$$

También se le llama "salto directo", ó "salto base".

1-2-3-3.-CARACTERISTICAS DE MONTAJE.CONDICIONES DE ENGRANE.-

-En cada una de las secciones normales al eje se pueden hacer las mismas consideraciones que para los engranajes de dientes rectos. Por consiguiente, las características de montaje serán las mismas, incrementadas en aquellas derivadas de la inclinación de la hélice



- C_P = circunferencias primitivas ó circunferencias axoides. Se definen igual que para la rueda de dientes rectos. En ellas se verifica: $w_2/w_3 = O_{13}^P/O_{12}^P = R_P(3)/R_P(2)$
Igualmente, también guardarán una relación con las circunferencias base, dada por:

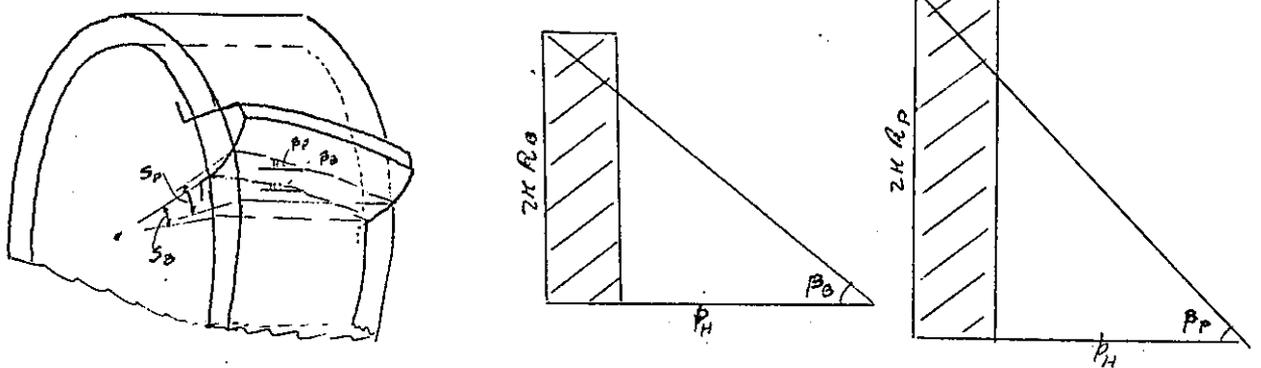
$$R_P(2)/R_P(3) = R_B(2)/R_B(3)$$

- α = ángulo de presión de montaje. Al igual que en el dentado recto, se verificará: $\cos \alpha = (R_B(2) + R_B(3))/O_{12}O_{13}$
que como se sabe, variará al variar la distancia entre ejes

NOTA: Cuando se estudien la transmisión de esfuerzos en estos engranajes veremos que este ángulo de presión es sólo "aparente", puesto que no coincide con el verdadero ángulo de empuje entre los dientes, que lógicamente ha de verse afectado por la inclinación de estos.

- p_c = paso circunferencial. Se define igual que para los dientes rectos. $p_c = 2 \cdot \pi \cdot R_P / z$
- m = módulo, definido igual que para los dientes rectos.
- a_c , a_f , a_t = alturas de cabeza, de fondo y total. Se definen igual que para dientes rectos.
- h , e = hueco y espesor. Se definen igual que para los dientes rectos.
- s_c = salto circunferencial, ó salto medido sobre las circunferencias primitivas. Su valor viene dado por: $s_c = L \cdot \tan \beta_p$

- β_P = ángulo de inclinación de montaje. Como se observa en las figs. el ángulo de inclinación de la hélice medido en el cilindro base (característica intrínseca de la rueda) nó es el mismo que el ángulo de inclinación medido sobre los cilindros axoi-des.



El paso axial p_H es el avance axial correspondiente a una vuelta completa, luego tiene que ser igual para la circunferencia base que para la circunferencia primitiva. Desarrollando el cilindro base y el primitivo, se tiene:

$$\text{tag } \beta_B = 2 \cdot \pi \cdot R_B / p_H \quad \text{tag } \beta_P = 2 \cdot \pi \cdot R_P / p_H$$

de donde se deduce:

$$\text{tag } \beta_B / \text{tag } \beta_P = R_B / R_P = \cos \alpha$$

con lo que se observa que el ángulo de inclinación de montaje varia al modificar la distancia entre ejes.

-De todo lo dicho se desprenden las siguientes condiciones de engrane:

- 1º.-Las evolventes de ambas ruedas han de ser perfiles conjugados
- 2º.-Las dos ruedas han de tener el mismo paso base, ó el mismo paso circunferencial, ó el mismo módulo.
- 3º.-Para que dos ruedas de este tipo puedan engranar han de tener, además, la misma inclinación de sus hélices, y de sentidos opuesto

$$\beta_{B(2)} = \beta_{B(3)}$$

Naturalmente, para una distancia entre ejes diferente, variará el ángulo α , y también β_P , por lo que también se ha de cumplir

$$\beta_{P(2)} = \beta_{P(3)}$$

- 4º.-Todo lo demás que se dijo para ruedas de dientes rectos, es de aplicación para estas.

NOTA: Algunos autores definen las magnitudes p_c , e , h , etc, en función de sus dimensiones medidas sobre una sección normal a la hélice (normal al diente).

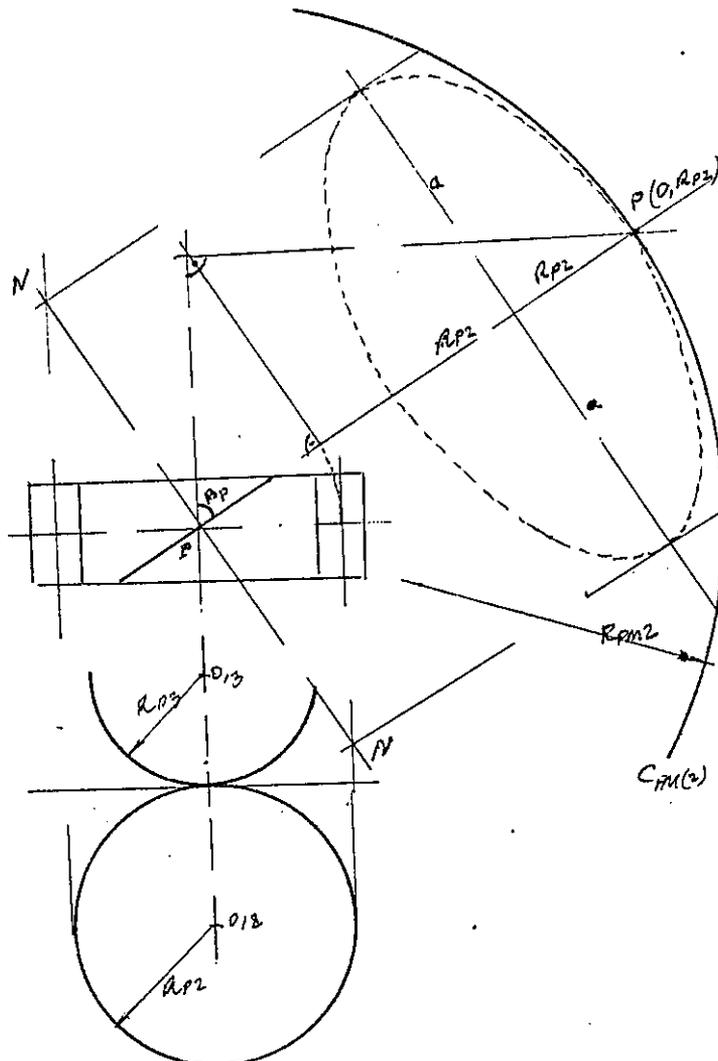
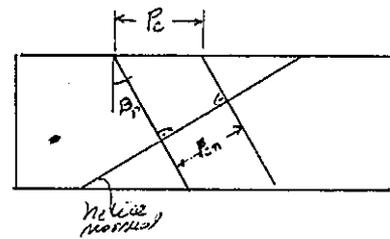
Desde luego, esto no tiene mucho sentido en una rueda dentada de este tipo (aunque sí en una cremallera, como veremos a continuación), puesto que dada la forma alabeada de los dientes, no cabe hablar de un plano normal a ellos (un solo plano) en todos los puntos de la sección.

Sin embargo, si trazamos sobre el cilindro primitivo una hélice perpendicular a las que determinan dos dientes consecutivos, llamaremos "paso circunferencial normal", ó "paso normal", p_{cn} , a la distancia entre puntos homologos de dos hélices consecutivas, medida sobre el segmento de hélice perpendicular a los dientes.

Al desarrollar el cilindro primitivo, como se vé en la fig., se encuentra:

$$p_{cn} = p_c \cdot \cos \beta_p$$

Igualmente, el "ángulo de presión normal" será el verdadero ángulo de empuje, y lo llamaremos α_n .



-A partir de un plano normal a los dientes pueden definirse las que llamaremos "ruedas cilíndricas equivalentes", de utilidad para algunos cálculos. En la fig., N-N es el 'plano' normal al diente (Observese que esto ya introduce un error, puesto que habría que hablar de hélice normal), en el punto P. Su intersección con el cilindro de la rueda dentada 2 es la elipse representada abatida en la fig. En el punto P, de coordenadas $(0, R_p(2))$ (Respecto de unos ejes que pasan por el centro de la elipse), el radio

de curvatura de la elipse viene dado por

$$R_{Pn(2)} = a^2/R_{P(2)} = (R_{P(2)}/\cos \beta_P)^2 / R_{P(2)}$$

y lo mismo se podría hacer con la rueda 3. En definitiva:

$$R_{Pn(2)} = R_{P(2)} / \cos^2 \beta_P \quad R_{Pn(3)} = R_{P(3)} / \cos^2 \beta_P$$

Estos valores representan los radios de dos circunferencias, con la misma curvatura en P que las elipses anteriores, llamadas "circunferencias primitivas normales".

Si sobre esas circunferencias llevamos el "paso normal", se formarían unas ruedas de z_{n2} y z_{n3} dientes:

$$z_{n2} = 2 \cdot \kappa \cdot R_{Pn(2)} / p_{cn} = 2 \cdot \kappa \cdot R_{P(2)} / \cos^2 \beta_P \cdot p_c \cdot \cos \beta_P = z_2 / \cos^2 \beta_P$$

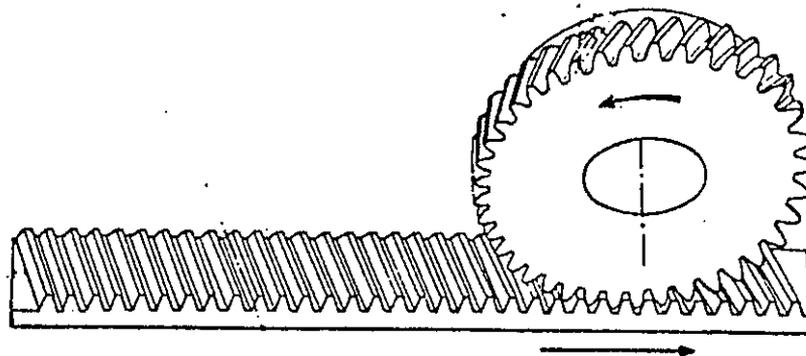
$$z_{n3} = 2 \cdot \kappa \cdot R_{Pn(3)} / p_{cn} = 2 \cdot \kappa \cdot R_{P(3)} / \cos^2 \beta_P \cdot p_c \cdot \cos \beta_P = z_3 / \cos^2 \beta_P$$

de donde se deduce:

"A efectos de cálculo, el engranaje de dos ruedas helicoidales 2 y 3 puede sustituirse por el de dos ruedas cilíndricas rectas $2n$ y $3n$ de radios primitivos $R_{Pn(2)}$ y $R_{Pn(3)}$, con los dientes z_{n2} y z_{n3}

1-2-3-4.-CASOS ESPECIALES.-

Cremallera:

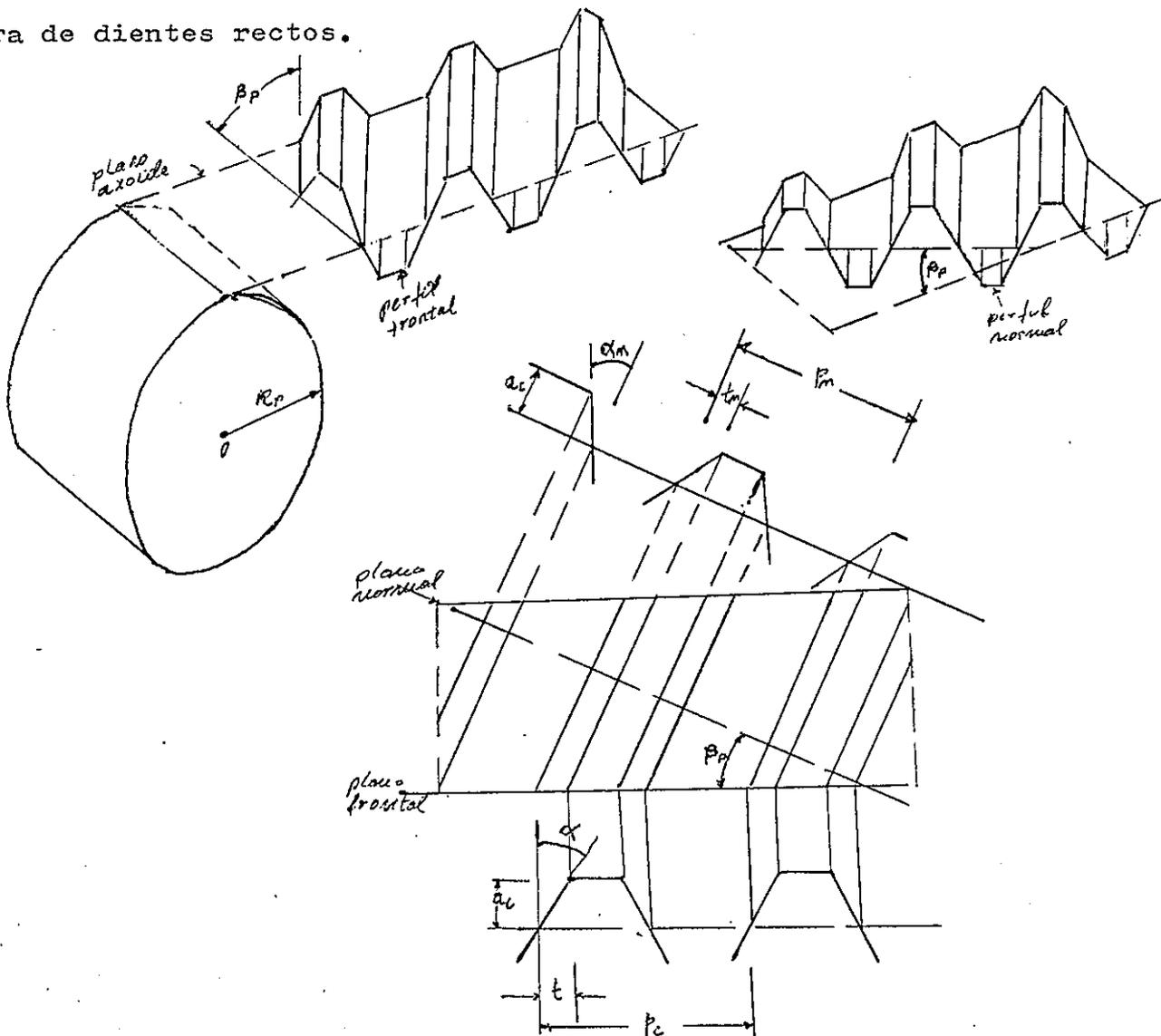


Como ya sabemos, una cremallera no es más que una rueda dentada de radio infinito. En ella, el cilindro axoide se convierte en un plano axoide.

La cremallera helicoidal tiene, por consiguiente, los dientes rectos y oblicuos, inclinados respecto de la dirección transversal el ángulo

β_p .

Los flancos de los dientes son planos, igual que los de una cremallera de dientes rectos.



En estas cremalleras cabe hablar de dos perfiles: El perfil frontal (en un plano perpendicular al eje de la rueda), y el perfil normal (Plano perpendicular a los dientes. Observese que en una cremallera, a diferencia de una rueda, todos los planos normales a los dientes son paralelos, por lo que en estas si cabe hablar de plano normal)

- Sobre el perfil frontal se miden las magnitudes:

- α = ángulo de presión, intrínseco, de la cremallera.

- p_c = paso circunferencial = p_B

- e = espesor

- a_c = altura de cabeza

El perfil frontal de la cremallera es el conjugado del perfil frontal de la rueda helicoidal que engrana con ella, y es el que define la manera de engranar de ambos. (A todos los efectos, es exactamente igual que para la cremallera de dientes rectos)

- Sobre el perfil normal se miden las magnitudes:

- α_n = ángulo de presión normal, ó ángulo de presión verdadero. Este es el que se ha de tener en cuenta para el cálculo de los dientes

En la fig. se comprueba que:

$$t_n = t \cdot \cos \beta_p \quad \text{y como} \quad t = a_c \cdot \tan \alpha$$

y además, $t_n = a_c \cdot \tan \alpha_n$, se tendrá:

$$\tan \alpha_n = \cos \beta_p \cdot \tan \alpha$$

relacion que liga los tres angulos fundamentales α_n , α y β_p

- p_{cn} = paso normal. En la fig. se comprueba:

$$p_{cn} = p_c \cdot \cos \beta_p$$

igualmente:

$$m_n = m \cdot \cos \beta_p$$

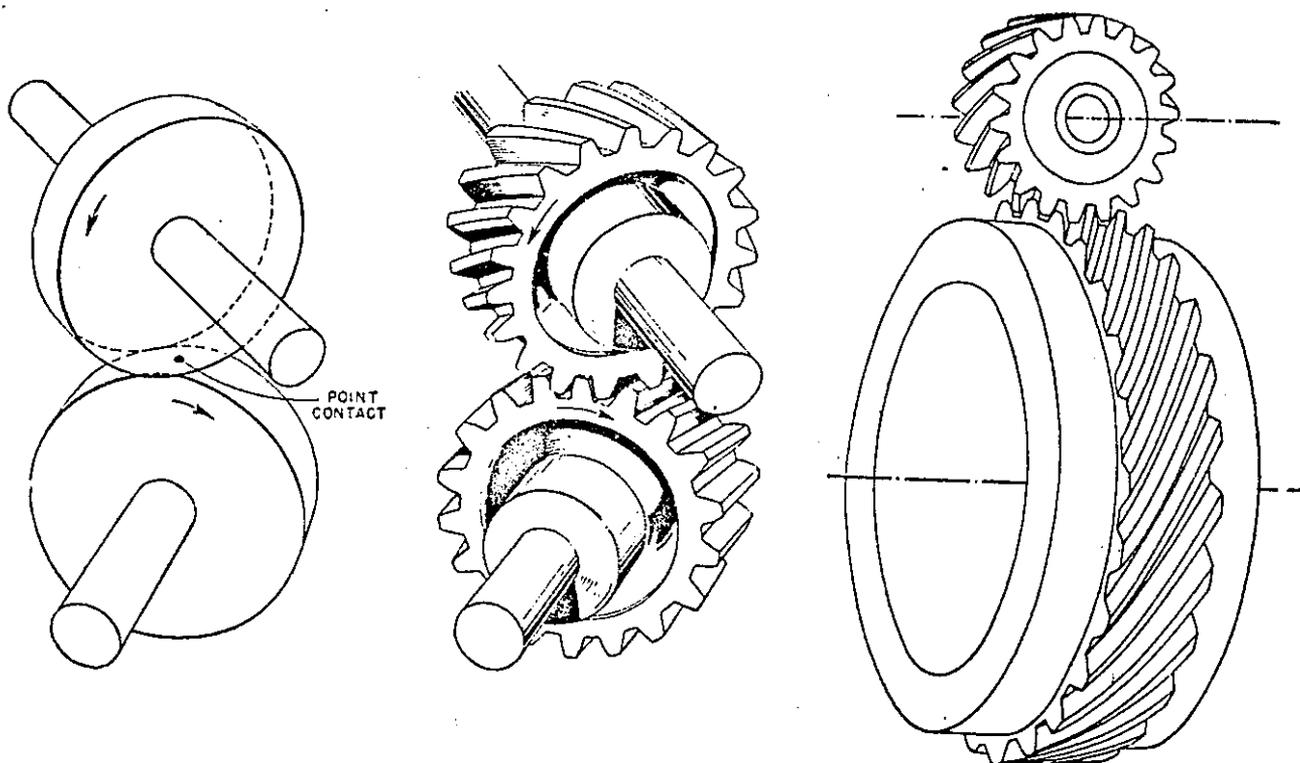
- e_n = espesor normal (Que es el que cuenta a la hora de calcular la resistencia mecánica del diente)

- a_c = altura de cabeza, que es igual en ambos perfiles.

1-2-4-1. ENGRANAJES CILINDRICOS DE DIENTES HELIZOIDALES; PARA EJES QUE SE CRUZAN. GENERALIDADES.-

- Este tipo de engranaje está formado por las mismas ruedas cilíndricas de dientes inclinados que hemos estudiado anteriormente, solo que en este caso se hacen engranar con los ejes no paralelos.

De este modo, el contacto entre ambas ruedas ya no es una línea, sino solo un punto.

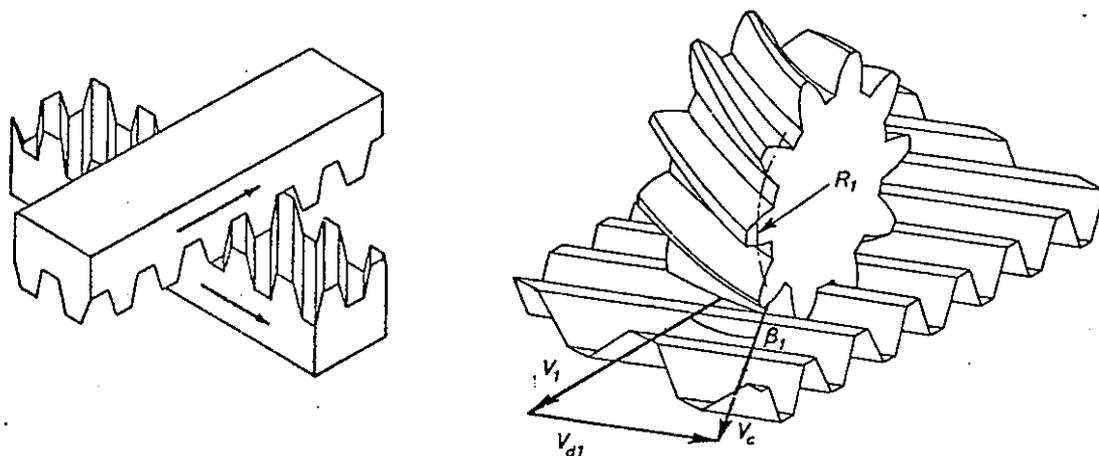


Es decir, dos ruedas cilíndricas helizoidales de igual paso normal $P(n)$ y con ángulos de inclinación iguales y contrarios $\beta_2 = -\beta_3$, que engranan entre sí con sus ejes paralelos, pueden hacerlo con cualquiera otros ángulos β'_2 y β'_3 , no necesariamente iguales; la única diferencia es que en este caso el contacto será puntual.

El ángulo que formaran ambos ejes será;

$$\Sigma = \beta'_2 + \beta'_3$$

- Para comprender mejor el funcionamiento de estos engranajes basta con imaginar el engrane de una rueda cilíndrica de dientes helicoidales con una cremallera, tal como se vé en la figura:



Si el eje de la rueda está fijo, y esta se mueve con velocidad w_2 , la cremallera se desplazará con la velocidad

$$v_2 = w_2 \cdot R_2$$

A este movimiento de la cremallera puede superponerse, por el procedimiento que sea, otro movimiento en el sentido de sus dientes, sin que obviamente, ello afecte para nada al engrane. Únicamente aparecerá una cierta velocidad de deslizamiento V_{d2} del diente de la rueda respecto al de la cremallera (que se superpondrá al pequeño deslizamiento que ya existe en este tipo de engranaje).

En conjunto, la cremallera se desplazará en la dirección de \vec{v}_c , con la velocidad

$$\vec{v}_{c2} = \vec{v}_2 + \vec{v}_{d2}$$

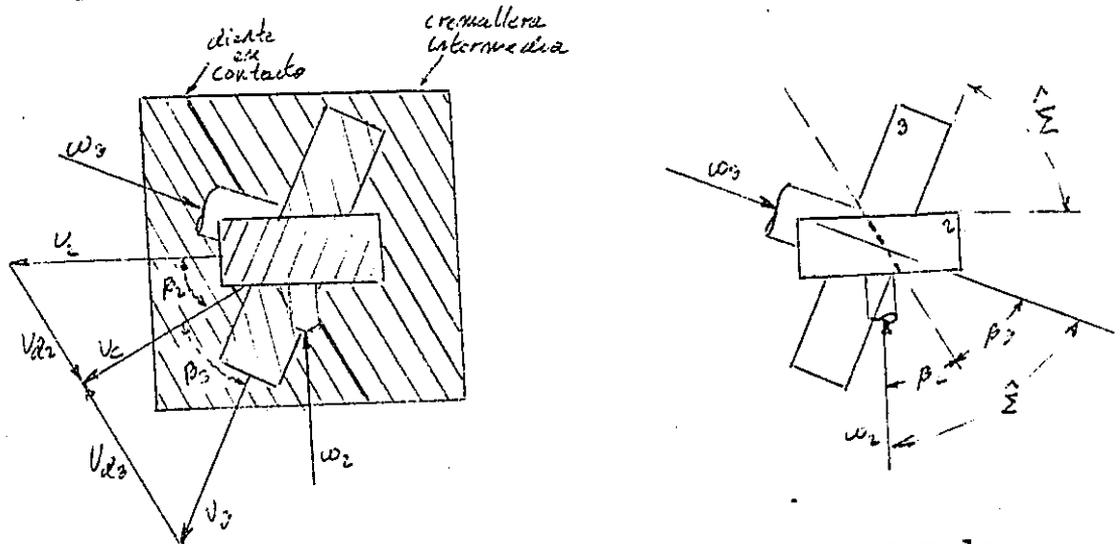
En el caso de que la cremallera se desplace con

$$v_{d2} = v_2 \cdot \text{sen } \beta_2$$

$$v_{c2} = v_2 \cdot \text{cos } \beta_2$$

significa que lo hará en dirección perpendicular a sus dientes.

Supongamos ahora otra rueda helicoidal capaz de engranar con la misma cremallera, pero por la otra cara (y con el mismo plano axoide)



Igual que antes, la nueva rueda puede engranar con la cremallera aunque esta se mueva perpendicularmente a la dirección de sus dientes. En este caso, se tendrá:

$$v_{d3} = v_3 \cdot \text{sen } \beta_3$$

$$v_{c3} = v_3 \cdot \text{cos } \beta_3$$

siendo
$$v_3 = \omega_3 \cdot R_3$$

Como es lógico, v_{d3} puede tener un valor tal que

$$\vec{v}_{c(2)} \equiv \vec{v}_{c(3)}$$

En estas condiciones puede suprimirse la cremallera intermedia, y las dos ruedas, tocándose en un solo punto, (como mas tarde se verá), pueden transmitir el movimiento.

En este caso se tendrá:

$$\vec{v}_{c(2)} = \vec{v}_{c(3)} = \vec{v}_c$$

$$\vec{v}_d = \vec{v}_{d(2)} + \vec{v}_{d(3)} \Leftrightarrow v_d = \omega_2 R_2 \text{ sen } \beta_2 + \omega_3 R_3 \cdot \text{sen } \beta_3$$

$$\hat{\Sigma} = \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3$$

- Los signos de $\hat{\beta}_2$ y $\hat{\beta}_3$ se deducen fácilmente, siguiendo el convenio de la figura (pg. 197-H. Mabie).

1.2.4.2 Características constructivas

En realidad son exactamente las mismas que las estudiadas para las ruedas cilíndricas de dientes helicoidales para ejes paralelos, ya que se trata de las mismas ruedas.

1.2.4.3 Características de funcionamiento

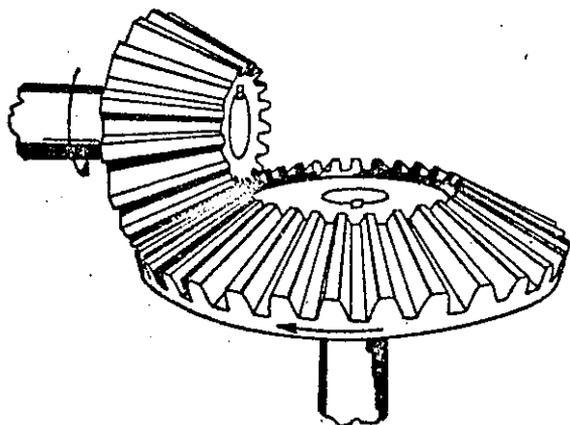
Puede hacerse extensivo a este engranaje todo lo dicho para ejes paralelos, excepto que ahora no tiene porque ser $\beta_2 = \beta_3$. Por el contrario, β_2 y β_3 pueden tener cualquier valor, solo que las ruedas hay que engranarlas formando sus ejes un ángulo $\hat{\Sigma} = \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3$.

(Por el contrario, si el dato de partida es $\hat{\Sigma}$, habrá que escoger convenientemente los ángulos β_2 y β_3)

1-2-5-1.-FORMACION DE LOS ENGRANAJES CONICOS DE DIENTES RECTOS.-

Introducción:

La relación geométrica que existe entre los engranajes concurrentes



y los paralelos es la misma

que existe entre la geometría esférica y la plana.

De igual forma que en los engranajes paralelos podía estudiarse el movimiento en solo dos dimensiones, sobre

un plano de referencia perpendicular a los ejes, en los engranajes concurrentes puede también estudiarse el movimiento en solo dos dimensiones, pero sobre una esfera de referencia perpendicular a los ejes (con centro en el punto de concurrencia).

-Los dos conos axoides cortan sobre esta esfera dos circunferencias que se mueven rodando una sobre otra (cualquiera que sea el diámetro de la esfera de referencia)

Para obtener una pareja de ruedas dentadas, basta con montar sobre estas circunferencias, y en la superficie de la esfera, unas dentaduras ó perfiles conjugados.

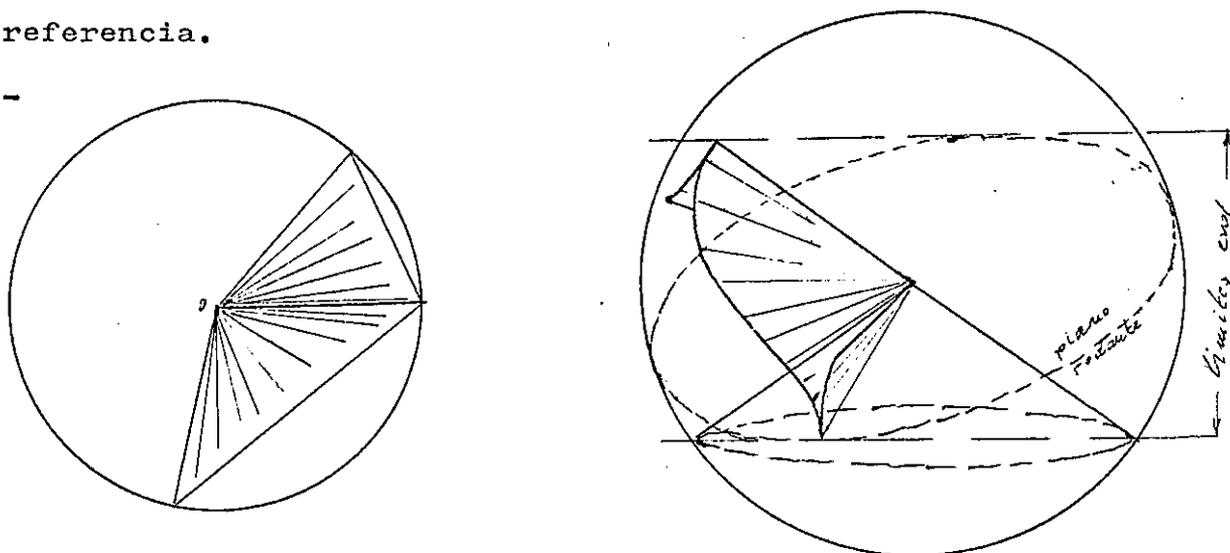
-Igual que en los engranajes paralelos, puede demostrarse que existen una infinidad de perfiles que cumplen la condición de ser conjugados, sobre la superficie de una esfera. En particular son conjugadas dos evolventes esféricas, con propiedades análogas a las evolventes planas. Se obtienen estas curvas haciendo rodar un plano sobre un "cono base" como se ve en la fig., en donde cada punto del plano móvil describe una "evolvente esférica".

-Hemos de hacer notar que esta curva oscila indefinidamente entre dos planos límites, cuya posición depende del ángulo del cono base.

-Resulta fácil de imaginar que sólo se han sustituido los cilindros base, por conos base (Los conos base sólo se cortarían en sus vértices

puesto que los conos que realmente se cortan a lo largo de una generatriz son los conos primitivos ó conos axoides).

Un hilo arrollado en una circunferencia del cono base de una de las ruedas, y en otra circunferencia del cono base de la otra rueda, ambas sobre la misma esfera, producirán el mismo movimiento, al irse arrollando y desenrollando, respectivamente, que el de los correspondientes perfiles conjugados, formados por las correspondientes evolventes esféricas que un punto fijo del hilo delimitan sobre la esfera de referencia.

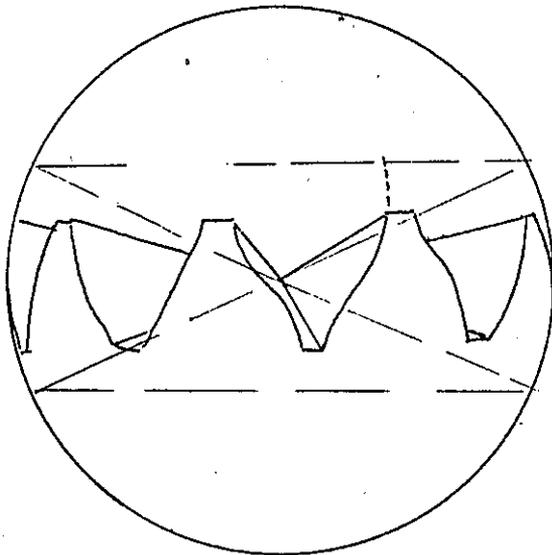


-También, al igual que para los engranajes paralelos, estos perfiles admitirían una variación de la distancia entre ejes, lo que en estos engranajes cónicos se traduciría en una variación del "ángulo de convergencia" (ángulo entre los ejes de los conos), conservándose constante la relación de transmisión.

-La tercera dimensión del diente (Longitud ó profundidad) podría obtenerse, en forma simple, proyectando estas evolventes esféricas desde el centro de la esfera, aunque, desde luego, no hay ningún inconveniente en que en sucesivas esferas concéntricas la forma de los perfiles sea distinta, ó desfasadas respecto de la esfera exterior (dientes helicoidales cónicos)

NOTA IMPORTANTE:

Sin entrar en mayores detalles hemos de decir que el perfil de evolvente esférica definido anteriormente, no se emplea nunca en la práctica.



El motivo de no usar este perfil es que en él no existe nada parecido a la cremallera de flancos planos, como en el caso de ruedas cilíndricas, lo cual complica extraordinariamente su tallado y rectificado con herramientas normales.

En efecto, el equivalente de la cremallera es una "rueda plana" de perfil

de evolvente esférica, como se ve en la fig.

En esta cremallera se observa como los flancos de los dientes no son superficies planas, sino alabeadas. Además, esta rueda tiene como eje un plano diametral, pudiendo tener cualquier cono base.

Ruedas cónicas prácticas:

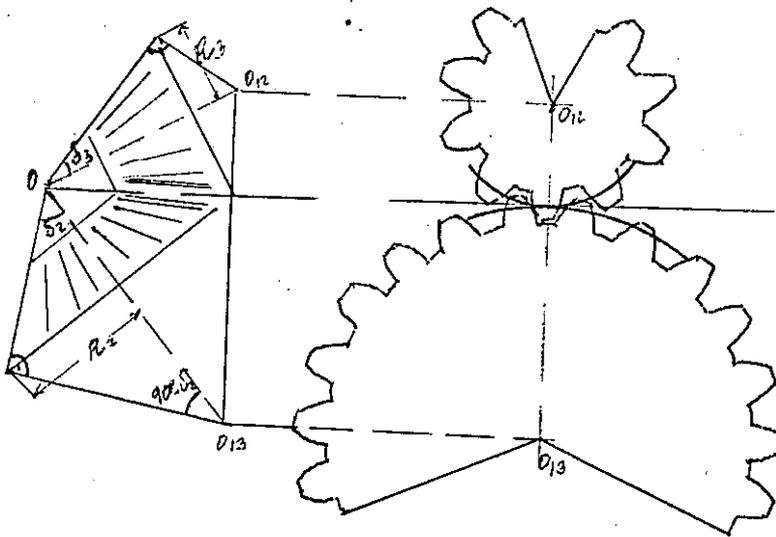
El perfil realmente empleado en las ruedas cónicas es el llamado de "dientes piramidales" u "octoides". En ellos, la rueda plana correspondiente tiene flancos planos, como veremos más adelante.

NOTA: Estas ruedas cónicas son mucho menos perfectas que las de evolvente esférica, de modo que producen ruidos en su marcha, no admiten velocidades elevadas, etc.

La formación de estas ruedas puede resumirse en la siguiente forma: (recuérdese que todas las magnitudes de los dientes hay que definir las sobre la superficie de una esfera)

Para obtener una representación plana aproximada de esta superficie esférica, y tener, por consiguiente, la posibilidad de realizar un trazado plano lo más aproximado posible del perfil de los dientes, el procedimiento más simple consiste en proyectarlos desde el centro de la esfera sobre un cono exterior tangente llamado "cono complementario".

Este cono toca a la esfera a lo largo de la circunferencia axoide



de modo que sus generatrices resultan perpendiculares a las del cono axoide, y su ángulo en el vértice es el complementario de este. En la zona de la dentadura, la distancia entre la esfera y el cono complementario es tan pequeña que la forma

del perfil no queda muy deformada en la proyección.

Desarrollando luego este cono complementario se obtiene un sector circular plano dentado, que es un trozo de la llamada "rueda cilíndrica equivalente".

-El radio de esta rueda cilíndrica equivalente es mayor que el de la rueda cónica

$$R_{pe(2)} = R_p(2) / \cos \delta_2$$

y el "numero de dientes equivalente" también será mayor

$$z_e(2) = z_2 / \cos \delta_2$$

-La mayoría de los problemas relativos al engrane de dos ruedas cónicas pueden estudiarse sustituyéndolas por las dos ruedas cilíndricas equivalentes, con sus correspondientes número de dientes equivalentes.

NOTA: El pequeño error cometido con esta sustitución proviene de que el perfil del diente en el cono complementario coje puntos de distintas esferas concéntricas de la rueda real, de modo que son puntos que no engranan entre sí, puesto que se mueven en distintas esferas.

-El perfil de los dientes de estas ruedas equivalentes, obtenidas al proyectar ruedas de dientes octoides, es bastante aproximado a un perfil de evolvente, como veremos más adelante.

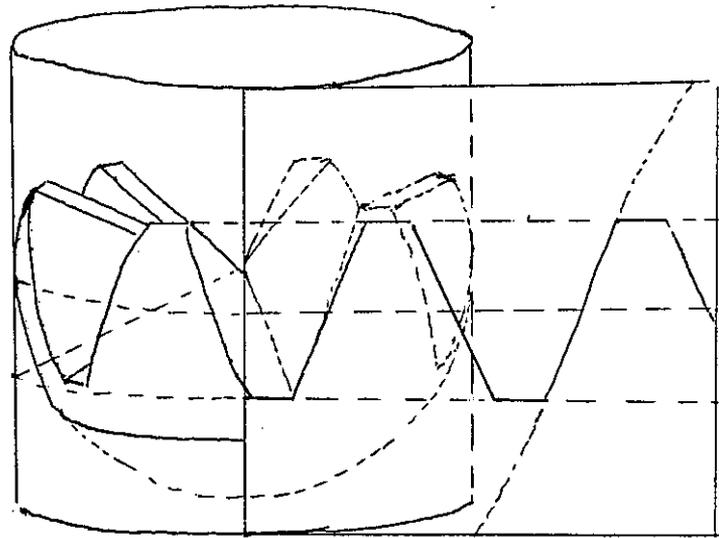
1-2-5-2.-CASOS ESPECIALES.-

Rueda plana:

Cuando el ángulo de uno de los conos es de 90° , tendremos una rueda plana. El cono complementario correspondiente se convierte en un cilindro, como se ve en la fig.

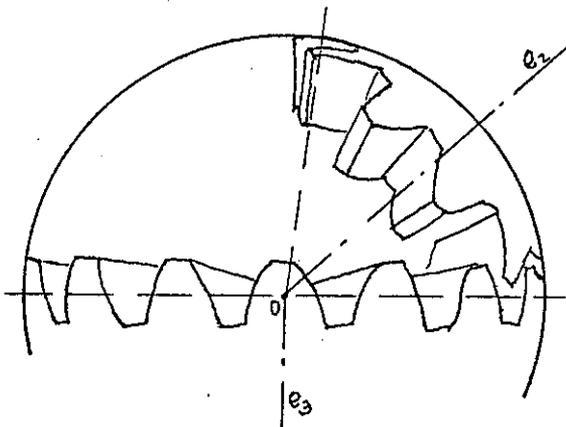
Si se trata de dientes piramidales, al desarrollar luego este cilindro se obtiene un perfil de cremallera con flancos casi rectilíneos.

Más exactamente, el flanco de esta cremallera es el trozo central, casi rectilíneo, de una



senoide muy amplia, tal como se ha señalado en la figura.

Inversamente, puesto que el perfil esférico de los dientes de una rueda cónica es conjugado del de la correspondiente rueda plana, y dado que el perfil plano del diente de la rueda equivalente es conjugado del de la anterior cremallera, (dibujada en la fig., aproximadamente de dientes rectos), se deduce, en consecuencia, que el perfil de un diente piramidal es bastante parecido a una evolvente de círculo.



-Partiendo de esta rueda plana así definida, pueden hacerse las mismas consideraciones que para las cremalleras en engranajes cilíndricos. (Cada cremallera engrana con todas las ruedas cónicas, con tal de que tengan el mismo paso base)

NOTA: Existen en la práctica dos tipos de dentaduras piramidales.

-En la dentadura piramidal de "primera especie", la rueda de referencia es una rueda plana (áxide plano)

Dos ruedas cónicas que sean conjugadas de esta rueda plana

también son conjugadas entre sí, y engranan correctamente.



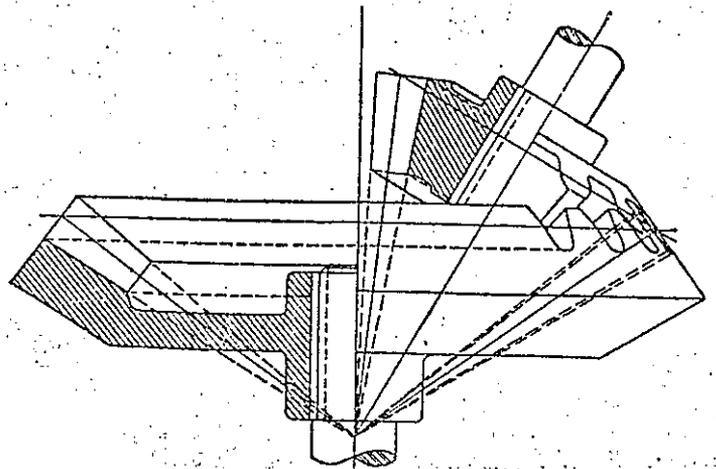
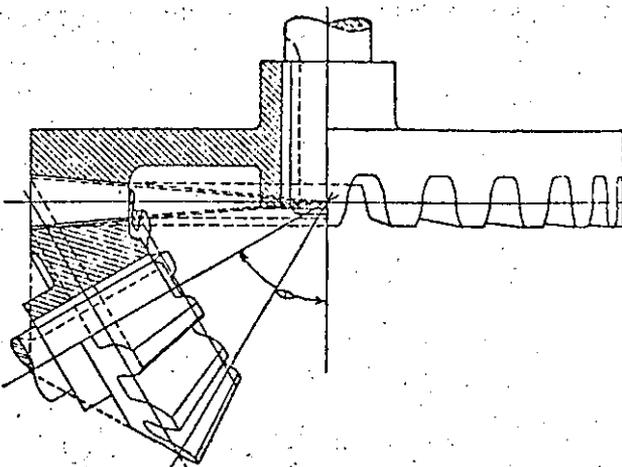
-En la dentadura piramidal de "segunda especie", la rueda de referencia no es realmente una rueda plana, y lo que están en un plano son las cabezas de los dientes. El axoide es, en realidad, un cono.

(Este tipo se ha introducido para simplificar el proceso de tallado)

En este caso, dos ruedas cónicas conjugadas de este perfil de referencia no son conjugadas entre sí, y no engranan correctamente.

(Aunque si los requerimientos no son muy elevados, pueden usarse)

Ruedas cónicas interiores:



1-2-5-3.-CARACTERISTICAS CONSTRUCTIVAS.-

-Se definen exactamente igual que en los engranajes cilindricos, a partir de las correspondientes "ruedas cilindricas equivalentes", cuyos radios y numeros de dientes, segun vimos, son:

$$R_{Be} = R_B / \cos \delta$$

$$z_e = z / \cos \delta$$

También se suelen dar los datos constructivos en magnitudes angulares como se vé en la fig.

-Conos complementarios, exterior e interior

-Cono de cabeza y de fondo

-Angulo de cabeza θ_c

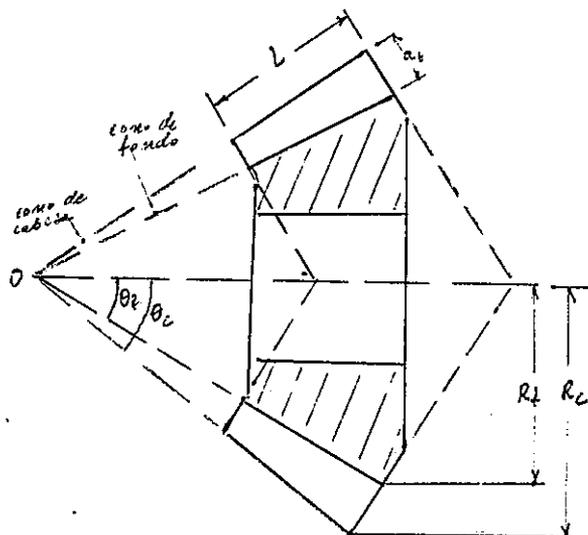
-Angulo de fondo θ_f

-Longitud del diente L
(Se toma siempre menor de la tercera parte de la generatriz de contacto)

- Altura del diente a_t .
Coincide en magnitud con la altura del diente medida sobre la rueda equivalente a_{te})

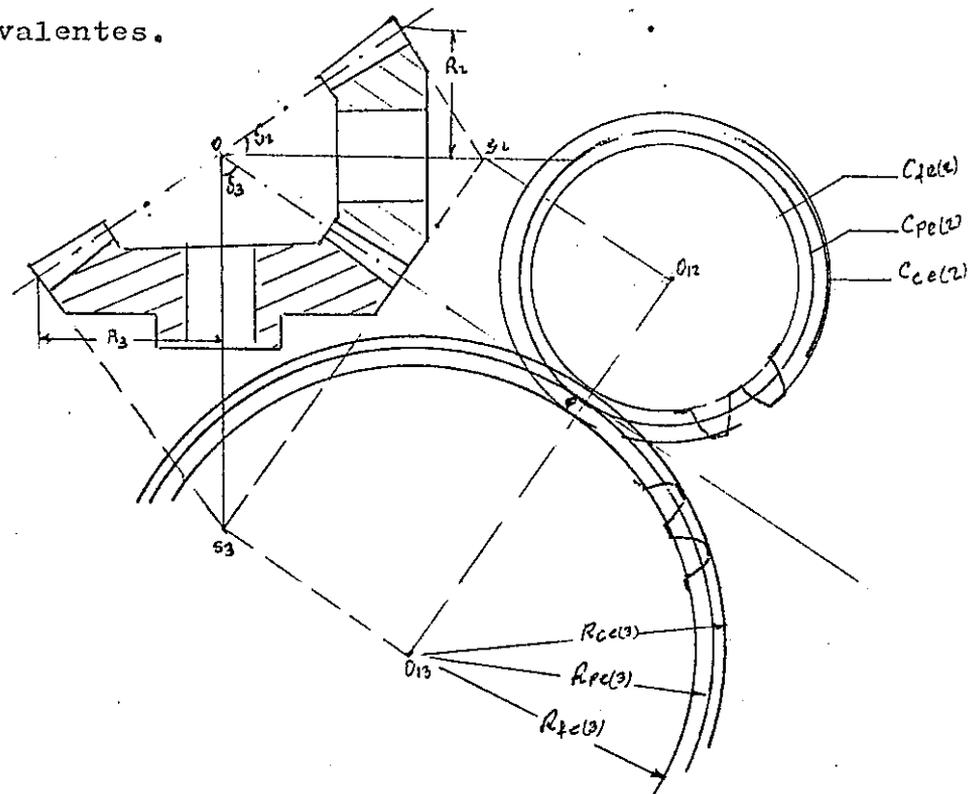
- R_c = radio de cabeza de la rueda conica

- R_f = radio de fondo de la rueda conica



1-2-5-4.-CARACTERISTICAS DE MONTAJE.-

-Igualmente se definen a partir de las propias de las ruedas cilíndricas equivalentes.



-Circunferencias primitivas equivalentes C_{pe}

-Circunferencias de cabeza y fondo, equivalentes C_{ce} , C_{fe}

-Ángulo de presión de montaje $\cos \alpha = (R_{Be(2)} + R_{Be(3)}) / \overline{O_{12}O_{13}}$

-Paso circunferencial equivalente

$$p_{ce} = 2 \cdot \pi \cdot R_{pe} / z_e$$

-Modulo equivalente

$$m_e = 2 \cdot R_{pe} / z_e$$

Como es lógico, el módulo medido en la circunferencia equivalente

es igual al módulo medido en el cono complement. ext. de, la rueda cónica

En efecto, $m_e = 2 \cdot R_{pe} / z_e = (2 \cdot R_p / \cos \delta) / (z / \cos \delta) = 2R_p / z = m$

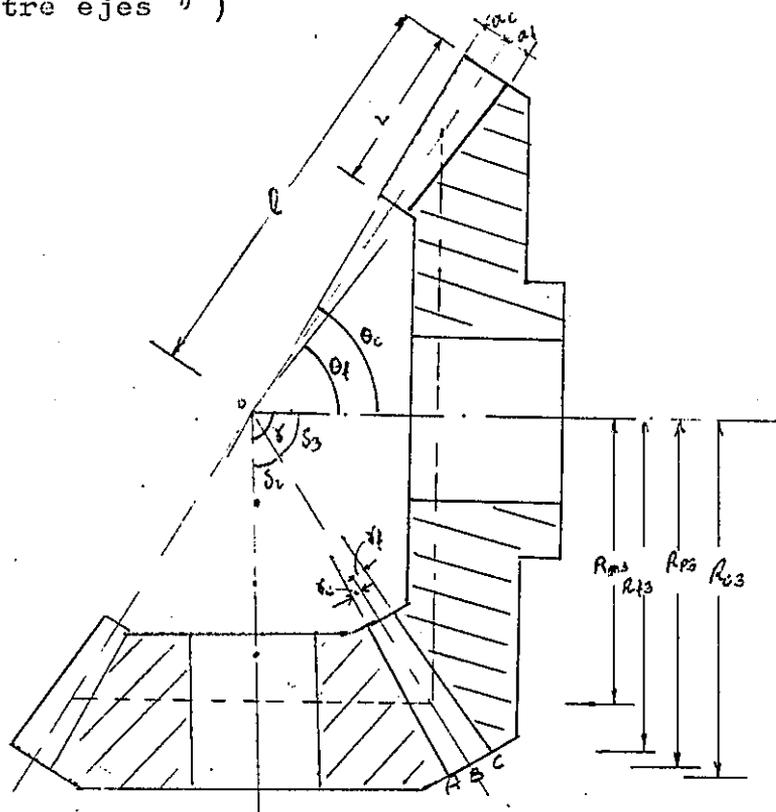
-Alturas de cabeza, de fondo y total equivalentes

$$a_{ce} = R_{ce} - R_{pe} ; a_{fe} = R_{pe} - R_{fe} ; a_{te} = a_{ce} + a_{fe}$$

(La diferencia entre las alturas de cabeza y de fondo, entre ambas ruedas, da el "juego de fondo" del engranaje)

-Espesor y hueco en la circunferencia equivalente e_e , h_e .

- Los datos de funcionamiento, referidos a las propias ruedas cónicas, serán: (Ángulo entre ejes δ)



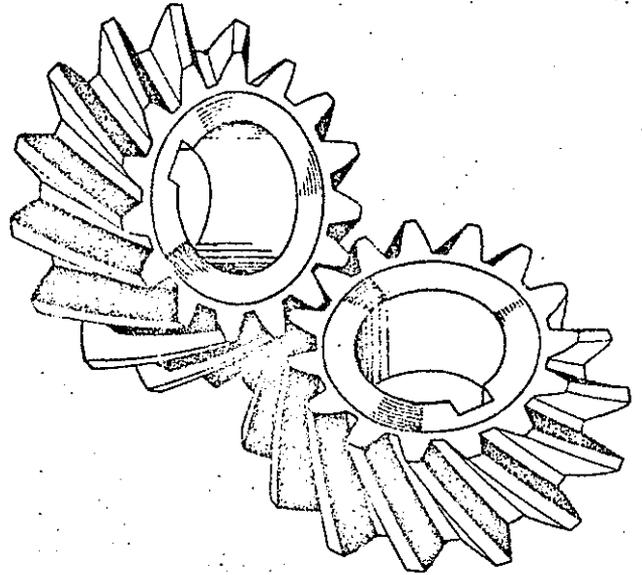
- R_p = radios primitivos de las ruedas cónicas = $m \cdot z / 2$
- L = longitud de los dientes = R_p / sen
- γ_c = ángulo de cabeza del diente. Se tiene: $\text{tag } \gamma_c = a_c / L$
- γ_f = ángulo de fondo del diente. Se tiene: $\text{tag } \gamma_f = a_f / L$
- θ_c = semiángulo de cabeza (cono de cabeza) $\theta_c = \delta + \gamma_c$
- θ_f = semiángulo de fondo (cono de fondo) $\theta_f = \delta - \gamma_f$
- R_c = radio de cabeza de la rueda cónica $R_c = R_p - AB \cos \delta$
 $R_c = m \cdot z / 2 + a_c \cdot \cos \delta$
- R_f = radio de fondo de la rueda cónica $R_f = R_p - \overline{BC} \cdot \cos \delta$
 $R_f = m \cdot z / 2 - a_f \cdot \cos \delta$
- R_m = radio medio de la rueda cónica $R_m = R_p - \frac{L}{2} \cdot \text{sen} \delta$
 $R_m = m \cdot z / 2 - \frac{L}{2} \cdot \text{sen} \delta$

1-2-6-1.-ENGRANAJES CÓNICOS DE DIENTES INCLINADOS.-

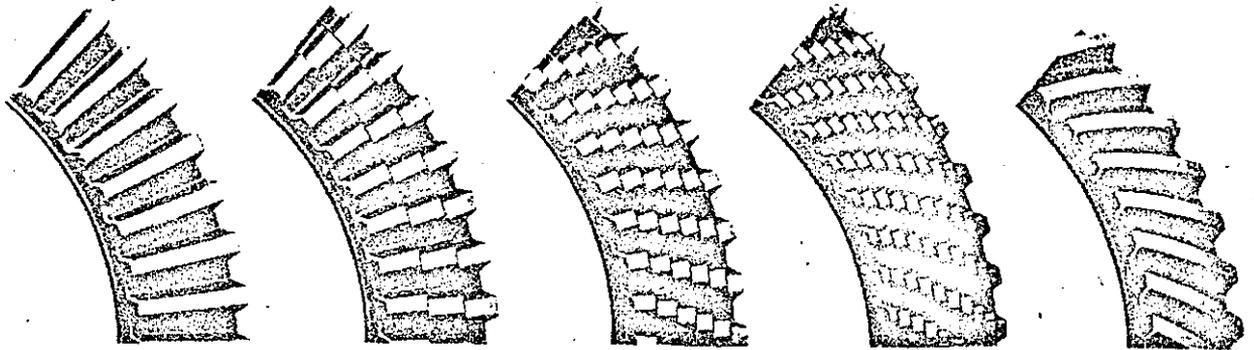
Generalidades:

Las ruedas cónicas de dientes espirales son el equivalente de las ruedas cilíndricas helicoidales ya estudiadas.

En estas dentaduras, la línea directriz del diente, en lugar de ser una generatriz del cono, dibuja sobre él una espiral.



En principio, la forma de esta directriz del diente puede ser cualquiera, ya que cada punto de la rueda se mueve sobre una esfera, y lo que ocurra en esa esfera es independiente de lo que ocurra en las otras concéntricas. En la fig. se observa claramente la formación de una rueda de este tipo, partiendo de una hipotética dentadura escalonada:



En realidad, la forma de esta directriz depende del sistema de fabricación. Así existen en el mercado una serie de dentaduras cónicas espirales, que pasamos a describir brevemente.

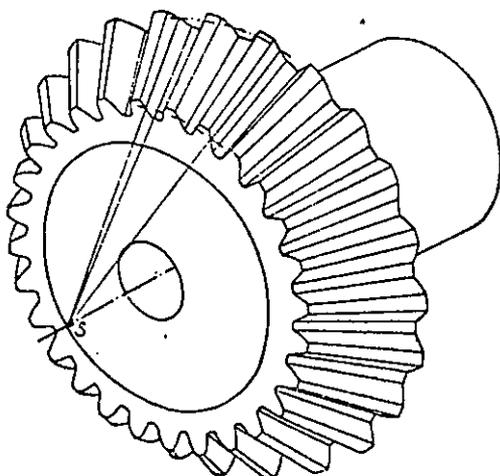
Dentadura helicoidal:

Al igual que las ruedas cónicas de dientes rectos estudiada, la forma del diente se define a partir de las características de la rueda plana correspondiente.

La directriz del diente de esta rueda plana es una recta, pero que no converge hacia el centro del cono, sino que es tangente a un pe-

queño círculo interior.

NOTA: Las mismas máquinas que tallan las dentaduras rectas pueden tallar estas con un simple desplazamiento del portaherramientas, como se vera mas adelante.



Dentadura Gleason:

La directriz del diente de la rueda plana de referencia es una circunferencia. La superficie del diente es un cono de revolución de eje normal al plano primitivo, y cuyo semiángulo es, precisamente, el ángulo de presión.

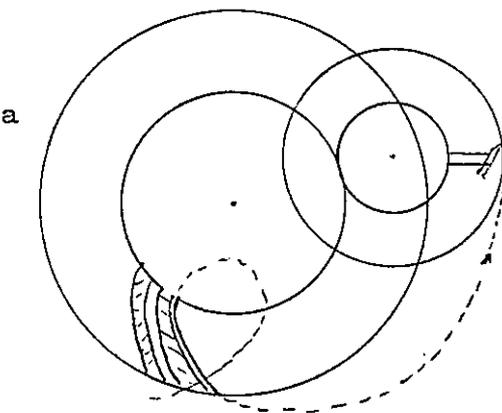
La traza de este cono sobre el plano primitivo sera un arco de círculo, y la proyección del eje del cono es el punto M, en la fig.

Dentadura Oerlikon:

La directriz del diente de la rueda plana es una epicicloide alargada.

Su formación puede verse en la fig.

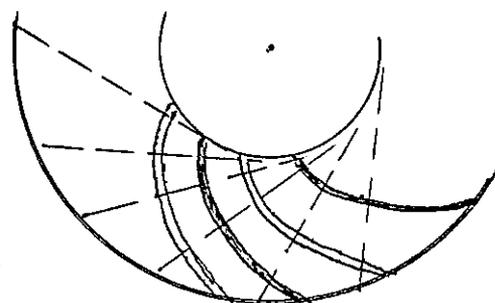
y unas ideas de su tallado se verán en este Tema.



Dentadura Klingelberg:

La directriz del diente de la rueda plana es una evolvente de círculo, cuya base es un pequeño círculo interior. La superficie del diente es aproximadamente un helizoide

desarrollable, de eje normal al plano primitivo. La traza del helizoide con este plano es precisamente la evolvente del círculo base, y el ángulo de presión es el de la generatriz del helizoide. Esta dentadura tiene la ventaja de que el espesor de los dientes es constante, no disminuyendo con su distancia al centro del cono.

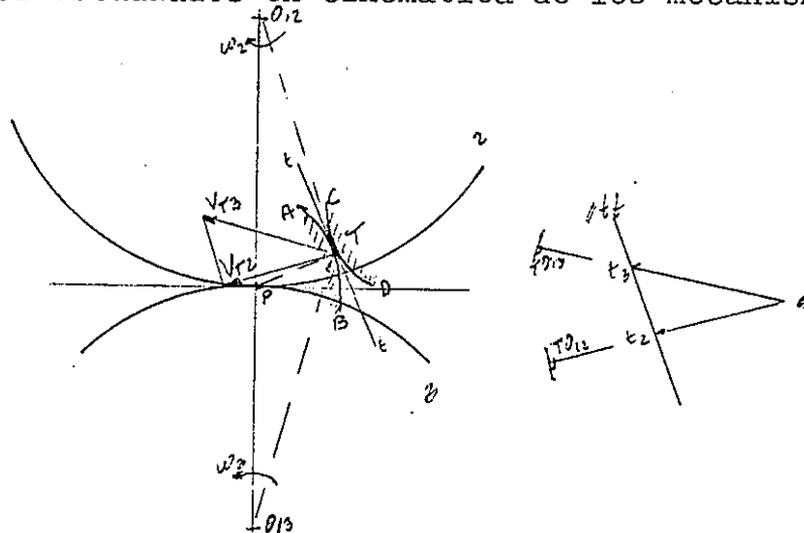


2-1-1.-VELOCIDAD Y ACELERACION EN UN INSTANTE.VEL.DE DESLIZAMIENTO.-

Sean los miembros 2 y 3 de la fig., sobre los cuales se han colocado sendos perfiles conjugados AB y CD, en contacto, en ese instante, en el punto T.

Por ser perfiles conjugados ya sabemos que la relación de velocidades se mantiene constante.

Sin embargo, dada la gran importancia que en el funcionamiento y duración de un engranaje tiene la velocidad relativa de deslizamiento (que es la que, en definitiva, provoca el desgaste de los dientes), vamos a hacer algunas consideraciones sobre la misma, haciendo uso de los conceptos estudiados en cinemática de los mecanismos planos.



Segun sabemos:

$$\vec{V}_{T(2)} = \omega_2 \cdot \overline{O_{12}T}$$

$$\vec{V}_{T(3)} = \vec{V}_{T(2)} + \vec{V}_{T(2-3)} \Rightarrow \vec{V}_{T(2-3)} = \vec{V}_{T(3)} - \vec{V}_{T(2)}$$

$$\vec{V}_{T(3)} = \omega_3 \cdot \overline{O_{13}T}$$

Como por ser perfiles conjugados: $\omega_3/\omega_2 = \overline{O_{12}P}/\overline{O_{13}P} = \text{cte.}$

resulta que al variar $\overline{O_{12}T}$ y $\overline{O_{13}T}$ variará también $\vec{V}_{T(3-2)}$, diferencia vectorial de los vectores $\vec{V}_{T(3)}$ y $\vec{V}_{T(2)}$.

El vector $\vec{V}_{T(3-2)}$ (velocidad de deslizamiento) es un vector paralelo, en todo instante, a la tangente común a los dos perfiles, en el punto de contacto, ó lo que es igual, perpendicular en todo momento a la línea PT, que une el punto de contacto con el punto primitivo P

Como $\vec{V}_{T(3-2)} = \omega_{32} \cdot \overline{PT}$, y $\omega_{32} = \text{cte.}$, resulta que $\vec{V}_{T(3-2)}$ es variable y proporcional, en todo momento, al segmento \overline{PT}

-En realidad, el punto primitivo P no es mas que el c.i.r. del miembro 2, en su movimiento relativo alrededor del miembro 3.. De esta forma:

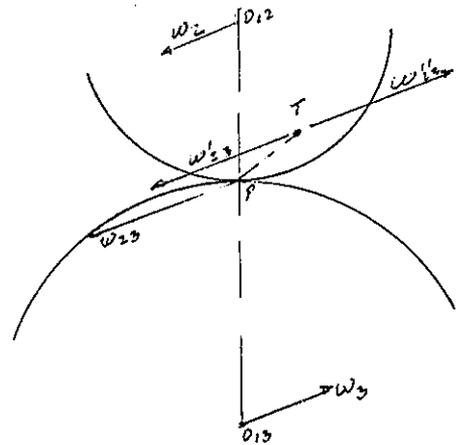
$$w_{23} = V_{T(2-3)} / TP$$

Como es lógico, si w_2 y w_3 son las velocidades angulares de 2 y de 3, y consideramos 3 fijo:

$$w_{23} = w_2 + w_3$$

$$V_{T(2-3)} = TP (w_2 + w_3)$$

Introduciendo en T los dos vectores \vec{w}_{23}^i y $-\vec{w}_{23}^i$, iguales y contrarios, se tiene para la velocidad de T:



a) Una rotación

$$w_{23} = w_2 + w_3$$

b) Una traslación, dada por el par w_{23} $-\vec{w}_{23}^i$

$$V_{23} = w_{23} \cdot TP$$

NOTA: Cuando el contacto entre los dos dientes se efectúa en el punto primitivo P,

$$\vec{V}_{T(2)} = \vec{V}_{T(3)} \quad \& \quad \overline{TP} = 0$$

y por consiguiente,

$$\vec{V}_{T(3-2)} = 0$$

2-1-2.-VELOCIDAD EN INSTANTES SUCESIVOS.ECUACION DE LA VELOCIDAD.-

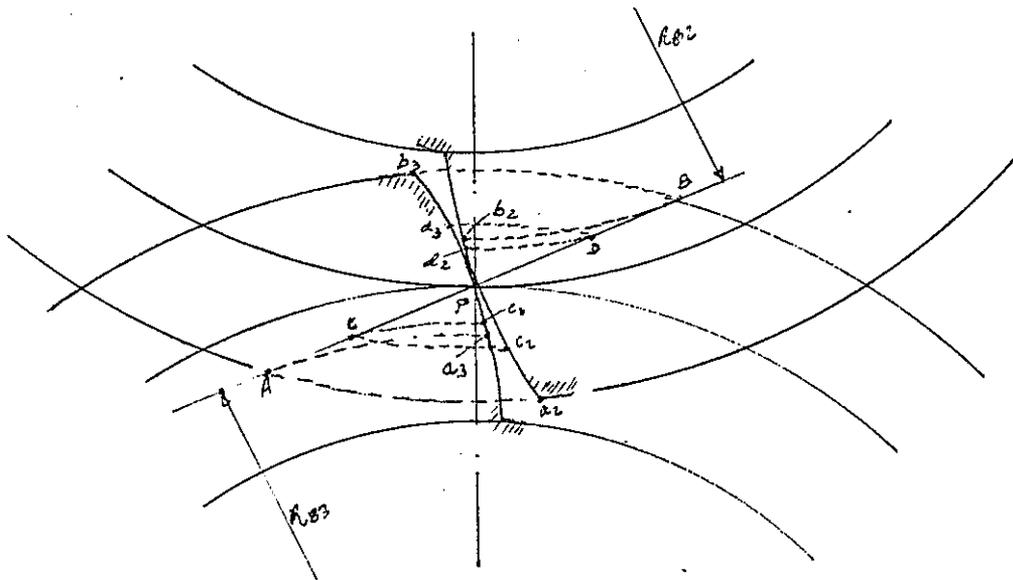
Como sabemos,entre perfiles conjugados se verifica siempre

$$w_2/w_3 = \overline{O_{13}P}/\overline{O_{12}P}$$

que es la ecuación de la velocidad en estos mecanismos.

-En cuanto a la velocidad relativa ó de deslizamiento,vista en el punto anterior para un instante cualquiera,hemos de hacer algunas consideraciones sobre su evolución de un instante a otro.

Para ello fijemonos en el engranaje de la fig.,construidos en este caso de perfiles de evolvente,aunque puede hacerse extensivo a cualquier par de perfiles conjugados.



Como sabemos,sobre la línea AB estarán los sucesivos puntos de contacto entre los dos perfiles conjugados. En el punto A están en contacto los puntos a_2 y a_3 , y en el punto C los c_2 y c_3 , obtenidos trazando sendos arcos desde O_{12} y O_{13} .

En el punto B están en contacto b_2 y b_3 y, finalmente, en el punto D están en contacto d_2 y d_3 (lo mismo se podría decir de todos los infinitos puntos de los dos perfiles)

-En consecuencia,mientras los dientes están en contacto entre A y C, las superficies de ambos dientes, en contacto, habrán sido $\widehat{a_2c_2}$ y $\widehat{a_3c_3}$. Como se aprecia claramente en la fig., $\widehat{a_2c_2} > \widehat{a_3c_3}$

De igual modo, $\widehat{b_2d_2} < \widehat{b_3d_3}$

-El deslizamiento relativo será, en cada caso,

$$\widehat{a_2c_2} - \widehat{a_3c_3} \quad \text{y} \quad \widehat{b_2d_2} - \widehat{b_3d_3}$$

-Si la misma construcción la efectuamos sobre intervalos cada vez más pequeños, veríamos lo siguiente:

- a) No hay deslizamiento en el punto primitivo.
- b) El deslizamiento aumenta a medida que el contacto se aleja del punto primitivo (a medida que aumenta TP)
- c) El sentido del deslizamiento cambia de signo al pasar el contacto de uno a otro lado del punto primitivo.

-Por último, puede resultar útil conocer el concepto de "deslizamiento específico", definido sobre cada miembro por: (en el intervalo AC)

$$\text{sobre 2 : } (\widehat{a_2c_2} - \widehat{a_3c_3}) / \widehat{a_3c_3}$$

$$\text{sobre 3 : } (\widehat{a_2c_2} - \widehat{a_3c_3}) / \widehat{a_2c_2}$$

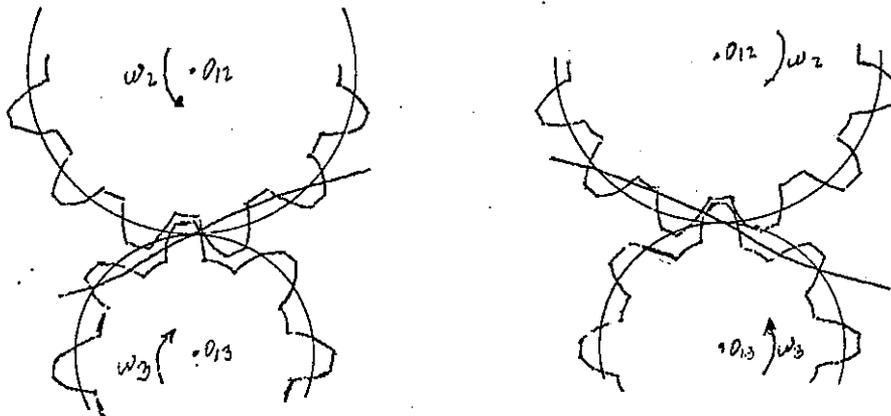
Para una mejor marcha del engranaje, evitar desgastes, etc, el valor del deslizamiento específico debe ser lo más pequeño posible.

2-1-3.-CONTINUIDAD DEL ENGRANE.SUS CARACTERISTICAS.-

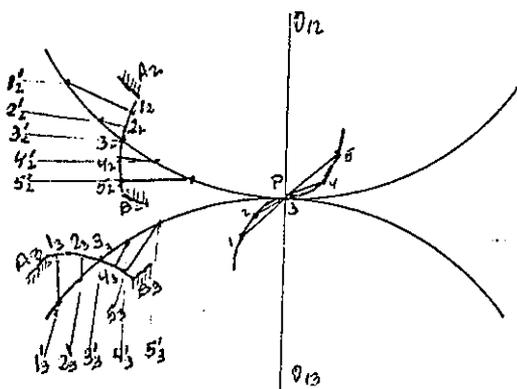
Línea de engrane:

En el movimiento de las ruedas dentadas de un engranaje, llamamos línea de engrane al lugar geométrico de los sucesivos puntos de contacto entre los dientes.

En las figuras se han representado las dos líneas de engrane simétricas, para el movimiento idéntico en ambos sentidos, de dos ruedas dentadas.



Desde luego, la forma de la línea de engrane depende de la forma del perfil de los dientes. Gráficamente puede dibujarse esta línea siguiendo el procedimiento que exponemos:



do el procedimiento que exponemos:

(Partiendo de dos perfiles conjugados A_2B_2 y A_3B_3)

- 1º. Escojemos sobre el perfil A_2B_2 una serie de puntos $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, \dots$
- 2º. Por cada uno de esos puntos trazamos la normal al perfil, obteniéndose los segmentos: $1_1', 1_2, 1_2', 1_3, 1_3', \dots$

3º. Por ser perfiles conjugados sabemos que cuando 1_2 y 1_3 estén tocándose, $1_2'$ y $1_3'$ estarán en P. Por tanto, haciendo girar el miembro 2 (todo lo que sigue se puede también aplicar al miembro 3) hasta que $1_2', 1_3', 1_4', \dots$ coincidan con P, tendremos los puntos $1, 2, 3, 4, \dots$

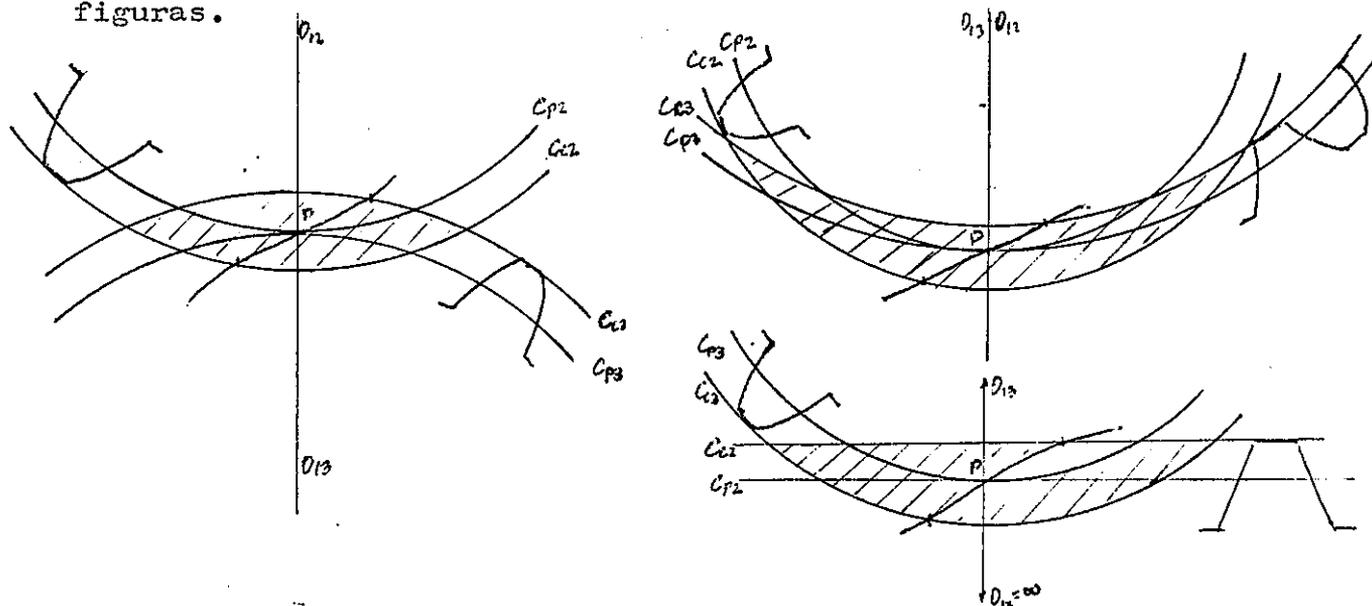
4º. La línea que une estos puntos $1, 2, 3, 4, \dots$ es la línea de engrane

NOTA: Como se ve, la línea de engrane puede tener cualquier forma, sin necesidad de tener que ser simétrica.

Zona y segmento de engrane:

Naturalmente que la línea de engrane no tendrá una longitud infinita, pues los dientes entran en contacto en un punto determinado y lo dejan en otro, también fijado. La distancia entre esos dos puntos, medida sobre la línea de engrane, se denomina "segmento de engrane".

Como es lógico, los dientes empiezan a tocarse cuando el extremo de la cabeza de uno de ellos (el miembro conductor) toca a un punto del otro (en el miembro conducido). Por tanto, el segmento de engrane queda definido por las circunferencias de cabeza, como se vé en las figuras.



Las áreas rayadas de las figuras constituyen las denominadas "zonas de engrane".

El segmento de la línea de engrane situado dentro de la "zona de engrane" es el "segmento de engrane".

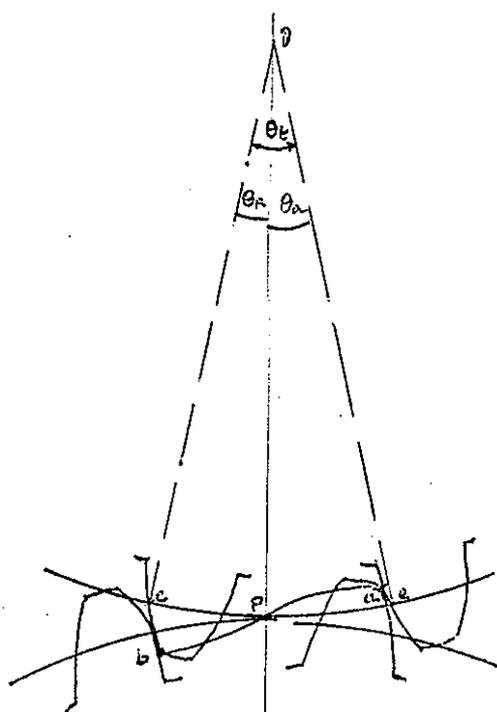
Su longitud puede medirse sobre el mismo dibujo, efectuado a escala.

Zona activa del flanco:

El contacto de un diente con su conjugado empieza siempre en su cabeza, pero termina en un punto de su flanco cuya posición exacta no depende de la propia rueda, sino del círculo de cabeza de la rueda engranada, así como de la forma de la línea de engrane.

La zona de un diente que entra en contacto con otro se llama "zona activa del flanco".

Arco de acceso, receso y conduccion:



En la figura se muestra la posición de dos dientes al inicio y al final del contacto, En ella, llamaremos: (sobre las circunf. primitivas)

θ_t = ángulo de acción (total) ó de conducción

θ_a = ángulo de acceso

θ_r = ángulo de receso

ePc = arco de acción ó de conducción

eP = arco de acceso

Pc = arco de receso

aPb = segmento de engrane, ó trayectoria de contacto.

aP = trayectoria de acceso

Pb = trayectoria de receso

Como es lógico, las trayectorias y arcos de acceso y receso son iguales, respectivamente, para las dos ruedas del engranaje.

Sin embargo, los ángulos θ_t , θ_a y θ_r no lo serán, si nó son iguales los radios primitivos de las ruedas.

Razon de contacto ó coeficiente de recubrimiento:

Para que el engrane de dos ruedas se realice con continuidad es necesario que una pareja de dientes empiece a engranar antes de que terminen de hacerlo la pareja anterior.

Para ello es necesario que, como mínimo, el arco de acción sea igual al paso circunferencial.

Definiremos la razón de contacto para un engranaje cualquiera por:

$$\epsilon = \widehat{ePc} / p_c$$

como es lógico, ϵ debe ser mayor que la unidad, estando comprendido generalmente entre 1,1 y 1,4

Observaciones sobre la continuidad del engrane:

Aunque más adelante se estudien con todo detalle los problemas relativos a la continuidad del engrane (que afectan también a los procesos de fabricación de las ruedas dentadas) ,tanto en engranajes normalizados como si nó,no esta demas ahora hacer una serie de puntualizaciones para que por lo menos tengamos idea de los problemas que existen sobre el particular,y que serán analizados con todo detalle en los puntos siguientes.

-De lo dicho hasta ahora se desprende que si $\epsilon < 1$, cuando dos dientes dejen de estar en contacto, aun no estar an los dos siguientes tocandose. Esto es lo que llamaremos "contacto intermitente".

-También se comprende de lo dicho que en una transmisión por engranajes es conveniente tener un segmento de engrane tan largo como sea posible. Un segmento largo hace que mas pares de dientes esten en contacto simultaneamente, distribuyendose mejor la carga sobre los mismos, en vez de actuar sobre un solo par.

Naturalmente, un segmento de engrane largo requerirá dientes de altura de cabeza grande, y esto puede originar problemas adicionales, como:

- 1º Que los perfiles conjugados se junten demasiado en la cabeza, haciendo un diente puntiagudo, y por tanta, débil.
- 2º Que la excesiva altura del diente haga que parte de él entre en contacto con el otro diente fuera de la línea de engrane, produciendose el fenomeno de "interferencia".

2-2-1-1.-ECUACION DE LA VELOCIDAD+RELACION DE TRANSMISION.-

En estos engranajes, en una sección normal cualquiera, se verificará siempre:

$$w_2/w_3 = \overline{O_{13}P}/\overline{O_{12}P} = R_{P(3)}/R_{P(2)}$$

es decir, la relación de transmisión es la misma que la existente entre las circunferencias axoides.

Igualmente, también se puede escribir:

$$w_2/w_3 = z_3/z_2$$

es decir, la relación de transmisión es igual a la inversa de la razón de dientes.

NOTA: Obsérvese que la relación z_3/z_2 es una magnitud constante, independiente del valor de los radios primitivos. Si se separan los ejes de las ruedas del engranaje, los diámetros de las circunferencias axoides (primitivas) aumentan, pero siguen conservando la misma relación anterior.

En estos engranajes, al igual que vimos en los puntos 2-1-1 y 2-1-2, el movimiento relativo de un diente sobre el otro se compone de una rotación y una traslación instantáneas, de valor:

$$w_{23} = w_2 + w_3$$

$$V_{23} = w_{23} \cdot TP$$

Como sabemos, la velocidad de deslizamiento varía de un instante a otro, sobre un par de dientes considerados en una sección normal cualquiera, pero es idéntica en las diferentes secciones de la rueda, para los mismos instantes del movimiento.

En estos engranajes el contacto entre dientes se establece bruscamente, a lo largo de toda la generatriz, y justo cuando la velocidad relativa tiene el mayor valor.

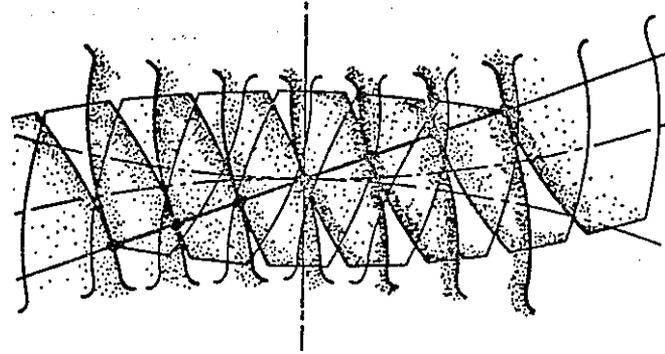
2-2-1-2-CONTINUIDAD DEL ENGRANE: CARACTERISTICAS.-

Línea y segmento de engrane:

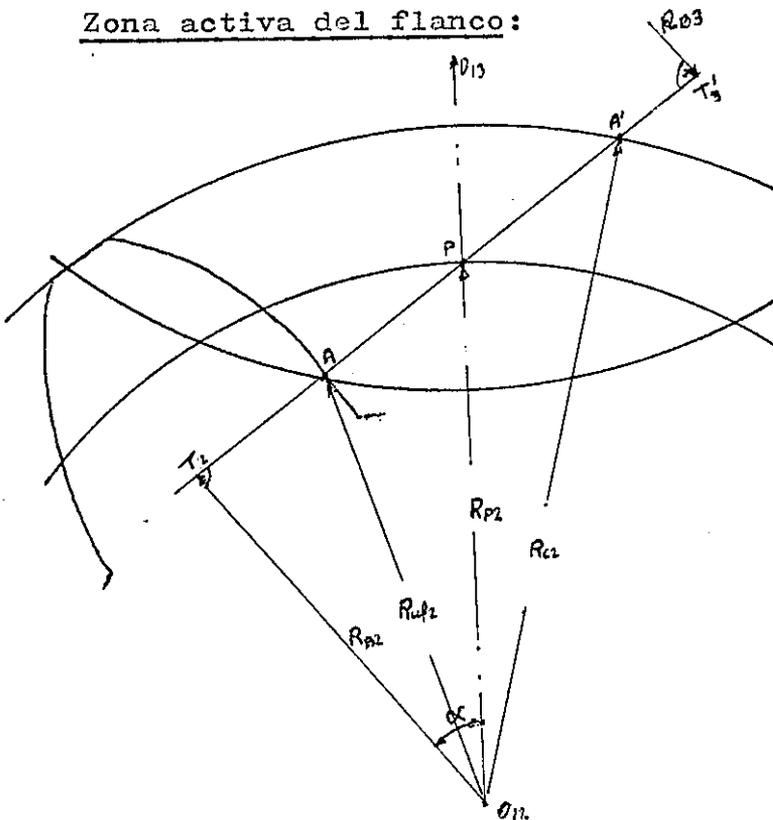
Como se sabe, en los perfiles conjugados de evolvente la línea de engrane (hilo tensor) es una línea recta, cuya inclinación respecto de la normal a la línea de centros es el ángulo de presión ó empuje α . El segmento de engrane es la intersección de esta línea con la circunferencia de cabeza de ambas ruedas.

Se sabe, además, que el ángulo α , que mide la inclinación de la línea de engrane, varía al variar la distancia entre ejes. En consecuencia, al aumentar la distancia entre ejes de dos ruedas, se disminuye la longitud del segmento de engrane.

En la figura, donde se representan las diferentes posiciones del engrane de dos ruedas dentadas, puede apreciarse todo lo dicho.



Zona activa del flanco:



Según anteriormente se definió la zona activa, la longitud de esta depende de la circunferencia de cabeza de la rueda que engrana con ella. Dada la intercambiabilidad de las ruedas dentadas de perfil de evolvente, es necesario, al tallar estas, prever una zona activa mayor que la que luego se va a emplear. De aquí que resulte muy útil, para un engranaje dado, conocer el límite de la zona activa de

cada rueda. (En definitiva, hemos de calcular el radio util de fondo R_{uf})

En la figura se tiene, en el triangulo $\widehat{O_{12}TA}$:

$$R_{uf(2)} = \sqrt{R_{B(2)}^2 + (R_{B(2)} \cdot \text{tag } \alpha - PA)^2}$$

El valor de PA depende de las dimensiones de la rueda 3.

En efecto,

$$\overline{PA} = \overline{T_3'A} - \overline{T_3'P}$$

$$\overline{T_3'A} = \sqrt{R_c(3)^2 - R_B(3)^2}$$

$$\overline{T_3'P} = R_B(3) \cdot \text{tag } \alpha$$

Sustituyendo:

$$R_{uf(2)} = \sqrt{R_{B(2)}^2 + \left[R_{B(2)} \cdot \text{tag } \alpha - \sqrt{R_c(3)^2 - R_B(3)^2} + R_B(3) \cdot \text{tag } \alpha \right]^2}$$

Angulos y arcos de acceso, receso y conducción:

Siendo de aplicación todos los conceptos estudiados anteriormente, vamos a aplicarlos a ruedas de perfil de evolvente, y calcular sus valores:

- Trayectoria de acceso = \overline{aP}

En el triangulo $\widehat{O_{12}Pa}$ se tiene:

$$\overline{O_{12}P} / \text{sen } \beta = \overline{O_{12}a} / \text{sen}(90 + \alpha)$$

$$\text{sen } \beta = (\overline{O_{12}P} / \overline{O_{12}a}) \cdot \text{cos } \alpha$$

$$\beta = \text{arcsen } \beta$$

$$\text{tambi\u00e9n } \overline{aP} / \text{sen } \gamma = \overline{O_{12}P} / \text{sen } \beta$$

$$\gamma = 180 - (90 + \alpha) - \beta$$

sustituyendo y despejando:

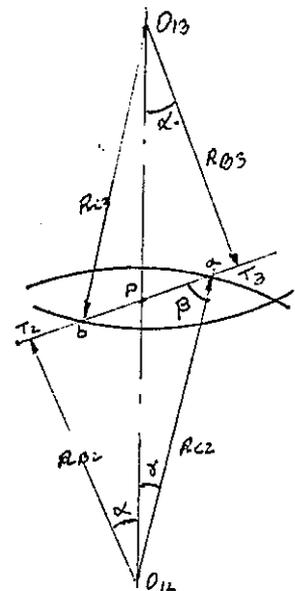
$$\overline{aP} = \frac{\overline{O_{12}P} \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen } \beta} = \frac{\overline{O_{12}P} \cdot \text{sen} [180 - (90 + \alpha) - \beta]}{\text{sen } \beta}$$

- Trayectoria de receso = \overline{Pb} . Se calcula en la misma forma.

- Trayectoria de acci\u00f3n = segmento de engrane = $\overline{ab} = \overline{aP} + \overline{Pb}$

- Tambi\u00e9n es f\u00e1cil de demostrar que existe una relaci\u00f3n sencilla entre las trayectorias de acceso, receso y acci\u00f3n, y las correspondientes longitudes de los arcos, siendo:

$$\frac{\text{trayec. acceso}}{\text{long. arco acceso}} = \frac{\text{trayec. receso}}{\text{long. arco receso}} = \frac{\text{segmento engrane}}{\text{long. arco accion}} = \text{cos } \alpha$$



En la figura se tiene:

$$\overline{eP} = \overline{O_{13}P} \cdot \beta \Rightarrow \beta = \overline{eP} / \overline{O_{13}P}$$

$$\overline{Pa} = \overline{a'P'} = \overline{O_{13}P'} \cdot \beta \Rightarrow \beta = \overline{a'P'} / \overline{O_{13}P'}$$

$$\overline{eP} / \overline{O_{13}P} = \overline{a'P'} / \overline{O_{13}P'}$$

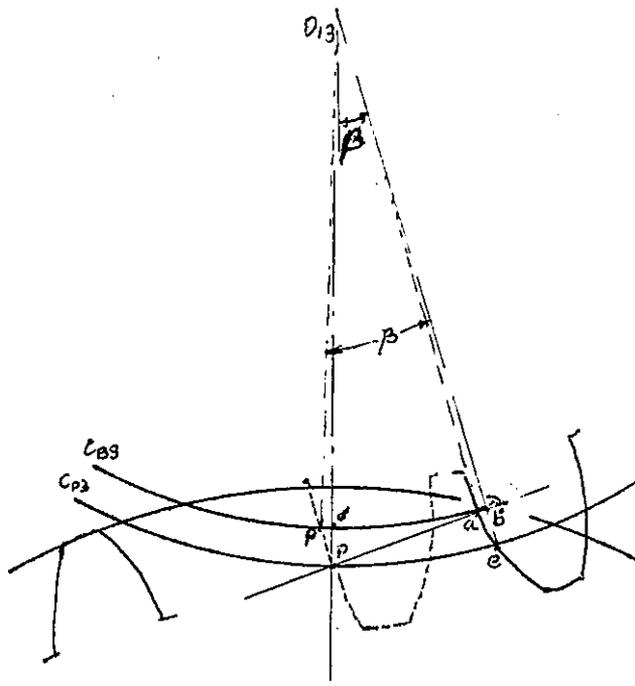
que también se puede escribir:

$$\overline{O_{13}P'} / \overline{O_{13}P} = \overline{a'P'} / \overline{eP} = \overline{Pa} / \overline{eP}$$

$$R_B(3) / R_P(3) = \frac{\text{trayec. acceso}}{\text{arco. acceso}}$$

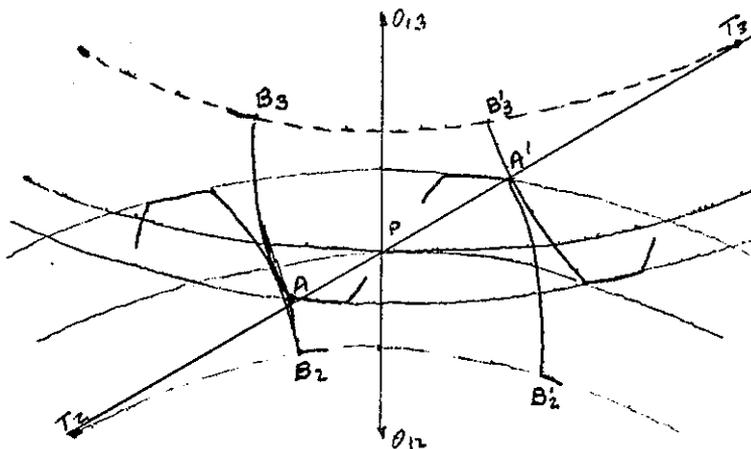
como $R_B(3) / R_P(3) = \cos \alpha$, queda

$$\frac{\text{arco acceso}}{\text{trayec. acceso}} = 1 / \cos \alpha$$



Igualmente podría demostrarse para los otros valores.

Razon de contacto ó coeficiente de recubrimiento:



Debido a que en todo momento la tangente a los perfiles en contacto es normal a la línea de engrane, y que en la curva evolvente la distancia entre dos perfiles medida sobre la normal común es la misma con independencia del punto escogido,

podemos decir que $\overline{B_2B'_2} = \overline{B_3B'_3} = \overline{AA'}$

siendo $\overline{AA'}$ el segmento de engrane y $\overline{B_2B'_2} = \overline{B_3B'_3}$ los arcos de conducción medidos sobre la circunferencias base (Iguales, por definición de evolvente)

Para que cuando una pareja de dientes dejen el contacto ya haya otra tocandose, es necesario, en esta dentadura, que el "arco de conducción sobre la circunferencia base sea mayor que el paso base".

Llamaremos coeficiente de recubrimiento en estos engranajes, a la relación:

$$\epsilon = \frac{\overline{AA'}}{P_B} = \frac{\overline{PA'}}{P_B} + \frac{\overline{AP}}{P_B} = \epsilon_2 + \epsilon_3$$

El coeficiente de recubrimiento total puede considerarse la suma de dos coeficientes parciales ε_2 y ε_3 . El primero solo depende de la longitud del segmento $\overline{PA'}$, el cual a su vez, solo depende de la geometría de la rueda 2. En cambio, ε_3 depende solo de la geometría de la rueda 3.

En la figura se tiene:

$$\overline{PA'} = \overline{TA'} - \overline{TP}$$

$$\overline{PA'} = \sqrt{R_C(2)^2 - R_B(2)^2} - R_B(2) \cdot \text{tag} \alpha$$

como $\varepsilon_2 = \overline{PA'} / p_B$, queda:

$$\varepsilon_2 = \frac{R_B(2)}{p_B} \left[\sqrt{\left(\frac{R_C(2)}{R_B(2)} \right)^2 - 1} - \text{tag} \alpha \right]$$

como $z_2 = 2 \cdot \kappa \cdot R_B(2) / p_B$

tenemos finalmente:

$$\varepsilon_2 = z_2 \cdot \frac{1}{2\kappa} \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{R_C(2)}{R_B(2)} \right)^2 - 1} - \text{tag} \alpha \right] = z_2 \cdot Q_2 \left(\frac{R_C(2)}{R_B(2)}, \kappa \right)$$

siendo Q_2 una "función de recubrimiento" de la rueda 2 que vale:

$$Q_2 = \frac{1}{2\kappa} \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{R_C(2)}{R_B(2)} \right)^2 - 1} - \text{tag} \alpha \right]$$

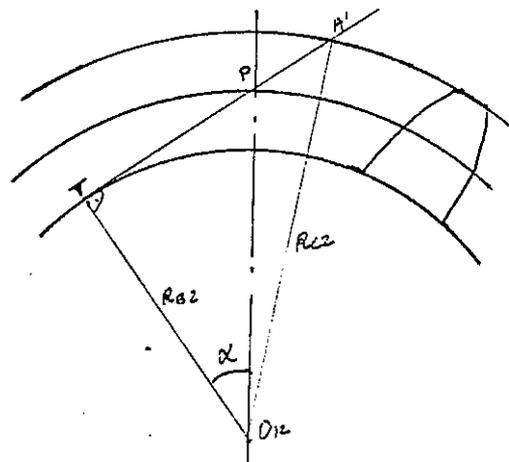
El mismo razonamiento puede aplicarse a la rueda 3, tenemos en definitiva:

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = z_2 \cdot Q_2 + z_3 \cdot Q_3$$

Como se desprende de las formulas anteriores, el coeficiente de recubrimiento en un engranaje dado depende de los números de dientes, del radio de cabeza y del ángulo de presión empleado. Por ello, el coeficiente de recubrimiento variará al separar los ejes de las ruedas.

NOTA: El coeficiente de recubrimiento puede calcularse midiendo, a partir de un dibujo cuidadoso, los segmentos $\overline{AA'}$ y dividiéndolo por el paso base p_B .

NOTA: Observese que conocida ε_2 , es fácil hallar el valor de la longitud de la trayectoria de acceso $\overline{PA} = p_B \cdot \varepsilon_2$



2-2-1-3.-OBSERVACIONES SOBRE LA CONTINUIDAD DEL ENGRANE.-

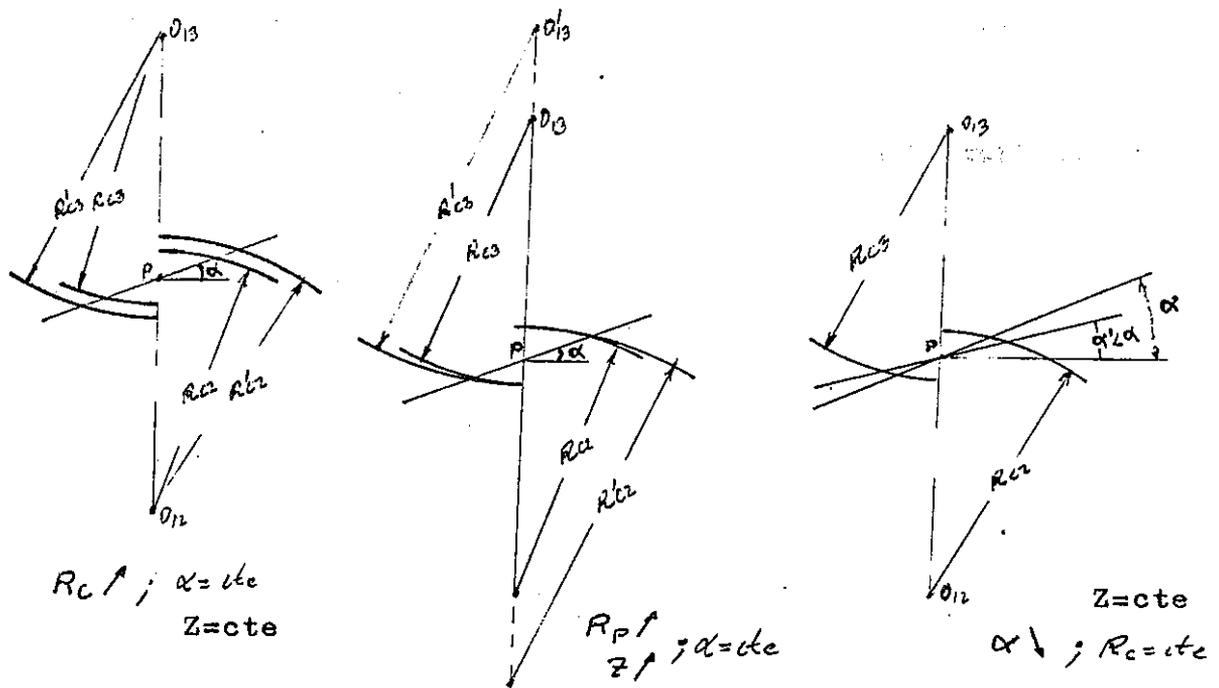
Contacto intermitente:

Como ya se dijo, cuando la longitud del segmento de engrane es menor que el paso base, se producirá la pérdida de contacto entre los dientes, ó contacto intermitente,

Para evitarlo podemos recurrir a aumentar la longitud de la línea de engrane, ó sea, a aumentar el coeficiente de recubrimiento.

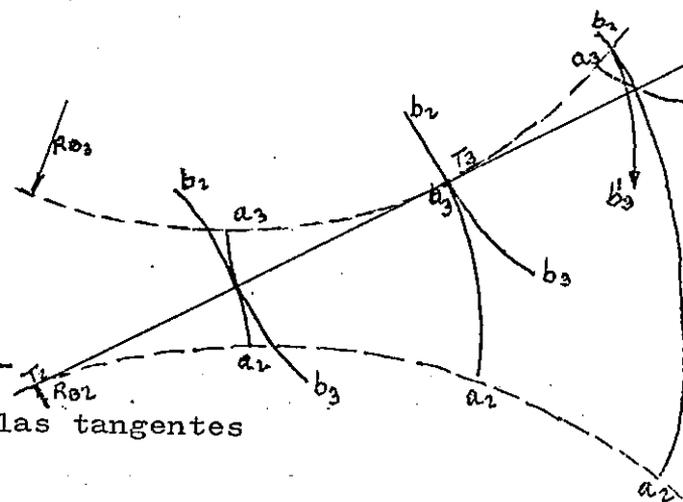
Para ello, según vimos en el punto anterior, ξ aumentará al aumentar el radio de la circunferencia de cabeza R_C (Conservando cte. la distancia entre ejes, ó sea, α), ó al disminuir el ángulo α (acercando los ejes de las ruedas, caso de que pudiera hacerse sin modificar R_C), ó aumentando los radios primitivos (los números de dientes)

En las figuras se observa lo dicho, en forma gráfica



Interferencia:

En la figura se han representado dos evolventes ilimitadas que engranan entre sí, trazadas a partir de las circunferencias base $R_{B(2)}$ y $R_{B(3)}$. $\overline{T_1 T_2}$ es el trozo de línea de engrane comprendido entre las tangentes



las tangentes a las dos circunferencias base.

Como se vé, mientras las evolventes se toquen entre T_3 y T_2 , engranaran correctamente. En el punto T_3 , la rama $\widehat{a_2b_2}$ engrana exactamente en el pié de la rama $\widehat{a_3b_3}$. Más allá de T_3 , la evolvente $\widehat{a_2b_2}$ engranaría con la evolvente $\widehat{a_3b_3'}$, pero nó con la $\widehat{a_3b_3}$ correspondiente, a la cual corta, como se vé en la fig., produciéndose el fenómeno de interferencia.

De esto se deduce que el engrane de dos evolventes nunca puede superar los límites comprendidos entre los puntos de la línea de engrane tangentes a las circunferencias base. Si la circunferencia de cabeza de una rueda tiene un diámetro mayor que este límite se producirá la interferencia, y el movimiento quedará bloqueado.

-El valor máximo del radio de cabeza de una rueda que engrana con otra dada, para que nó se produzca el fenómeno de interferencia, se calcula facilmente, como se vé en la fig. (Observese que este radio no tiene nada que ver con el "límite de apuntamiento, visto en el punto 1-2-2-2)

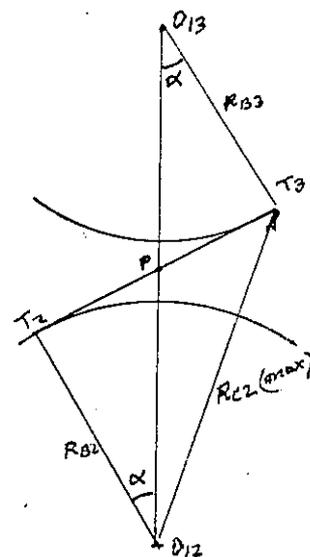
$$\overline{T_3T_2} = (R_{B(2)} + R_{B(3)}) \operatorname{tag} \alpha$$

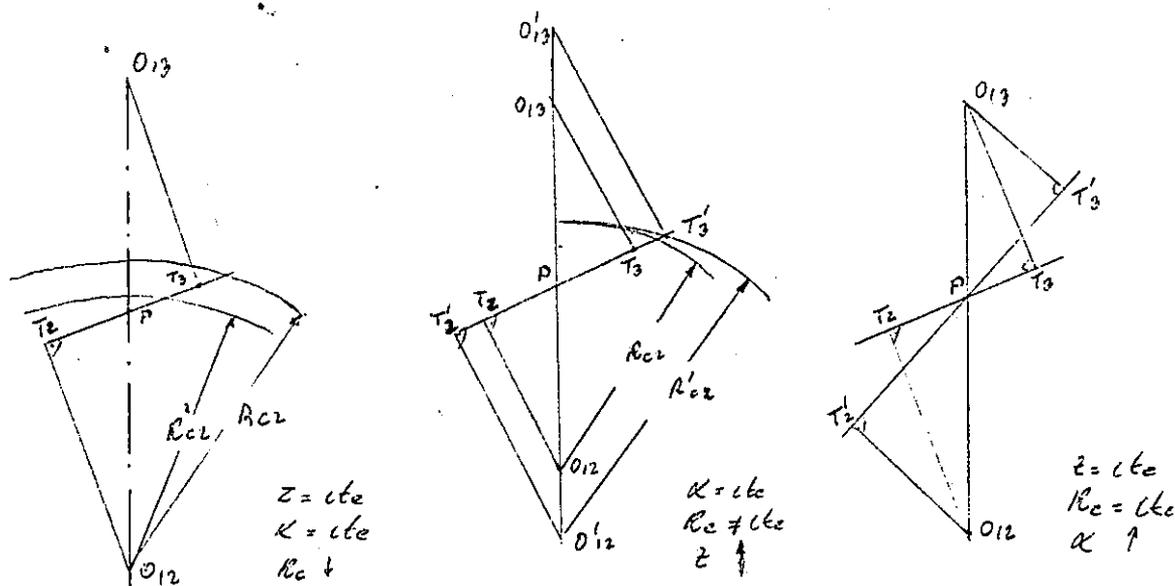
$$R_{C(2)\max} = \sqrt{R_{B(2)}^2 + (R_{B(2)} + R_{B(3)})^2 \cdot \operatorname{tag}^2 \alpha}$$

poniendo los radios base en función de "p" y "z", quedaría:

$$R_{C(2)\max} = R_{B(2)} \sqrt{1 + \left(\frac{R_{B(1)} + R_{B(2)}}{R_{B(2)}} \right)^2 \operatorname{tag}^2 \alpha} = \frac{P_B}{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{z_2 + z_3}{z_2} \right)^2 \operatorname{tag}^2 \alpha}$$

En esta expresión se observa que la posibilidad de interferencia disminuye (ó la posibilidad de aumentar el radio de cabeza) sí se aumenta la distancia entre ejes (aumentando el ángulo α) ó sí se disminuye el radio de la circunferencia de cabeza (dientes cortos), ó sí se aumenta el número de dientes (conservando, por supuesto, la misma relación de transmisión). En definitiva, todos los métodos quedan reflejados en las figuras adjuntas.





NOTA: De todo lo anterior se deduce también una importante relación entre el número de dientes, el ángulo de presión y el coeficiente de recubrimiento de un engranaje. En efecto,

como $z_2/z_3 = R_B(2)/R_B(3)$, queda al sustituir en la expresión anterior:

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{R_C(2)_{\max}}{R_B(2)} = \sqrt{1 + \left(\frac{z_2 + z_3}{z_2}\right)^2 \cdot \tan^2 \alpha}$$

como también $\varepsilon = z_2 \cdot Q_2 + z_3 \cdot Q_3$ siendo

$$Q = \frac{1}{2\kappa} \left[\sqrt{\left(\frac{R_C}{R_B}\right)^2 - 1} - \tan \alpha \right]$$

queda al sustituir y simplificar

$$\varepsilon_{\max} = \frac{z_2 + z_3}{2\kappa} \cdot \tan \alpha$$

$$\varepsilon = z_2 \cdot \frac{1}{2\kappa} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{z_2 + z_3}{z_2}\right)^2 \cdot \tan^2 \alpha} - 1 - \tan \alpha \right] + z_3 \cdot \frac{1}{2\kappa} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{z_2 + z_3}{z_3}\right)^2 \cdot \tan^2 \alpha} - 1 - \tan \alpha \right]$$

$$\varepsilon = z_2 \cdot \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z_2 + z_3}{z_2} \operatorname{tag} \alpha - \operatorname{tag} \alpha \right) + z_3 \cdot \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z_2 + z_3}{z_3} \operatorname{tag} \alpha - \operatorname{tag} \alpha \right)$$

$$\varepsilon = 2 \frac{z_2 + z_3}{2\pi} \operatorname{tag} \alpha - \frac{z_2 + z_3}{2\pi} \operatorname{tag} \alpha$$

$$\varepsilon = \frac{z_2 + z_3}{2\pi} \operatorname{tag} \alpha$$

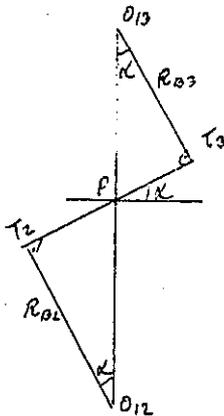
que nos da el valor del máximo coeficiente de cubrimiento, que se puede obtener con dos ruedas de z_2 y z_3 dientes, engranadas con el ángulo α , y con los máximos radios de cabeza posibles para que no ocurra interferencia.

Según esta expresión, dado unos valores de z_2 y z_3 , el coeficiente de recubrimiento puede aumentarse aumentando el ángulo α , y poniendo, en ese caso, el valor de R_{Cmax} correspondiente. (Obsérvese que al aumentar α aumenta, si se aumenta el radio de cabeza, la longitud del segmento de engrane)

NOTA: La expresión anterior también admite otra interpretación:

En efecto,

$$\operatorname{tag} \alpha = \varepsilon_{max} \cdot \frac{2\pi}{z_2 + z_3} \quad (1)$$



Al máximo radio de cabeza, sin interferencia, ocurre cuando las circunferencias de cabeza pasan por los puntos T_3 y T_2 . En estas condiciones,

$$\varepsilon_{max} = \frac{\overline{T_2 T_3}}{P_B}$$

(Obsérvese que el menor valor del segmento de engrane corresponde a cuando ambas circunferencias base son tangentes

en el punto primitivo. En esas condiciones, $\overline{T_2 T_3} = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$).

- Pues bien, para que ε sea mayor que 1, es necesario que $\overline{T_2 T_3} > P_B$, lo cual, para dos ruedas de z_2 y z_3 dientes, implica que α ha de tener un valor superior a uno mínimo.

- En la tabla se muestran una serie de valores de α , mínimos, correspondientes a diferentes valores de ϵ , con la condición de utilizar como segmento de engrane toda la longitud $\overline{T_2T_3}$.

(En la práctica no se utiliza nunca toda la línea $\overline{T_2T_3}$, por lo que los valores de α han de ser sensiblemente mayores).

| Valor de α necesario para obtener una longitud útil (T_1T_2) de la línea de engrane mayor que el paso (p_b) | | | | |
|--|---------------------------------------|-------|-------|-------|
| $z_1 + z_2$ | $\epsilon_{max} = \frac{T_1T_2}{p_b}$ | | | |
| | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 |
| 8 | | | | |
| 10 | 32,1° | | | |
| 12 | 27,6° | | | |
| 14 | 24,2° | 28,3° | | |
| 16 | 21,4° | 25,2° | | |
| 18 | 19,2° | 22,7° | 26,0° | |
| 20 | 17,4° | 20,7° | 23,7° | |
| 24 | 14,7° | 17,4° | 20,1° | 22,7° |
| 30 | 11,8° | 14,1° | 16,3° | 18,5° |
| 40 | 8,9° | 10,7° | 12,4° | 14,1° |
| 100 | 3,6° | 4,3° | 5,0° | 5,7° |
| ∞ | 0° | 0° | 0° | 0° |

- Número mínimo de dientes.-

En estos engranajes existe un límite inferior al número de dientes determinado por la necesidad de un coeficiente de recubrimiento suficiente, combinado con la condición de apuntamiento. En piñones de pocos dientes, el radio de cabeza para conseguir un recubrimiento suficiente tiende a ser muy grande. En este caso habrá que comprobar que no se ha superado el límite de apuntamiento.

-En engranajes de dientes rectos de perfil de evolvente, los límites absolutos se encuentran en piñones de "seis" diente, para engranaje entre ruedas, y en piñones de "cuatro" dientes, para engranaje con cremallera.

-De todo lo dicho se deduce que para una rueda dentada dada, la máxima relación de transmisión que puede lograrse viene fijada por el número de dientes de la rueda más pequeña (o más grande) que puede engranar con ella, sin interferencia.

2-2-1-4.-CASOS ESPECIALES.-

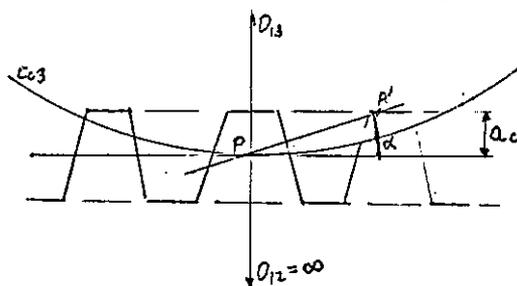
Cremalleras:

El estudio de la continuidad del engrane en engranajes de perfil de evolvente con cremalleras tiene unas particularidades que son muy importantes de resaltar.

-En el caso de rueda-cremallera, el radio base de la cremallera, así como el de cabeza, tienen longitud infinita. Sin embargo, existe un valor límite para la altura de cabeza de la cremallera que engrana con una rueda dada, a_c , que no se puede pasar si no se quiere que aparezca interferencia. En efecto,

en la figura: (abajo)

$$\begin{aligned}\overline{PT}_3 &= R_{P(3)} \cdot \text{sen } \alpha \\ a_{c(2)\text{max}} &= \overline{PT}_3 \cdot \text{sen } \alpha = R_{P(3)} \cdot \text{sen}^2 \alpha \\ a_{c(2)\text{max}} &= R_{P(3)} \cdot \text{sen}^2 \alpha\end{aligned}$$



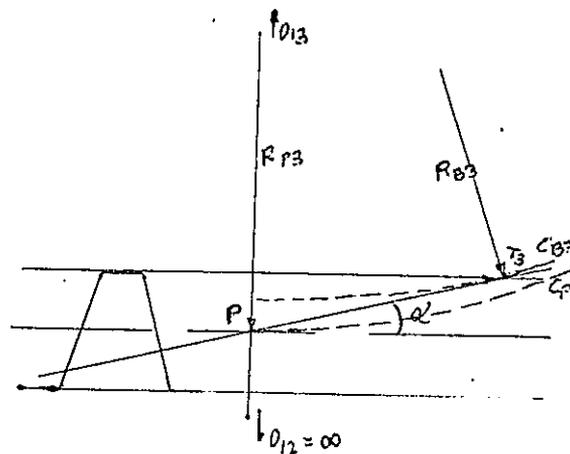
-En cuanto al coeficiente de recubrimiento, se calcularía en la forma ya conocida $\epsilon = \epsilon_2 + \epsilon_3$ (siendo el miembro 2 la cremallera)

ϵ_3 se halla aplicando las formulas conocidas. Sin embargo, al aplicarlas a la cremallera nos encontramos con la expresion ∞/∞ , por lo que no podemos hallar ϵ_2 .

Sin embargo, en la figura se de-

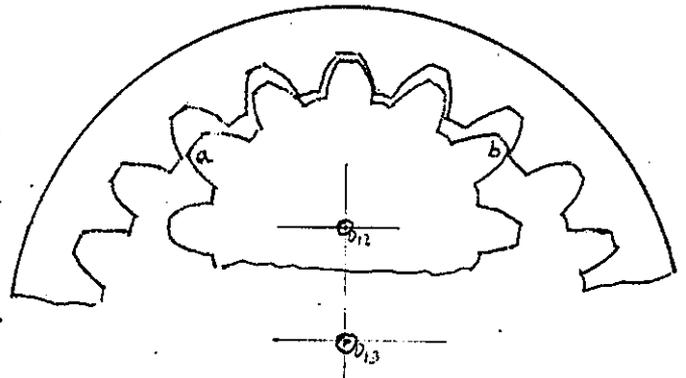
duce facilmente (arriba)

$$\begin{aligned}\overline{PA}' &= a_c / \text{sen } \alpha \\ p_B &= p_c \cdot \text{cos } \alpha \\ \epsilon_2 &= \overline{PA}' / p_B = a_c / p_c \cdot \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha\end{aligned}$$



Ruedas interiores:

Además de ser de aplicación todo lo dicho para ruedas exteriores, en los engranajes de dientes rectos de perfil de evolvente, interiores, hay que tener en cuenta la posibilidad de que aparezca la llamada "interferencia secundaria", que tiene lugar al tropezar las cabezas de los dientes fuera del segmento de engrane, lo cual ocurre solo si los números de dientes son muy próximos entre sí, con lo cual los radios de las distintas circunferencias, en ambas ruedas, son muy parecidos. Debido a ello, en estos engranajes siempre se deja una diferencia entre 8 y 10 dientes en ambas ruedas (para una rueda interior de 60 dientes), procurando alejarse siempre de relaciones de transmisión próximas a la unidad.



En la figura se observa que si se aumenta $R_p(2)$, los dientes pueden tropezar en el punto a y b.

2-2-2-1.-VELOCIDAD EN INSTANTES SUCCESIVOS: EC. DE LA VELOCIDAD.-

Igual que en los engranajes cilindricos de dientes rectos, se verifica, en una seccion cualquiera del mismo:

$$w_2/w_3 = R_B(3)/R_B(2) = R_P(3)/R_P(2) = z_3/z_2$$

-Sin embargo, al estar en estas ruedas los dientes inclinados el ángulo β (β_P ó β_B) los dientes sufren además un deslizamiento relativo (como tales dientes rectos) y un pivotamiento alrededor del punto medio de la generatriz de contacto.

En la fig. se ha representado uno de los cilindros axoides y en él, un punto T de un diente.

Igual que en ruedas de dientes rectos, el movimiento relativo de 3 sobre 2

sera: $\vec{w}_{32} = \vec{w}_2 + \vec{w}_3$
que da lugar a un deslizamiento

$$V_T = w_{32} \cdot TP$$

Sin embargo, al estar la generatriz de contacto inclinada, se tendrá

$$\vec{w}_{32} = \vec{w}'_{32} + \vec{w}''_{32}$$

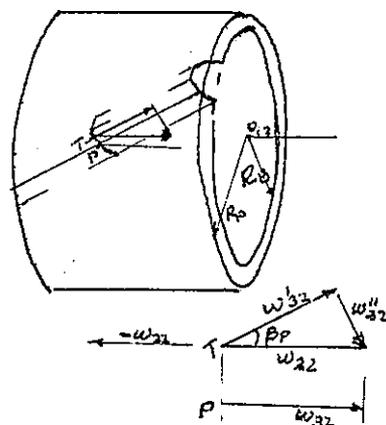
siendo

$$w'_{32} = w_{32} \cdot \cos \beta_P$$

la rodadura alrededor de la generatriz de contacto

$$w''_{32} = w_{32} \cdot \sen \beta_P$$

el pivotamiento alrededor del punto de contacto, en cada instante



-En estas ruedas, además, la velocidad de deslizamiento relativo no es la misma en todas las secciones transversales a los cilindros axoides. El contacto no se establece bruscamente a lo largo de toda una generatriz, sino paulatinamente, como luego veremos.

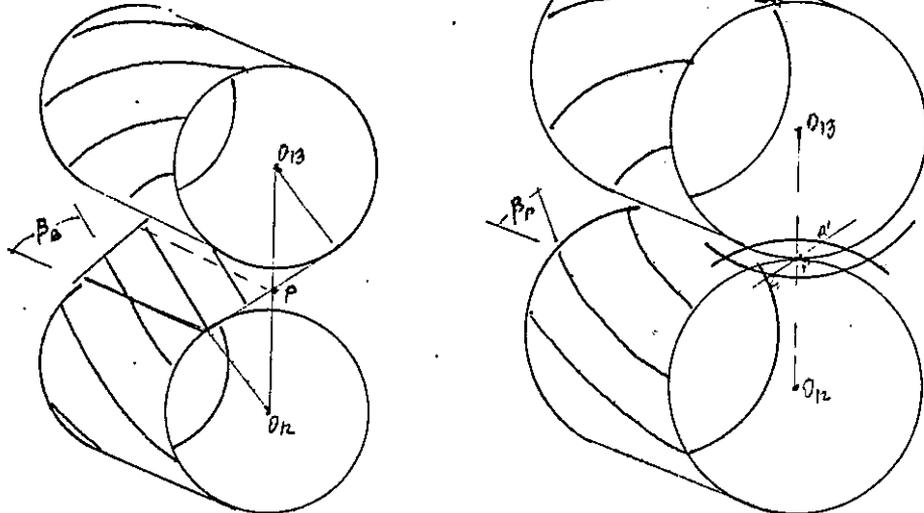
En efecto, debido al "corrimiento" de los perfiles de los dientes en las diferentes secciones transversales, cuando en un plano normal dos dientes entran en contacto, en los otros planos normales el contacto estara más avanzado (ó perdido)

2-2-2-2.-CONTINUIDAD DEL ENGRANE.SUS CARACTERISTICAS.-

Plano de engrane y rectas de contacto:

Se llama plano de engrane al plano tangente a los dos cilindros base. Sobre él, como se vé en la figura, quedan marcadas las "rectas de contacto", con la inclinación β_B .

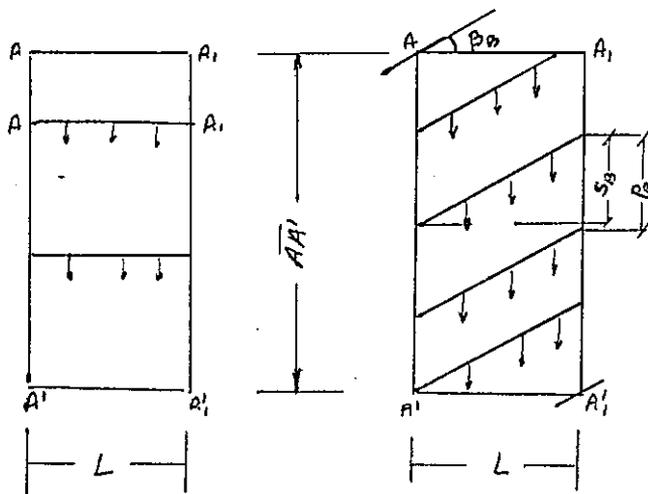
Las sucesivas parejas de dientes se tocan entre sí a lo largo de las sucesivas rectas de contacto.



El segmento de engrane se define igual que para engranajes rectos, sobre un plano perpendicular al eje de los axoides. En la fig. $\overline{AA'}$.

Longitud de la recta de contacto:

En las figuras se ha representado, en planta, los dos planos de engrane correspondientes a una rueda de dientes rectos, y a otra de dientes helizoidales, ámbas de la misma longitud L . $\overline{AA'}$ es la longitud del segmento de engrane, igual en ambas.



En la primera se observa como los dientes entran en contacto en toda su longitud. La línea de contacto $\overline{AA_1}$ avanza paralelamente al eje de los axoides.

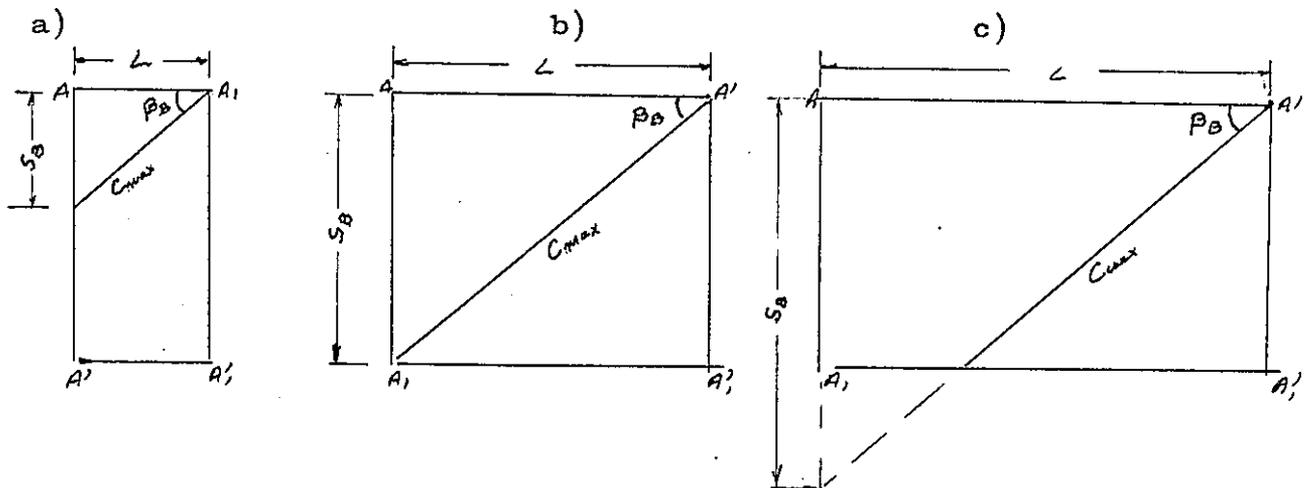
En el dentado inclinado, los dientes entran en contacto en un solo punto A. Luego, a medida que progresa el contacto, aumenta la longi-

tud de la recta de contacto hasta que al pasar por A_1 , los dientes se tocan en toda su longitud. El contacto continua a todo lo largo del diente, hasta que comienza de nuevo a disminuir la longitud de la recta de contacto, dejando los dientes de tocarse en el punto A'_1 .

-Como es lógico, para una longitud L dada, el salto base s_B será mayor ó menor, dependiendo de β_B .

La longitud de la recta de contacto varía entre cero y un valor máximo, valor que depende de la longitud L del diente y del ángulo β_B , ó lo que es igual, del salto s_B .

En estos engranajes pueden darse tres casos, representados en las fig:



a) $s_B < \overline{AA'}$

En este caso, la longitud C de la recta de contacto parte de 0 para llegar al valor máximo $C_{\max} = L/\cos\beta_B$ cuando la rueda ha girado un ángulo equivalente al arco s_B sobre la circunferencia base.

A partir de esta posición se mantiene el valor máximo de C , hasta que, se recorre el arco $\overline{AA'}$. Luego comienza de nuevo a disminuir, hasta anularse.

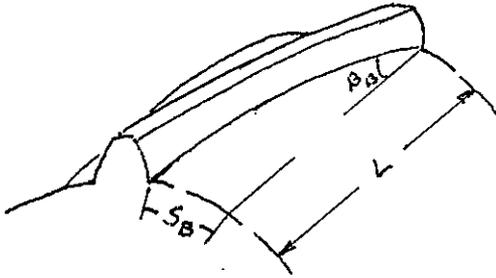
b) $s_B = \overline{AA'}$

$$C_{\max} = L/\cos\beta_B = \overline{AA'}/\sin\beta_B$$

c) $s_B > \overline{AA'}$

$C_{\max} = \overline{AA'}/\sin\beta_B$. Igual que en el caso anterior, la longitud de la recta de contacto no aumenta, aunque se aumente la longitud del diente.

Razon de contacto ó coeficiente de recubrimiento:



La existencia del salto base mejora notablemente el coeficiente de recubrimiento en estos engranajes.

En efecto, cuando un extremo del diente deje de engranar con su correspondiente conjugado (en el plano frontal de las ruedas, por ejemplo) el otro extremo del mismo diente (en el otro plano frontal) todavía tendrá que girar un arco " s_B " para que deje de engranar, de modo que el arco de conducción queda aumentado en un valor igual al del salto., siendo ahora la suma del arco de conducción correspondiente al perfil frontal, más el salto base.

Según esto, tendremos:

$$\varepsilon = \frac{\text{arco total conducción}}{\text{paso}} = \varepsilon_{\text{frontal}} + \frac{s_B}{p_B}$$

NOTA: Observese que si se toma $s_B > p_B$ siempre será mayor que la unidad, por pequeño que sea el coeficiente de recubrimiento correspondiente al perfil frontal.

2-2-2-3.-OBSERVACIONES SOBRE LA CONTINUIDAD DEL ENGRANE.-

Contacto intermitente:

Como se desprende del punto anterior, en estos engranajes es muy fácil evitar el contacto intermitente. Basta con que hagamos $s_B > p_B$, lo cual es siempre posible, por pequeña que sea la altura de cabeza de los dientes.

NOTA: Las posibilidades de estos engranajes se llevan al límite en los engranajes helicoidales de contacto puntual, en los que el coeficiente de recubrimiento frontal es cero, confiándose la continuidad del engrane exclusivamente al salto.

2-2-3-1. RELACION DE TRANSMISION EN LOS ENGRANAJES CILINDRICOS DE DIENTES HELIZOIDALES PARA EJES QUE SE CRUZAN.-

- Como cada diente de una rueda engrana con uno de la otra, se cumplirá:

$$j = \frac{w_3}{w_2} = \frac{z_2}{z_3}$$

Sin embargo, en este tipo de ruedas no que ha de ser igual en ambas es el paso normal P_n , puesto que el paso frontal, al ser los ángulos β_2 y β_3 diferentes, también serán distintos (piénsese que ambas ruedas han de engranar con la misma cremallera, y que en ambas ha de cumplirse:

$$\left. \begin{aligned} P_n(2) &= P_2 \cdot \cos \beta_2 \\ P_n(3) &= P_3 \cdot \cos \beta_3 \end{aligned} \right\} P_n(2) \equiv P_n(3)$$

En consecuencia, la relación de transmisión será:

$$i = \frac{w_3}{w_2} = \frac{z_2}{z_3} = \frac{\frac{2R_2 \cos \beta_2}{P_n(2)}}{\frac{2R_3 \cos \beta_3}{P_n(3)}} = \frac{R_2 \cos \beta_2}{R_3 \cos \beta_3}$$

es decir, la relación de transmisión no es igual a la relación entre los radios primitivos, sino que depende también de los ángulos de inclinación de los dientes.

Esto significa que para un ángulo entre ejes dado, con ruedas del mismo diámetro pueden obtenerse diferentes relaciones de transmisión cambiando la inclinación de los dientes (con lo cual cambiará de paso los números de dientes)

Inversamente, para un ángulo $\hat{\Sigma}$ dado, si se mantienen fijos los números, de dientes (y por tanto la relación de transmisión), al variar la inclinación de los dientes nos vemos obligados a modificar el tamaño (radios) de las ruedas.

- En este tipo de engranaje, aparte del deslizamiento, rodadura y pivotamiento que se produce en forma similar a la vista para el caso de ejes paralelos, hay que superponer el deslizamiento adicional

$$V_d = V_n(2) + V_d(3) = w_2 R_2 \operatorname{sen} \beta_2 + w_3 R_3 \operatorname{sen} \beta_3$$

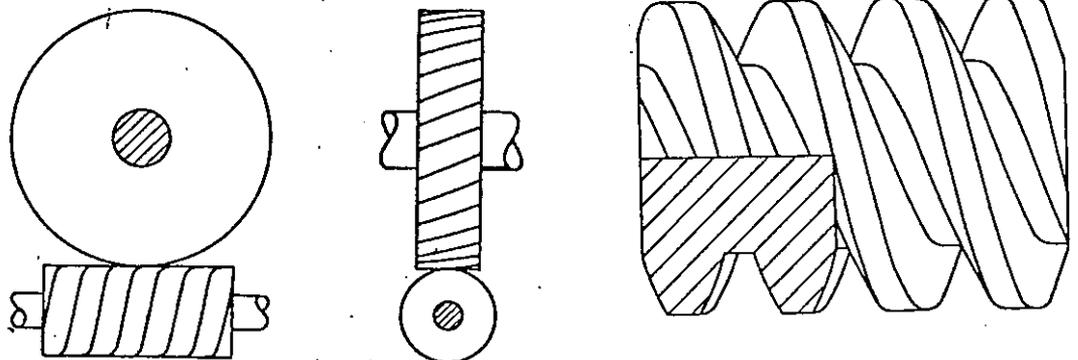
Al contrario que los anteriores (que se van modificando en magnitud a medida que va progresando el engrane entre dos dientes, considerandolo siempre en un plano normal a los ejes-plano frontal-), este deslizamiento V_d es de magnitud constante, y mucho mayor que los anteriores.

NOTA: La elección del ángulo de inclinación mas adecuado para los dientes esta condicionado por la necesidad de reducir al máximo este deslizamiento (que produce fuertes pérdidas por rozamiento).

NOTA: Si en una rueda helicoidal se aumenta la inclinación de los dientes, manteniendo constante el radio, el número de dientes disminuye (para un paso P_n dado, cada vez "cabem" menos dientes.

Quando el ángulo β sea próximo a 90° , se obtiene un "tornillo helicoidal", con uno, dos o tres dientes.

Tal tornillo engrana perfectamente con cualquier otra rueda helicoidal del mismo paso normal, obteniéndose un tipo de engranaje de tornillo sinfin, de contacto puntual.



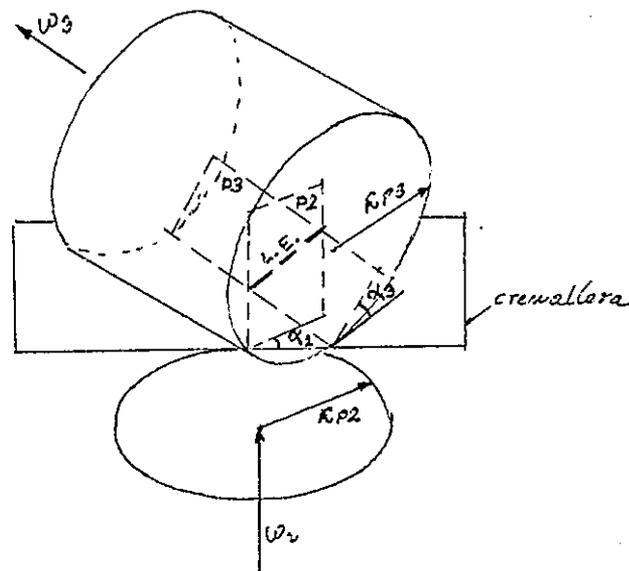
2-2-3-2.-CONTINUIDAD DEL ENGRANE.CARACTERISTICAS.-

- En este engranaje, el punto de contacto entre los dientes de las dos ruedas varia de un instante a otro, describiendo una línea que es la "línea de engrane".

En efecto, si imaginamos el engrane de una de las ruedas con la cremallera, se obtendrá un plano de engrane, el cual está formado por las sucesivas líneas de contacto. Lo mismo ocurre con la otra rueda y la misma cremallera.

En consecuencia, ambas líneas de contacto, diferentes de un instante a otro, se cortan en un punto en cada instante, que es precisamente donde se tocan ambas ruedas.

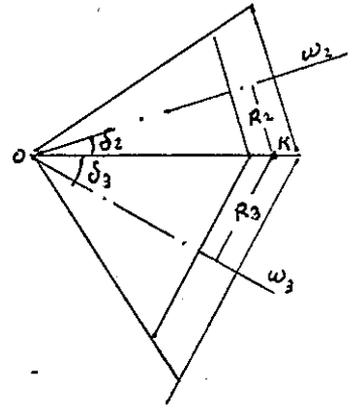
El lugar geométrico de los sucesivos puntos de contacto es la línea de engrane. Esta línea de engrane, por otro lado, no es más que la intersección de los dos planos de engrane de cada una de las ruedas con la cremallera.



2-2-9-1.-VELOCIDAD EN INSTANTES SUCCESIVOS.ECUACION DE LA VELOCIDAD.

Como se desprende del estudio efectuado para ruedas cónicas, la relación entre las velocidades de ambas ruedas es la misma que la relación entre las velocidades de las correspondientes ruedas cilíndricas equivalentes $w_2/w_3 = z_{e3}/z_{e2}$

Como en un par de conos engranados se pueden trazar infinitos pares de ruedas cilíndricas equivalentes, (según los pares de secciones, en ambos conos, que se tomen) también puede escribirse:

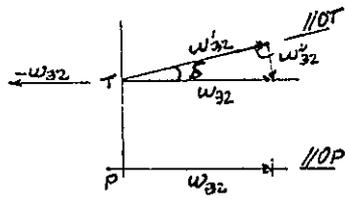
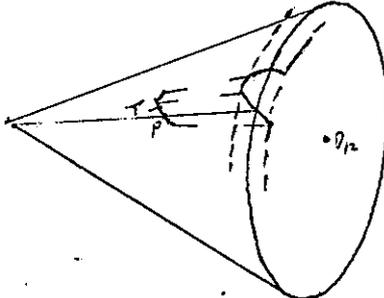


$$w_2/w_3 = R_3/R_2 = OK \cdot \text{sen } \delta_3 / OK \cdot \text{sen } \delta_2 = \text{sen } \delta_3 / \text{sen } \delta_2$$

que nos dice que la relación de transmisión en un par de ruedas cónicas no depende del número de dientes de estas ruedas, sino de la relación entre los ángulos de los conos axoides.

-Lo anterior viene a significar una restricción importante para el funcionamiento correcto de este tipo de ruedas, y es que el ángulo de los conos no puede variarse, si se desea mantener constante la relación de transmisión. (A diferencia de las ruedas cilíndricas, las ruedas cónicas no admiten la separación entre ejes)

-En estas ruedas el movimiento relativo de una sobre otra se compone también de una rotación, una traslación y un pivotamiento



$$\vec{w}_{32} = \vec{w}_2 + \vec{w}_3$$

trasl: $V_T = w_{32} \cdot TP$

rota: $w_{32}' = w_{32} \cdot \cos \delta$

pivot: $w_{32}'' = w_{32} \cdot \text{sen } \delta$

-Por lo demás, en estas ruedas el comportamiento es similar a las de dientes rectos, cilíndricas. Los dientes entran bruscamente en contacto, con la máxima velocidad relativa de deslizamiento (y también de pivotamiento), variando ambas senoidalmente, con el ángulo δ .

2-2-9-2.-CONTINUIDAD DEL ENGRANE.-Para el estudio de la cont., estas se comportan igual que las ruedas cilíndricas de dientes rectos, sin más que sustituir la rueda cónica por la "rueda cilíndrica equivalente"

3-1-1.-TRANSMISION DE FUERZAS EN LOS ENGRANAJES.-

Para el estudio de la transmisión de fuerzas en los engranajes son de aplicación todos los conceptos generales vistos en el "ESTUDIO DINAMICO DE MECANISMOS PLANOS", por lo menos en lo referente al estudio de los esfuerzos en las secciones normales a los ejes de los axoides. (En el caso de engranajes helicoidales y cónicos aparecerán otros esfuerzos en planos no normales a los ejes, que estudiaremos en su momento).

Sin embargo, existen una serie de peculiaridades en el cálculo de los esfuerzos en estos mecanismos que conviene hacer resaltar.

-Sea el mecanismo de la figura, formado por dos ruedas dentadas engranadas, de perfiles conjugados cualquiera.

A la rueda motora 2 se le aplica el par M_2 ; se desea hallar el par M_3 , sobre la rueda conducida 3, y el valor de la fuerza sobre cada diente. (Para mayor comprensión, se han dibujado dos posiciones de contacto, a ambos lados del punto primitivo)

sobre 2 (en A)

Actúan $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{32}, \vec{M}_2$

en equilibrio:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = 0$$

$$M_2 = F_{32} \cdot h_2'$$

Observese que si no hubiera rozamientos, $M_2 = F_{32}^n \cdot h_2$

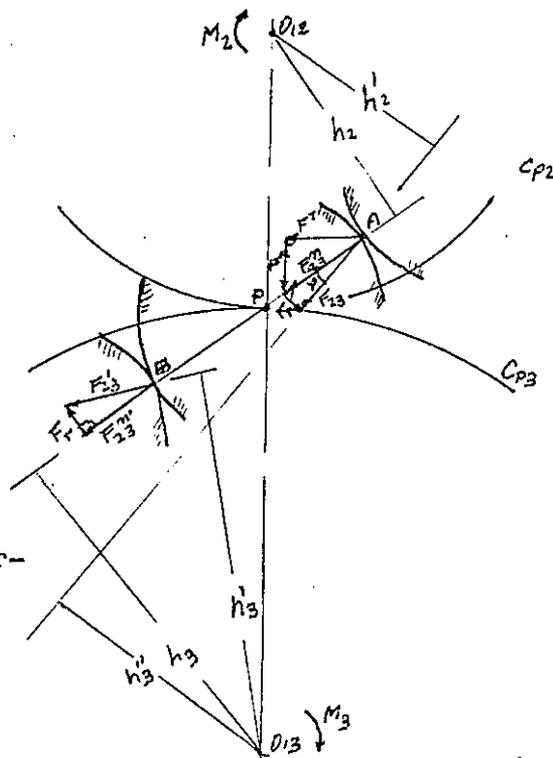
Observese también que el valor de F_r , y su sentido, dependen del valor de F_{32}^n y del sentido de la velocidad relativa, respectivamente. La dirección de F_r es siempre la perpendicular a F_{32}^n .

sobre 2 (en B)

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}' = 0$$

$$M_2 = F_{32}' \cdot h_2'$$

si no hubiera rozamientos: $M_2 = F_{32}^{n'} \cdot h_2$



NOTA: Hemos de observar que \vec{F}_{32}^n , perpendicular a las superficies en contacto, ha de pasar siempre por el punto primitivo P, por propia definición de perfiles conjugados. Sin embargo, su dirección no tiene porque ser siempre la misma (por ejemplo, en los perfiles cicloidales la dirección de \vec{F}_{32}^n varía de un instante a otro), según sea la forma de la línea de engrane. En este caso, tanto el módulo de \vec{F}_{32}^n , como el de \vec{F}_r , y sus direcciones, varían continuamente, conservandose constante el producto $F_{32} \cdot h_2'$, sí $M_2 = \text{cte.}$

sobre 3 (en A)

actúan \vec{F}_{13} , \vec{F}_{23} , \vec{M}_3

en equilibrio:

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0$$

$$M_3 = F_{23} \cdot h_3''$$

si nó hubiera rozamiento

$$M_3 = F_{23}^{n'} \cdot h_3$$

sobre 3 (en B)

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}'_{23} = 0$$

$$M_3 = F'_{23} \cdot h_3$$

si nó hubiera rozamiento

$$M_3 = F_{23}^{n'} \cdot h_3$$

En cualquier caso, tanto si consideramos el rozamiento como si nó, la fuerza \vec{F}_{23} (ó la \vec{F}_{23}^n) podemos descomponerla en una componente según la línea de centros \vec{F}_{23}^R y otra perpendicular a ella F_{23}^T . La primera tenderá a separar ambas ruedas, pero que nó transmitirá momento alguno. La segunda es la que realmente transmite el momento de giro, ya que (punto A) $F_{23} \cdot h_2 = F_{23}^n \cdot h_2' = F_{23}^T \cdot h_3''$. (lo mismo se podría hacer en el punto B)

NOTA: En el periodo de acceso, el sentido de \vec{F}_r es siempre el mismo (y contrario al del periodo de receso). Esto hace que en el periodo de acceso se sumen los efectos de \vec{F}_{32}^R y \vec{F}_r , tratando de "separar" aún más los ejes de las ruedas, mientras que en el

periodo de receso, la fuerza de rozamiento "descarga" la tensión $\vec{F}_R(23)$ entre los ejes.

NOTA: En los engranajes de perfil de evolvente, la línea de engrane es una línea recta, y la fuerza \vec{F}_{23}^n tiene siempre la misma dirección y sentido. Su módulo, sí $M_2 = \text{cte}$, también lo será.

3-1-2.-RENDIMIENTO DE LOS ENGRANAJES.-

Como en cualquier mecanismo:

$$\rho = W_3/W_2 = M_3 \cdot w_3 / M_2 \cdot w_2$$

Más adelante se estudiará el valor de ρ para cada uno de los perfiles. Sin embargo, en todos ellos podemos observar que con un buen acabado superficial de los dientes, y una buena lubricación de los cojinetes de las ruedas, ρ puede llegar hasta valores del 96-99%.

Es muy importante tener presente que dada la variación de $\vec{F}_R(32)$, y con ella, de \vec{F}_r , el rendimiento de los engranajes no es una cantidad constante durante todos los momentos del engrane.

Se entiende por "rendimiento de una transmisión por engranajes" al "valor medio" de todos los rendimientos instantáneos.

NOTA: Cuando el contacto se efectúa en el punto P, $\vec{F}_r = 0$; en este momento $\rho < 1$, porque habremos de contar la resistencia a la rodadura.

NOTA IMPORTANTE: Dado que en la práctica, el rendimiento de estos mecanismos es bastante alto, podemos, para los cálculos de los esfuerzos sobre los dientes y los apoyos, prescindir de las fuerzas de rozamiento

3-2-1.-ESFUERZOS EN LOS ENGRANAJES CILINDRICOS DE DIENTES RECTOS.-

Transmision de esfuerzos :

(Consideramos el instante en que el contacto se verifica en el punto A)

$$M_2 = F_{23}^n \cdot R_{B(2)} - \mu \cdot F_{23}^n \cdot \overline{T_2^A}$$

$$\text{como } R_{B(2)} = R_{P(2)} \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{T_2^A} = \overline{T_2^P} - \overline{PA} = R_{P(2)} \cdot \text{sen} \alpha - \lambda$$

sustituyendo:

$$M_2 = F_{23}^n \cdot R_{P2} \cdot \cos \alpha - \mu \cdot F_{23}^n \cdot (R_{P2} \text{sen} \alpha - \lambda)$$

Igualmente:

$$M_3 = F_{23}^n \cdot R_{B3} - \mu \cdot F_{23}^n \cdot \overline{AT_3}$$

$$\text{como } R_{B3} = R_{P3} \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{AT_3} = R_{P3} \cdot \text{sen} \alpha + \lambda$$

sustituyendo:

$$M_3 = F_{23}^n \cdot R_{P3} \cdot \cos \alpha - \mu \cdot F_{23}^n \cdot (R_{P3} \text{sen} \alpha + \lambda)$$

Las expresiones que nos dan M_2 y M_3 nos permiten hallar F_{23}^n y M_3 , partiendo de M_2 , en el punto A, inicio del engrane.

En otro instante cualquiera, la distancia entre el punto de contacto y el primitivo, λ , será diferente, y con ella, F_{23}^n y M_3 .

NOTA: Si despreciamos los rozamientos, entonces $M_2 \cdot w_2 = M_3 \cdot w_3$, y al ser constantes w_2 y w_3 , también lo será M_3 .

$$\text{En este caso, } M_2 = F_{23}^n \cdot R_{B2} = F_{23}^n \cdot R_{P2} \cdot \cos \alpha$$

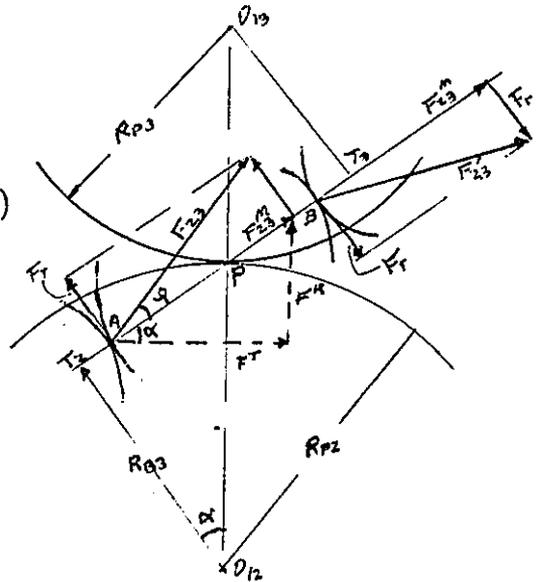
$$F_{23}^n = M_2 / R_{P2} \cdot \cos \alpha$$

conocido $\overrightarrow{F_{23}^n} \equiv \overrightarrow{F_{32}^n}$, se pueden hallar los esfuerzos radial y tangencial:

$$\overrightarrow{F_{T32}} \equiv \overrightarrow{F_{T23}} = F_{23}^n \cdot \cos \alpha = M_2 / R_{P2}$$

$$\overrightarrow{F_{R32}} \equiv \overrightarrow{F_{R23}} = F_{23}^n \cdot \text{sen} \alpha = M_2 \cdot \text{tag} \alpha / R_{P2}$$

Teniendo en cuenta los valores anteriores, se deducen facilmente, por simple aplicación de las ecuaciones generales de la estática, los valores de las reacciones en los apoyos.



Rendimiento:

(En el instante de contacto en A)

La potencia en cada rueda vendrá dada por:

$$W_2 = M_2 \cdot w_2 = w_2 \cdot F_{23}^n \cdot R_{P2} \cdot \cos \alpha - \mu \cdot F_{23}^n \cdot (R_{P2} \cdot \sin \alpha - \lambda)$$

$$W_3 = M_3 \cdot w_3 = w_3 \cdot F_{23}^n \cdot R_{P3} \cdot \cos \alpha - \mu \cdot F_{23}^n \cdot (R_{P3} \cdot \sin \alpha - \lambda)$$

El rendimiento, en ese instante, será:

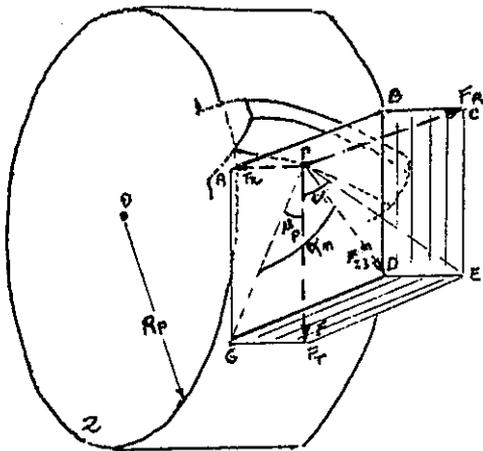
$$\rho = \frac{W_3}{W_2} = \frac{F_{23}^n \cdot R_{P3} \cdot w_3 \cdot (\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) - \mu \cdot F_{23}^n \cdot \lambda \cdot w_3}{F_{23}^n \cdot R_{P2} \cdot w_2 \cdot (\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) + \mu \cdot F_{23}^n \cdot \lambda \cdot w_2}$$

Como $w_2 \cdot R_{P2} = w_3 \cdot R_{P3}$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{(\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) - \mu \cdot (\lambda / R_{P3})}{(\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) + \mu \cdot (\lambda / R_{P2})} = \\ &= \frac{\cos(\alpha + \varphi) - \sin \varphi \cdot \lambda / R_{P3}}{\cos(\alpha + \varphi) + \sin \varphi \cdot \lambda / R_{P2}} \approx \frac{\cos(\alpha + \varphi) - \mu \cdot \lambda / R_{P3}}{\cos(\alpha + \varphi) + \mu \cdot \lambda / R_{P2}} \end{aligned}$$

Observese como este rendimiento varia con λ . A medida que el contacto se acerca al punto primitivo P, λ disminuye, y $\rho \rightarrow 1$.

3-2-2.-ESFUERZOS EN LOS ENGRANAJES CILINDRICOS HELIZOIDALES.-



Despreciando los rozamientos, vamos a calcular directamente los esfuerzos que se transmiten de una a otra rueda del mecanismo.

Sea P el punto medio del diente, sobre la circunferencia primitiva.

Si \vec{F}_{23}^n es la fuerza normal que 2 ejerce sobre 3, se ha de cumplir:

miembro 2:

actúan las fuerzas $\vec{F}_{32}, \vec{F}_{12}$ y M_2 en equilibrio:

$$\vec{F}_{32} + \vec{F}_{12} = 0$$

$$M(\vec{F}_{32}) + M(\vec{F}_{12}) + M_2 = 0$$

miembro 3:

actúan las fuerzas $\vec{F}_{23}, \vec{F}_{13}$ y M_3 en equilibrio:

$$\vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = 0$$

$$M(\vec{F}_{23}) + M(\vec{F}_{13}) + M_3 = 0$$

\vec{F}_{23}^n es perpendicular al diente en el punto P, por lo que esta desplazada del plano normal al eje el ángulo β_P .

Por otro lado, \vec{F}_{23}^n está inclinada el ángulo α respecto de la tangente a las circunferencias primitivas en P (normal a la línea de centros)

Por consiguiente, \vec{F}_{23}^n tiene la inclinación que se representa en la fig

- F_t^t = fuerza tangencial, perpendicular al radio de la rueda. Su módulo se calcula fácilmente, viendo que

$$M_2 = F_t^t \cdot R_{p2} \quad F_t^t = M_2 / R_{p2}$$

- F_r^R = fuerza radial, ó fuerza que tiende a separar los ejes de ambas ruedas. Su módulo será:

$$F_r^R = \overline{PC} = F_t^t \cdot \text{tag} \alpha \quad (\alpha \text{ es el ángulo de presión, que se mide en el plano normal al eje})$$

$$F_r^R = M_2 \cdot \text{tag} \alpha / R_{p2}$$

- F^a = fuerza axial, que tiende a desplazar la rueda a lo largo de su eje. Su módulo sera:

$$F^a = PA = F^t \cdot \operatorname{tag} \beta_p \quad (\beta_p = \text{ángulo de inclinación de montaje, medido sobre la circunferencia primitiva})$$

$$F^a = M_2 \cdot \operatorname{tag} p / R_{p2}$$

- F_{23}^n = esfuerzo normal al diente = $\overline{PD} = \overline{PG} / \cos \alpha_n = F_T / \cos \alpha_n \cdot \cos \beta_p$
 (α_n = ángulo de presión normal, medido en un plano normal al diente)

- Entonces: $F_{23} = F^t \sqrt{1 + \operatorname{tag}^2 \beta_p + \operatorname{tag}^2 \alpha}$

NOTA: Como se ve en la figura,

$$\operatorname{tag} \alpha_n = \overline{DG} / \overline{GP}$$

$$\operatorname{tag} \alpha = \overline{EF} / \overline{FP}$$

$$\operatorname{tag} \alpha_n = \frac{\overline{DG} \cdot \overline{FP}}{\overline{GP} \cdot \overline{EF}}$$

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{\overline{EF}}{\overline{FP}} \quad \text{como } \overline{DG} = \overline{EF}$$

$$\frac{\operatorname{tag} \alpha_n}{\operatorname{tag} \alpha} = \frac{\overline{FP}}{\overline{GP}} = \cos \beta_p$$

y por tanto:

$$\operatorname{tag} \alpha_n = \operatorname{tag} \alpha \cdot \cos \beta_p$$

NOTA: Si se toma como parametro el angulo α_n , se tendrá:

$$F^t = M_2 / R_{p2}$$

$$F^R = F^t \cdot \operatorname{tag} \alpha_n / \cos \beta_p$$

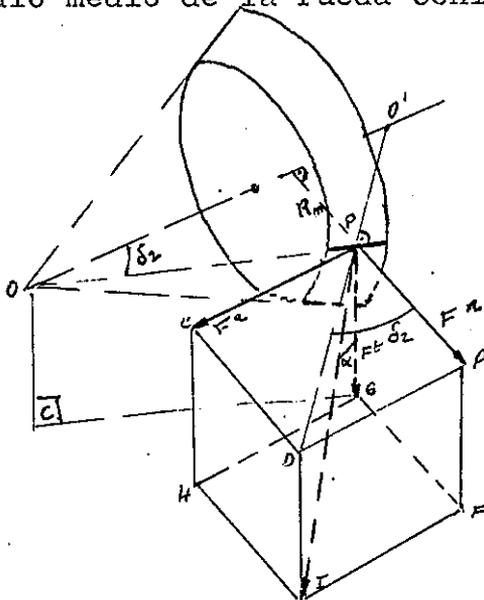
$$F^a = F^t \cdot \operatorname{tag} \beta_p$$

Los valores de las reacciones en los apoyos se deducen facilmente da las ecuaciones anteriores.

3-2-4.-ESFUERZOS EN LOS ENGRANAJES CONICOS DE DIENTES RECTOS.-

Despreciaremos los rozamientos, con lo que calcularemos las fuerzas maximas que se transmiten entre los dos miembros del mecanismo.

Sea P el punto medio de un diente sobre el cono primitivo, y R_{m2} el radio medio de la rueda conica.



F_{23}^n = fuerza normal de 2 sobre 3. Esta fuerza es perpendicular al diente en el punto P, por lo que ha de estar en un plano perpendicular al plano C (OPG). Además F_{23}^n estará inclinada el ángulo de presión α , respecto de la tangente común a las circunferencias primitivas. (α se mide en un plano normal a los conos primitivos, que también será normal a los dientes, es decir, α es el mismo ángulo de presión que el de las ruedas equivalentes)

-Teniendo lo anterior en cuenta, podremos descomponer F_{23}^n en tres componentes:

- F^t = fuerza tangencial, perpendicular a R_m . Su módulo será:

$$F^t = M_2 / R_{m2}$$

- F^R = fuerza radial, que tiende a separar las ruedas. Su módulo será:

$$F^R = \overline{PA} = \overline{PD} \cdot \cos \delta_2 = F^t \cdot \operatorname{tag} \alpha \cdot \cos \delta_2$$

$$F^R = M_2 \cdot \operatorname{tag} \alpha \cdot \cos \delta_2 / R_{m2}$$

- F^a = fuerza axial, que tiende a desplazar el cono a lo largo de su eje. Su módulo será:

$$F_a = \overline{PD} \cdot \operatorname{sen} \delta_2 = F^t \cdot \operatorname{tag} \alpha \cdot \operatorname{sen} \delta_2$$

$$F_a = M_2 \cdot \operatorname{tag} \alpha \cdot \operatorname{sen} \delta_2 / R_{m2}$$

Las reacciones en los apoyos, función de la posición de estos, se deduciran facilmente por aplicación de las ecuaciones generales de equilibrio

3-2-5.-ESFUERZOS EN LOS ENGRANAJES CONICOS DE DIENTES INCLINADOS.-

(Todo lo que vamos a estudiar es de aplicación cualquiera que sea el tipo de dentado conico inclinado: helicoidal, Gleason, Oerlikon, etc)

Despreciaremos, como en los casos anteriores, el rozamiento, y tomamos como punto de calculo de los esfuerzos el punto medio de un diente, P, sobre el cono primitivo.

(En la figura se ha representado una rueda con la helice a derechas, y con rotacion tambien a derechas)

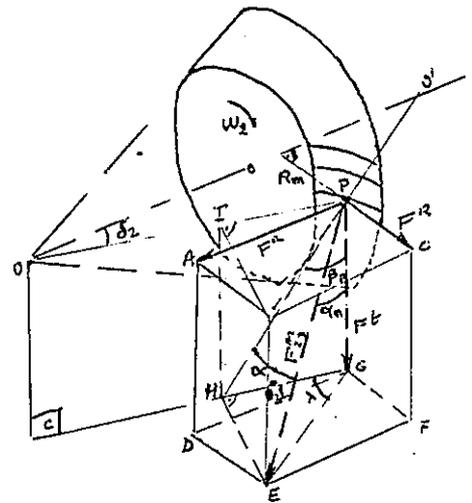
- F_{23}^n es perpendicular al diente en el punto P.

Si el plano C (OPG) es el plano tangente a los conos primitivos, F_{23}^n ha de formar con este plano el angulo de presión α , medido sobre un plano perpendicular al C.

(En el cono complementario)

(Observese que α será el mismo, tanto si el diente es recto como si no lo es, ya que se mide sobre la perpendicular al cono primitivo, y no en la perpendicular al diente)

Por otra parte, al ser los dientes inclinados la fuerza F_{23}^n estará inclinada el angulo β_p , como se ve en la figura.



Teniendo lo anterior en cuenta, podremos descomponer F_{23}^n en tres componentes:

- F_T = fuerza tangencial, perpendicular a R_{m2} . Su módulo será:

$$F_t = M_2 / R_{m2}$$

- F_R = fuerza radial, que tiende a separar las ruedas. Su módulo será:

$$F_R = \overline{PC} = \overline{GE} \cdot \text{sen}(\lambda - \delta_2) = \frac{\overline{HG}}{\cos \lambda} \cdot \text{sen}(\lambda - \delta_2) = \frac{F_T \cdot \text{tag} \beta_p}{\cos \lambda} \cdot \text{sen}(\lambda - \delta_2)$$

$$F_R = F_T \cdot \text{tag} \beta_p \cdot (\text{tag} \lambda \cdot \cos \delta_2 - \text{sen} \delta_2)$$

$$\text{como } \text{tag} \lambda = \frac{\overline{HE}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{HP} \cdot \text{tag} \alpha}{F_T \cdot \text{tag} \beta_p} = \frac{(F_T \cdot \text{tag} \alpha / \cos \beta_p)}{F_T \cdot \text{tag} \beta_p} = \frac{\text{tag} \alpha}{\text{sen} \beta_p}$$

Sustituyendo queda finalmente:

$$F_R = F_T \cdot \left(\frac{\text{tag} \alpha \cdot \cos \delta_2}{\cos \beta_p} - \text{tag} \beta_p \cdot \text{sen} \delta_2 \right)$$

- F_a = fuerza axial, que tiende a deslizar la rueda a lo largo del eje.
Su módulo será:

$$F_a = \overline{DG} = \overline{EG} \cdot \cos(\lambda - \delta_2) = \frac{\overline{HG}}{\cos \lambda} \cdot \cos(\lambda - \delta_2) = \frac{F_T \cdot \operatorname{tag} \beta_p}{\cos \lambda} \cos(\lambda - \delta_2)$$

teniendo en cuenta el valor de $\operatorname{tag} \lambda$, sustituyendo y operando, queda

$$F_a = F_T \cdot \left(\frac{\operatorname{tag} \alpha \cdot \operatorname{sen} \delta_2}{\cos \beta_p} + \operatorname{tag} \beta_p \cdot \cos \delta_2 \right)$$

- $F_{23}^n = F_T / \cos \alpha \cdot \cos \beta_p$

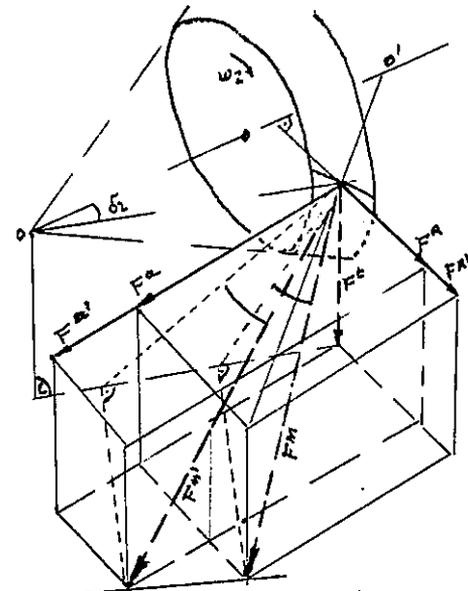
NOTA: Observese como en estos dientes el empuje viene definido, además, por el ángulo β_p . Cuando $\beta_p = 0$, las fórmulas son idénticas a las del dentado recto.

NOTA: Si el ángulo de presión se mide en un plano perpendicular al diente, basta sustituir en las expresiones anteriores α por α_n .

De la observación de la figura se deduce:

$$\operatorname{tag} \alpha = \operatorname{tag} \alpha_n / \cos \beta_p$$

NOTA: Observese en la figura adjunta que al ser el valor de α el mismo, tanto para dientes rectos, como inclinados, $\overline{EE'}$ ha de ser paralela a la generatriz de contacto \overline{OP} , con lo cual se observa como F_a aumenta y F_R disminuye, con relación a los valores obtenidos para los dientes rectos, como indican las fórmulas respectivas, anteriormente halladas



NOTA: Si la inclinación del diente fuera de sentido contrario (hélice a izquierdas), el empuje tendería a aproximar las dos ruedas, en lugar de separarlas, como se aprecia en la figura;

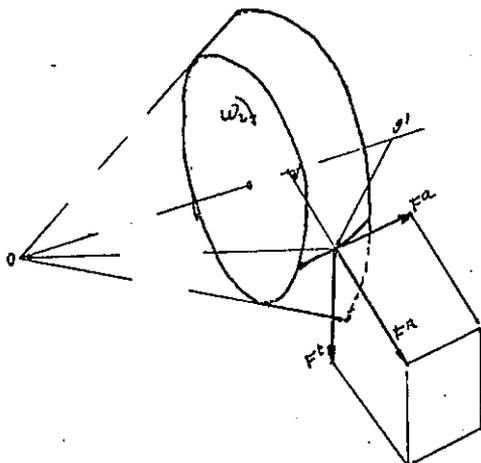
$$F_R = F_T \cdot \left(\frac{\operatorname{tag} \alpha}{\cos \beta_p} \cdot \cos \delta_2 + \operatorname{tag} \beta_p \cdot \operatorname{sen} \delta_2 \right)$$

$$F_a = F_T \cdot \left(\frac{\operatorname{tag} \alpha}{\cos \beta_p} \cdot \operatorname{sen} \delta_2 - \operatorname{tag} \beta_p \cdot \cos \delta_2 \right)$$

El ángulo β_p que haría cero el empuje sería:

$$\frac{\operatorname{tag} \alpha}{\cos \beta_p} \cdot \operatorname{sen} \delta_2 = \operatorname{tag} \beta_p \cdot \cos \delta_2$$

$$\operatorname{sen} \beta_p = \operatorname{tag} \alpha \cdot \operatorname{tag} \delta_2$$



1.-INTRODUCCION AL TALLADO DE RUEDAS DENTADAS.-

-Aunque en la materia de TECNOLOGIA MECANICA se ven con todo detalle los diferentes métodos de tallado de los distintos tipos de ruedas dentadas, la ligazón entre el tallado de las ruedas y la teoría de las mismas es tan importante, que se hace imposible el estudio correcto de las ruedas dentadas sin conocer los fundamentos de los métodos de talla.

-Existen una gran cantidad de métodos y máquinas para tallar engranajes.

Las primeras ruedas dentadas se hicieron a base de plantillas, a partir de un dibujo en papel, que luego se copiaba en un molde de madera, que servía para realizar su posterior fundición.

Actualmente, con el uso casi exclusivo de dientes de perfil de evolvente, se han desarrollado una gran variedad de ruedas dentadas para satisfacer las mas diversas necesidades de la industria, dada la gran versatilidad de este perfil, y su fácil construcción.

En este momento se emplean dos grandes metodos para la fabricación de engranajes: Por fundición y por mecanizado.

El primero sólo se emplea en raras ocasiones, para engranajes muy especiales, ó en la maquinaria barata, a las que se les exigen pocas prestaciones (juguetes, etc)

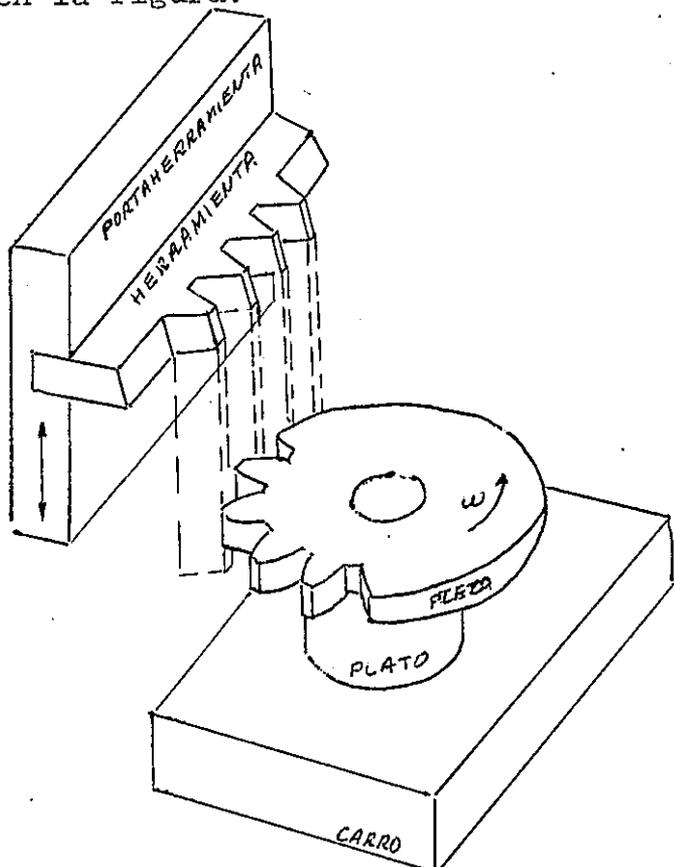
El segundo método, que es el más usual, puede a su vez realizarse por dos procedimientos: Por generación y por conformación.

-En los métodos generativos, una máquina genera perfiles de dientes matematicamente correctos, en virtud de los movimientos dados al útil y a la pieza.

La circunferencia primitiva del útil (herramienta de corte), con la forma de rueda ó de cremallera, esta obligada a rodar con la circunferencia primitiva de la pieza a tallar, como si fuera dos ruedas engranadas, al tiempo que el útil va y viene, ó tiene otro movimiento apropiado, para cortar la pieza

-Las máquinas para tallar dientes por generación son de tres tipos:
 Util con forma de cremallera (máquinas Maag); Util con forma de piñón
 (Máquinas Fellows) ; útil en forma de husillo giratorio (tornillo-fre-
 sa)

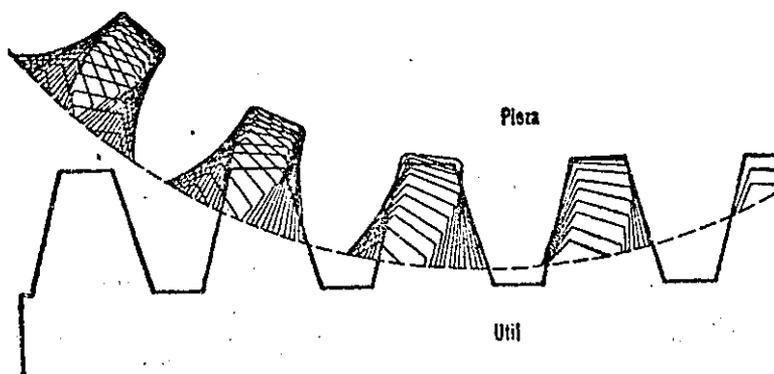
-En la generación por cremallera, el proceso de corte es el mostrado
 en la figura:



Por un lado, el portaherramientas con la herramienta tiene un movimiento de vaivén, en el cual el borde cortante de la herramienta describe en el espacio la superficie de una cremallera imaginaria (superficie generadora), mientras la pieza a tallar permanece inmóvil.

Por otro lado, la rueda a tallar va montada sobre un plato giratorio que gira con velocidad angular ω , al tiempo que se desplaza a la velocidad V , por medio de un carro.

Entre cada dos carreras alternativas del útil, la pieza gira y avanza lo conveniente para que el movimiento corresponda a la rodadura de la circunferencia primitiva de la rueda sobre la línea primitiva de la cremallera. Cuando la rueda ha avanzado (linealmente) una distancia igual al paso, vuelve a su posición de partida sin ningún movimiento de rotación, y el proceso de tallado empieza otra vez.



En la figuras puede observarse el proceso de tallado.

Este método tiene la ventaja de su gran sencillez y exactitud (la herramienta de corte puede construirse con toda la

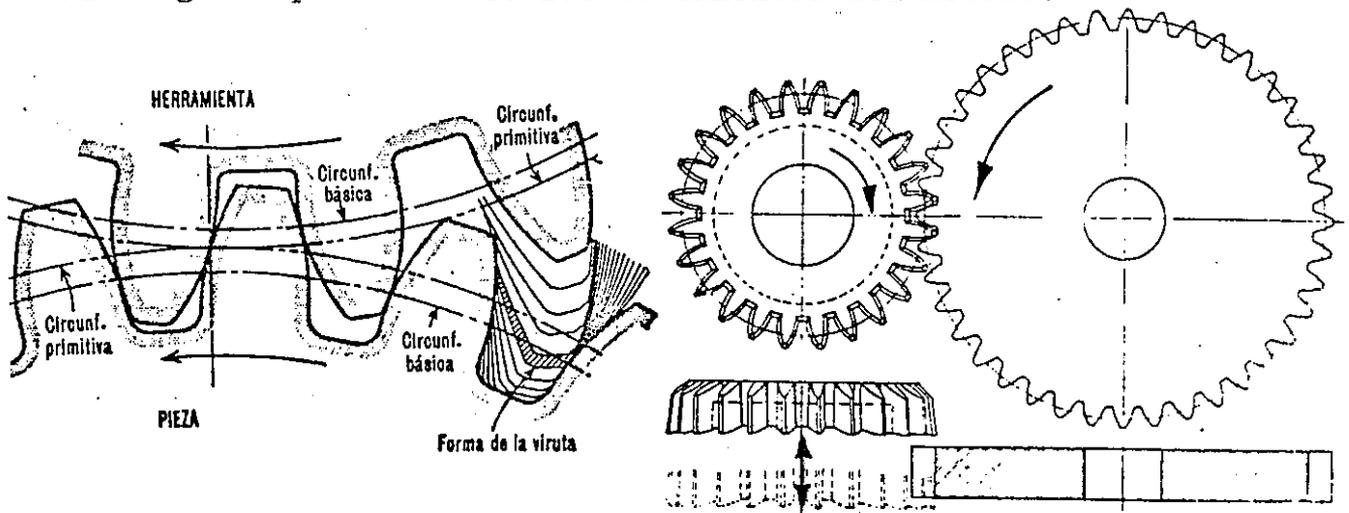
presición que queramos), es fácil de mantener el filo, etc.

Tiene el inconveniente de ser un movimiento alternativo y de que con ella no se pueden tallar ruedas interiores.

-Otro método generativo es el empleo del piñón cortador.

El proceso es similar al anterior, aunque con él se evita el avance y retroceso de la pieza. Entre cada dos carreras del útil, éste y la pieza giran el ángulo adecuado, como si las circunferencias primitivas rodaran una sobre otra.

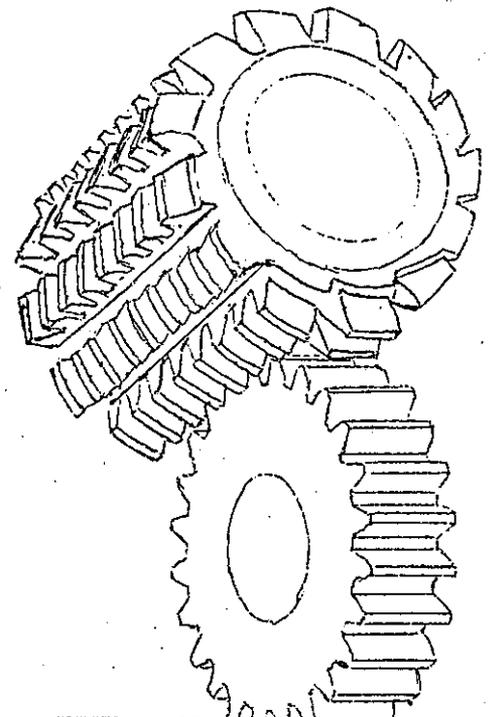
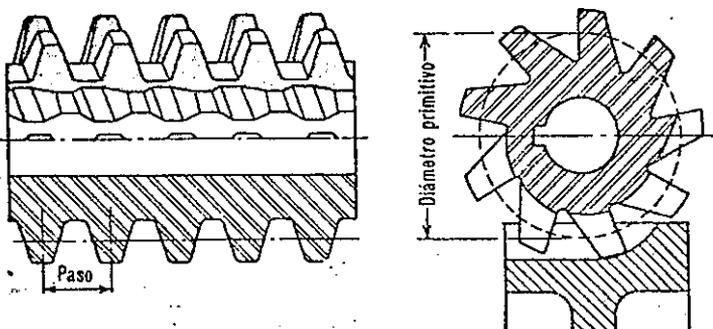
En las figuras pueden verse los fundamentos del método:



Este método es el único que puede emplearse en dentaduras interiores. Su principal inconveniente es la falta de precisión de la herramienta, y que no se puede afilar, lo que la hace mucho más cara.

-El método más rápido, y el más empleado para tallar ruedas dentadas por generación, es el tornillo-fresa, mostrado en las figuras.

La fresa madre está constituida por una serie de cremalleras dispuestas sobre un cilindro.

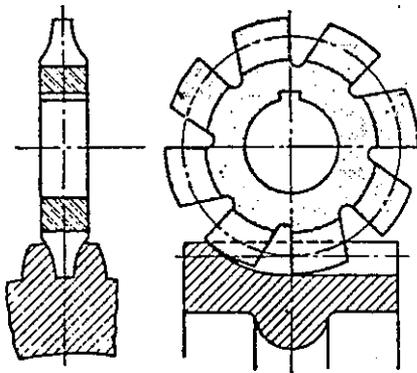


El movimiento de corte lo da la rotación de la fresa madre sobre sí misma, en lugar del movimiento de vaivén en los otros métodos.

A medida que útil y pieza giran con la adecuada velocidad relativa, aquel presenta a esta un perfil equivalente al de una cremallera que engrana con los dientes que se pretenden tallar en la rueda. Debido al gran número de filos cortantes, sólo se requiere un útil para tallar ruedas de cualquier número de dientes del mismo paso, además de que se realiza en una sola pasada. Es el método de tallado más rápido, y el más empleado.

Todos los movimientos son continuos, pero adolece de falta de precisión debido a la complejidad del útil.

-Dentro de los métodos por conformación y mecanizado, el único que se



emplea es el tallado por fresa de forma.

La fresa ya tiene la forma adecuada para obtener los perfiles de las dos caras de los dientes.

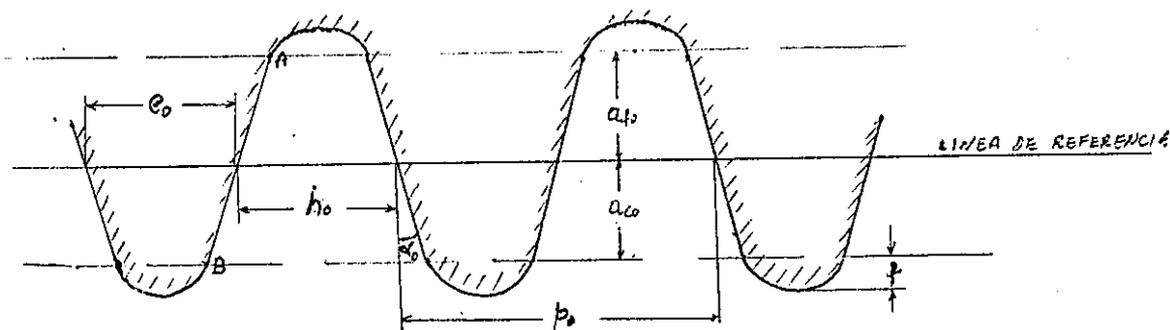
Las fresas se adquieren en "juegos" que cubren una amplia zona de trabajo, sirviendo cada una para un paso concreto,

Es uno de los métodos más antiguos, y de los más extendidos en talleres pequeños, donde la fabricación de ruedas dentadas es esporádica.

NOTA: Desde luego, todo lo dicho no da más que una somera idea, imprescindible para nuestros propósitos, de la tecnología del tallado de engranajes.

Para una información más amplia remitimos al lector a los diferentes tratados de TECNOLOGÍA MECÁNICA

2-1-1.-DATOS DE LA CREMALLERA HERRAMIENTA.-



En la figura se tienen todos los datos que definen una cremallera herramienta, a los que para distinguirlos de otra cremallera cualquiera, afectaremos del subíndice "cero".

α_o = ángulo de presión

p_o = paso (constante, cualquiera que sea la línea de referencia)
 $p_o = m_o \cdot \pi$

a_{co} = altura de cabeza

a_{fo} = altura de fondo

f = suplemento de cabeza

-Para definir todos estos datos se toma siempre como línea de referencia la LINEA MEDIA de la herramienta, que es aquella en la que el espesor del diente, e_o , es igual al hueco, h_o .

$$e_o = h_o = p_o / 2 = \pi \cdot m_o / 2$$

-Para tallar un fondo de diente suficientemente profundo, el diente de la herramienta tiene un suplemento de altura f con esquinas redondeadas. Este suplemento no interviene en el tallado de la "zona activa" de los flancos (la zona con forma de evolvente), y se puede prescindir de él a la hora de definir la altura de cabeza, a_{co} , de la herramienta.

Analogamente, en el fondo del hueco de la herramienta existen dos pequeños arcos de esquina, destinados a dar mayor robustez a la herramienta, y que tampoco participan en el tallado.

La única zona de la herramienta que interviene en el tallado es la marcada \overline{AB} en la fig. No hemos de olvidar tampoco que el círculo de cabeza de la rueda se mecaniza al torno, de modo que la herramienta

cremallera solo este destinada a tallar los flancos y el fondo de los dientes de la rueda.

NOTA: Para el tallado de ruedas que posteriormente han de ser rectificadas existen unos juegos de herramientas con sus dimensiones algo distintas de las de corte, para poder efectuar posteriormente la operación de rectificado, y dejar la rueda con las dimensiones previstas.

-En los países que emplean el Sistema Métrico Decimal, la herramienta cremallera "normalizada" tiene las siguientes dimensiones:

$$\alpha_0 = 20^\circ$$

$$p_0 = \kappa \cdot m_0 \quad \left(m_0 = 0,875; 1; 1,125; 1,25; 1,375; 1,50; 1,75; 2; 2,25; 2,50; 2,75; 3; 3,50; 4; 4,50; 5; 5,50; 6; 8; 9; 10; 11; 12; 16; 20; \dots \text{milímetros} \right)$$

numeros mayores ó menores se obtienen multiplicando ó dividiendo los datos anteriores por 2, 4, 8, 16,)

$$a_{co} = m_0$$

$$a_{fo} = m_0$$

$$f = 0,25 m_0$$

-Modernamente esta muy extendido el uso de los "dientes cortos", que solo se diferencian de los normales en una menor altura de cabeza y de fondo.

En este caso se emplea otro util cremallera, estando muy extendido, en el sistema métrico, la cremallera:

$$\alpha_0 = 20^\circ$$

$$p_0 = \kappa \cdot m_0$$

$$a_{co} = 0,8 \cdot m_0$$

$$a_{fo} = 0,8 \cdot m_0$$

$$f = 0,2 \cdot m_0$$

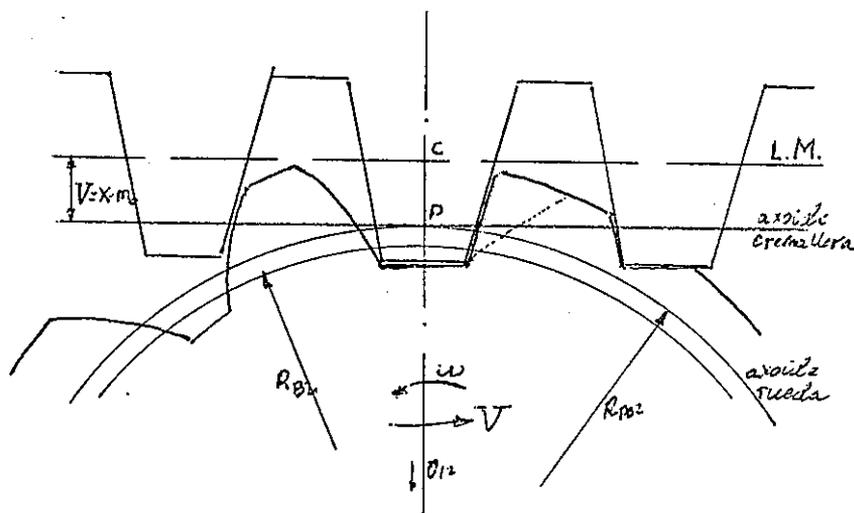
NOTA: En general, cualquiera que sea el tipo de dientes cortos (métrico, STUB, etc), se trata exactamente igual que los dientes normales sin más que sustituir en a_{co} y a_{fo} , $1 \cdot m_0$ por $y \cdot m_0$, siendo "y" un coeficiente que nos da el acortamiento de los dientes.

NOTA: Antiguamente se usaban también dientes con $\alpha = 15^\circ$ y $\alpha = 14^\circ 30'$, siendo en la actualidad desplazados por los de 20° , que son los que prácticamente se usan en la actualidad.

2-1-2.-AXOIDE DE GENERACION DE UNA RUEDA DENTADA.-

El movimiento relativo de la rueda a tallar y de la superficie generadora imaginaria, engendrada por la herramienta en su movimiento de vaivén, equivale a la rodadura de un cierto "plano axoide de generación" sobre un "cilindro axoide de generación" de la rueda, como se vé en la figura.

El radio R_{p0} del axoide de generación de la rueda queda determinado por las condiciones de movimiento de la máquina, y nó por la posición relativa de la rueda respecto de la cremallera.



(Distancia entre el centro de la rueda y la línea media de la cremallera).

Si el carro tiene velocidad V , y el plato gira con velocidad angular w , el radio de la "circunferencia primitiva de generación" resultante (axoide de generación) será:

$$R_{p0} = V / w$$

En realidad, el problema real hay que verlo de otro modo. En efecto, si nosotros queremos obtener una rueda de "z" dientes, y módulo m_0 (recuérdese que el módulo de la cremallera nó depende de la línea en que se mida. Puede serlo sobre la L.M., ó sobre cualquier otra paralela) se ha de cumplir:

$$R_{p0} = p_0 \cdot z / 2 \cdot \pi = m_0 \cdot z / 2$$

es decir, R_{p0} está condicionado. En consecuencia, V y w no pueden tener cualquier valor.

2-1-3.-DESPLAZAMIENTO DE LA HERRAMIENTA.-

De lo anterior se deduce que una rueda de z dientes, y módulo m_o , ó sea, de radio primitivo de generación R_{p_o} , puede obtenerse con infinitas posiciones de la cremallera de corte, ya que el axoide de generación en la cremallera, y la línea media de esta, no tienen porqué coincidir.

En la figura anterior, la distancia entre ambas es el "desplazamiento de la herramienta" (V), que siempre se expresará como una fracción del módulo de la misma (recuérdese que el módulo es una magnitud fija).

De otra forma podemos decir que para una z dada, y un m_o dado, conoceremos R_{p_o} . Luego nosotros podremos colocar la herramienta con su línea media donde nos parezca (dentro de ciertos límites, naturalmente), y así obtendremos las "ruedas con desplazamiento".

El desplazamiento lo mediremos por:

$$V = x.m_o$$

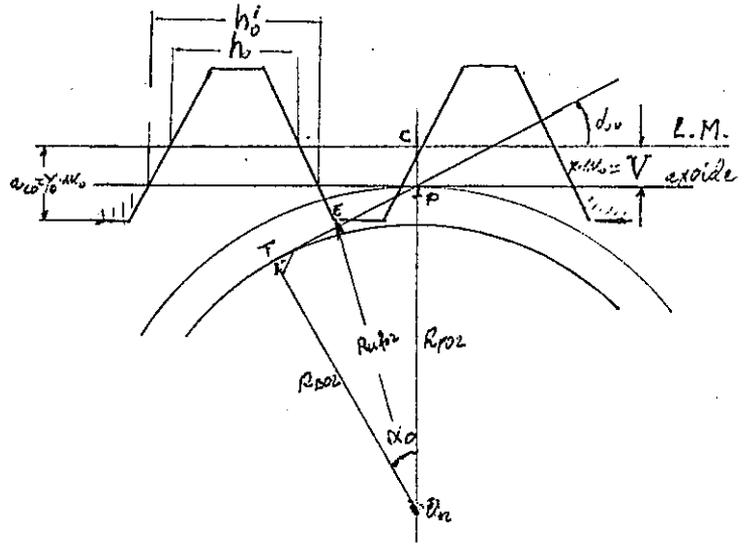
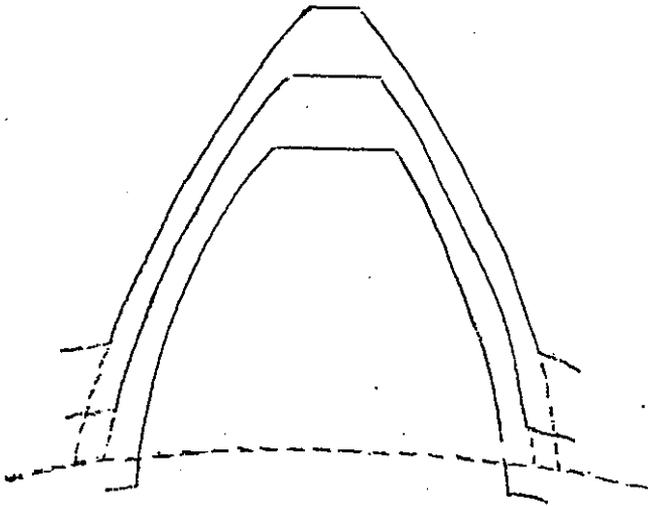
siendo x el coeficiente de desplazamiento.

El desplazamiento puede ser positivo (V^+) ó negativo (V^-), según que tienda a separar o a acercar la L.M. de la cremallera al eje de la rueda, respectivamente.

Cuando hagamos coincidir el axoide de generación en la cremallera con la L.M. de esta, ($V = 0$) diremos que la rueda ha sido tallada "a cero" (En este caso, $\overline{OC} = R_{p_o}$, en la figura anterior)

Naturalmente, las características constructivas de las ruedas talladas a cero, frente a aquellas talladas con desplazamiento, no serán todas iguales, y esto es lo que vamos a ver en el próximo punto.

2-1-4.-DATOS DE LA RUEDA OBTENIDA CON UNA HERRAMIENTA DADA.-



Supongamos que disponemos de una cremallera herramienta, con las características siguientes:

$$\alpha_0, m_0, y_0$$

y veamos los datos de las ruedas talladas:

Ruedas cero:

En estas ruedas, tomaremos: $\overline{O_2C} = R_{p0}$

El espesor del diente será igual al hueco, medidos sobre la circunferencia primitiva de generación.

Como es lógico, el ángulo de presión de generación será el mismo que el de la cremallera de corte.

Igualmente, también el módulo será el mismo.

Por tanto, se tendrá:

$$m_2 = m_0$$

$$p_2 = p_0 = \pi \cdot m_0$$

$$\alpha_2 = \alpha_0$$

$$e_2 = e_0 = p_0/2$$

$$e_{B2} = (e_0 + 2 \cdot R_{p0} \cdot \tan \alpha_0) \cos \alpha_0$$

$$p_{B2} = p_0 \cdot \cos \alpha_0$$

$$a_{c2} = a_{f0} = y_0 \cdot m_0$$

$$a_{f2} = a_{c0} = y_0 \cdot m_0$$

Ruedas V:

En la figura se muestran tres ruedas. Dos de ellas talladas con desplazamiento ($V = +0,5m_o$ y $V = -0,5.m_o$), y la tercera, la de enmedio, es la rueda cero.

En ellas se observa:

- 1º.-Todas tienen la misma circunferencia base, lo que significa evolventes idénticas
- 2º.-Todas tienen el mismo paso base.
- 3º.-El espesor del diente en el círculo base (e_B) aumenta a medida que aumenta el desplazamiento V . Al mismo tiempo, el hueco base disminuye.
- 4º.-El radio útil de fondo crece a medida que V aumenta.
- 5º.-El apuntamiento del diente crece con V

Si se emplea una herramienta de características

$$\alpha_o, m_o, y_o$$

y se le da un desplazamiento V , con un radio de generación

$$R_{Po} = m_o \cdot z/2$$

tendremos una rueda con las siguientes características: (ver fig)

- $R_{B2} = R_{Po} \cdot \cos \alpha_o$
- $P_{B2} = p_o \cdot \cos \alpha_o$. En efecto, el paso de la cremallera medido en la L.M. es igual al paso medido en el axoide, y el paso de la rueda en el axoide es el mismo que el de la cremallera en su axoide
- $e_{B2} = (e_o + 2.V \cdot \tan \alpha_o + 2.R_{Po} \cdot \tan^2 \alpha_o) \cdot \cos \alpha_o$

En efecto, el espesor del diente de la rueda medido en su axoide es igual al espesor del hueco h'_o de la cremallera medido en su recta axoide.

Pero este hueco es diferente del medido en la línea de referencia, h_o ($e_o = h_o$), y vale:

$$h'_o = h_o + 2.V \cdot \tan \alpha_o = m_e o + 2.V \cdot \tan \alpha_o$$

Como ya sabemos (punto 1-2-2-3) $e = \frac{e_B - 2.R_B \cdot \tan^2 \alpha}{\cos \alpha}$

que sustituido en nuestro caso, sabiendo que el espesor de la cremallera genera el hueco de la rueda:

$$e_o + 2.V \cdot \tan \alpha_o = \frac{e_B - 2.R_B \cdot \tan^2 \alpha_o}{\cos \alpha_o}$$

de donde, despejando convenientemente, obtenemos la

expresion anterior.

$$- R_{C2} = R_{Po} + V + a_{fo} = R_{Po} + V + y_o \cdot m_o$$

$$- R_{f2} = R_{Po} + V - a_{co} - f$$

$$- R_{uf2} = \sqrt{(R_{Po} \cdot \cos \alpha_o)^2 + \left(R_{Po} \cdot \sin \alpha_o - \frac{a_{co} - V}{\sin \alpha_o}\right)^2}$$

En efecto, en la figura, E representa el punto limite de corte de la cremallera:

$$R_{uf} = \sqrt{(OT)^2 + (TE)^2}$$

$$OT = R_{Po} \cdot \cos \alpha_o$$

$$TE = TP - PE$$

$$TP = R_{Po} \cdot \sin \alpha_o$$

$$PE = (a_{co} - V) / \sin \alpha_o$$

de donde, sustituyendo y despejando resulta la expresion anterior.

NOTA: Llamaremos RUEDA NORMALIZADA a la obtenida con una herramienta normalizada.

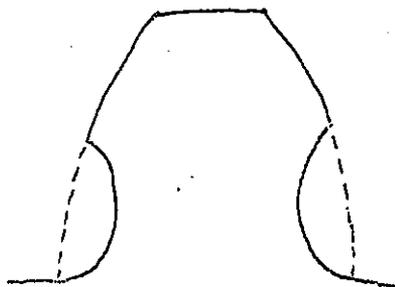
Llamaremos RUEDA NORMAL a la obtenida con una herramienta normalizada, y que ha sido tallada a cero.

2-1-5.-LIMITACIONES AL TALLADO DE RUEDAS CON UTIL. CREMALLERA.-

Como en cualquier engranaje, entre la cremallera herramienta y la rueda que se talla pueden haber problemas de interferencia, apuntamiento, etc., que pasamos a estudiar a continuación.

a) Penetración:

En el caso del tallado, la interferencia adquiere el nombre de "penetración", ya que en la operación de corte, la interferencia no se traduce en un bloqueo del movimiento, sino que la herramienta de corte recorta indebidamente un trozo de la base del diente, como se vé en



la figura. Conociendo lo que es la penetración, la única forma de remediarla es separando la herramienta cremallera de la rueda a tallar, es decir, dándole un desplazamiento V^+ (Acorde con lo visto en interferencia)

Como vimos en el punto 2-2-1-4, el límite de interferencia entre una rueda dentada y una cremallera, ó máxima altura de cabeza, es:

$$a_{c2(\max)} = R_{p3} \cdot \text{sen}^2 \alpha$$

que aplicada al caso de tallado por cremallera, con un desplazamiento V^+ , sería (ver la figura del punto anterior)

$$(a_{co} - V)_{\max} = R_{po} \cdot \text{sen}^2 \alpha_o$$

De esta expresión, para una herramienta dada (α_o, m_o, a_{co}), y una rueda a tallar dada ($R_{po} = m_o \cdot z/2$), el desplazamiento mínimo que habría que darle a la herramienta para evitar la penetración, sería:

$$V_{\min} = a_{co} - R_{po} \cdot \text{sen}^2 \alpha_o$$

-Naturalmente, si nosotros queremos hacer un "tallado a cero", o sea, una "rueda cero", con una herramienta determinada (α_o, m_o, y_o), lo que limitaremos es el radio mínimo de la rueda a tallar (ó para un módulo dado, el número de dientes), de tal forma que:

$$R_{po}(\text{límite}) = a_{co} / \text{sen}^2 \alpha_o \quad (V = 0)$$

Este radio representa la rueda cero más pequeña que se puede tallar con esa herramienta, sin penetración.

Como $R_{po} = m_o \cdot z/2$, queda: $z_{limite} = 2 \cdot a_{co}/m_o \cdot \text{sen}^2 \alpha_o$
 como $a_{co} = y_o \cdot m_o$, queda, finalmente:

$$z_{limite} = \frac{2}{\text{sen}^2 \alpha_o} \cdot y_o$$

NOTA: El coeficiente de altura de la cabeza de la herramienta de talla, y_o , no tiene porqué ser igual al correspondiente de la rueda tallada, puesto que en esta depende del torneado previo.

NOTA: Para $\alpha_o = 20^\circ$, e $y_o = 1$, $z_{lim} = 17$ dientes , con $V = 0$.

Las ruedas menores de z_{lim} se han de tallar con desplazamiento positivo, si se quiere queden libres de penetración.

Las ruedas mayores de z_{lim} pueden ser talladas, incluso, con desplazamientos negativos, sin que aparezca la penetración.

-En el caso de que tallemos una rueda con una herramienta α_o, m_o, y_o , el radio limite de la rueda, tallada con un desplazamiento V sería:

$$R_{po}(\text{lim}) = \frac{a_{co} - V}{\text{sen}^2 \alpha_o} \quad a_{co} = y_o \cdot m_o \quad ; \quad R_{po} = m_o \cdot z/2$$

sustituyendo y despejando, queda:

$$z_{limite} = \frac{2}{\text{sen}^2 \alpha_o} (y_o - x)$$

siendo $x = V/m_o$ el "coeficiente de desplazamiento".

De esta expresión es fácil calcular, para una herramienta dada, (α_o, m_o, y_o) y una rueda a tallar dada (z), el valor del desplazamiento V necesario para que no haya penetración.

NOTA: Para $\alpha_o = 20^\circ$; $y_o = 1$; $x = 0,5$ $z_{lim} = 9$ dientes.

NOTA: Observese que si se emplean dientes cortos, con $y_o < 1$, z_{lim} puede ser más pequeño, aún en ruedas cero.

Por ejemplo, para $\alpha_o = 20^\circ$; $y_o = 0,8$ $z_{lim} = 14$ dientes, lo cual es otra forma de poder fabricar ruedas de menor número de dientes, sin desplazamiento.

De lo dicho se desprende también la posibilidad de fabricar ruedas con desplazamiento y dientes cortos, para eliminar la penetración con menor número de dientes.

b) Apuntamiento:

Como es lógico, el desplazamiento de la herramienta no puede tener cualquier valor, viniendo limitado el desplazamiento máximo por el "radio de apuntamiento" del diente

En efecto, el radio de apuntamiento depende del espesor en la circunferencia base, para un R_B dado, y este espesor base varía al variar V .

Como vimos en 1-2-2-2, el apuntamiento del diente aparecía cuando

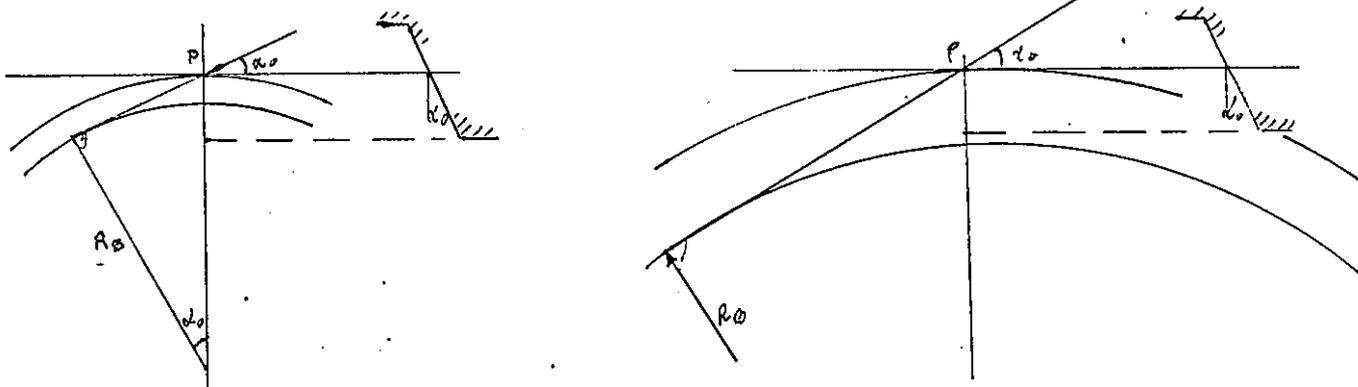
$e_B = 2 \cdot R_B \cdot E v \alpha$. Teniendo en cuenta que con el desplazamiento V , el

$e_B = (e_o + 2 \cdot V \cdot \tan \alpha_o + 2 \cdot R_{Po} \cdot E v \alpha_o) \cos \alpha_o$, de ambas expresiones se puede deducir el valor de V que nos dejará un diente puntiagudo.

NOTA: Desde luego, el apuntamiento es un detalle poco importante en la fabricación de ruedas dentadas. Solamente en las ruedas pequeñas de menos de 15 dientes, en las que se exige un radio de cabeza grande para conseguir un coeficiente de recubrimiento suficiente, el radio de apuntamiento puede ser un problema.

c) Evolvente incompleta:

Otro aspecto del tallado de ruedas por herramienta cremallera se presente cuando la cabeza de la herramienta sobrepasa el círculo base de la rueda, como se vé en la figura, aun cuando no se llegue al límite de penetración.



En la figura de la derecha se comprende que la rueda resultara perfectamente tallada, siendo todo el diente de perfil de evolvente.

Para que esto ocurra, ha de cumplirse:

$$R_B < R_{Po} - a_{co} ; \quad R_{Po} \cdot \cos \alpha_o < R_{Po} - a_{co} \quad R_{Po} \cdot (1 - \cos \alpha_o) > a_{co}$$

como $a_{co} = y_o \cdot m_o$ y $R_{Po} = m_o \cdot z/2$, queda:

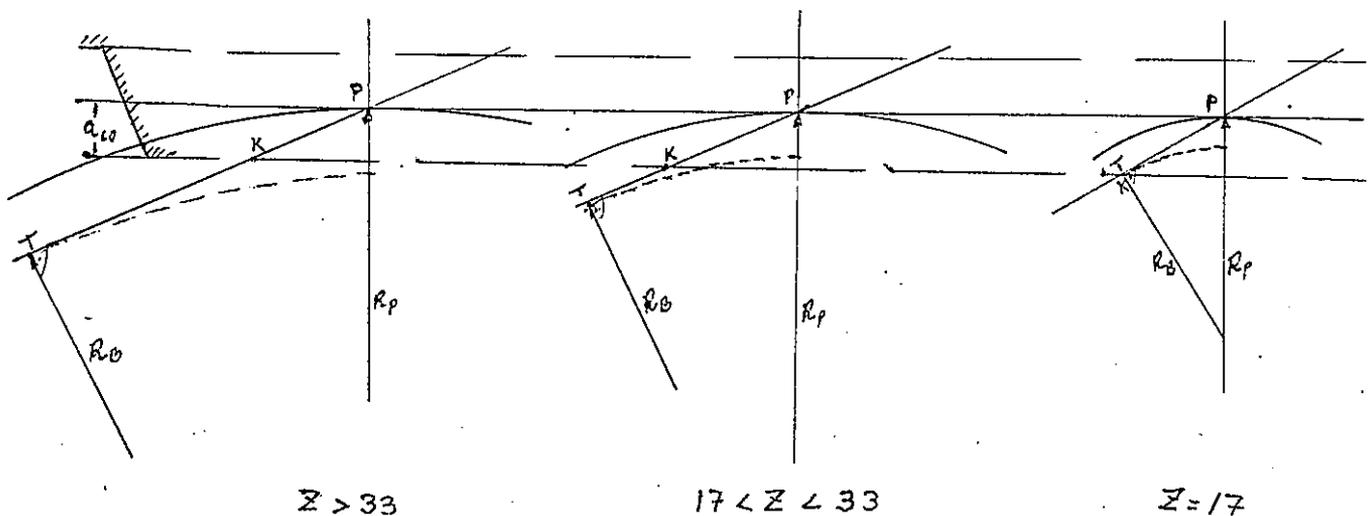
$$z > \frac{2}{1 - \cos \alpha_o} \cdot y_o$$

Para $\alpha_o = 20^\circ$, $y_o = 1$, $z > 33$ dientes. Ruedas mayores de 33 dientes tendrán todo el perfil de evolvente (Ruedas cero, se entiende)

-En la figura de la izquierda se observa que cuando la cabeza de la herramienta sobrepasa el círculo base (pero sin llegar al límite de penetración), parte del diente es un perfil de evolvente, desde la cabeza del mismo hasta el círculo base, y el resto está formado por la curva descrita por la cabeza de la herramienta en su movimiento, pero no tiene utilización alguna en el engrane, puesto que este llega solamente hasta la circunferencia útil de pie.

NOTA: En las figuras se han resumido los diferentes casos. En ellas se observa como para una herramienta dada (α_o, m_o, y_o), cuando la rueda a tallar (tallado a cero) es mayor de 33 dientes, todo el perfil es de evolvente. Entre 33 y 17 dientes, parte es evolvente y parte nó.

Con menos de 17 dientes aparece la penetración.



2-1-6.-PARTICULARIDADES SOBRE EL ENGRANE DE RUEDAS DENTADAS TALLADAS CON HERRAMIENTA CREMALLERA.-

a) Engrane de ruedas cero:

-Dos ruedas talladas a cero, con una misma herramienta de características α_0 , m_0 , y_0 , y con los números de dientes z_2 y z_3 , tendrán las siguientes características:

$$\begin{aligned} R_{P2} &= m_0 \cdot z_2 / 2 & R_{P3} &= m_0 \cdot z_3 / 2 \\ R_{B2} &= R_{Po2} \cdot \cos \alpha_0 & R_{B3} &= R_{Po3} \cdot \cos \alpha_0 \\ p_{B2} &= p_0 \cdot \cos \alpha_0 & p_{B3} &= p_0 \cdot \cos \alpha_0 \\ p_2 &= p_0 & p_3 &= p_0 \\ e_{B2} &= (e_0 + 2R_{Po2} \cdot \text{Ev} \alpha_0) \cos \alpha_0 & e_{B3} &= (e_0 + 2R_{Po3} \cdot \text{Ev} \alpha_0) \cdot \cos \alpha_0 \\ R_{c2} &= R_{Po2} + a_{fo} & R_{c3} &= R_{Po3} + y_0 \cdot m_0 \end{aligned}$$

-Puestas a engranar estas dos ruedas, con un ángulo de presión α cualquiera (Compatible con un coeficiente de recubrimiento suficiente), los datos de montaje ó funcionamiento serán:

$$R_{P2} = R_{B2} / \cos \alpha = R_{Po2} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$$

$$R_{P3} = R_{B3} / \cos \alpha = R_{Po3} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$$

$$p_2 = p_{B2} / \cos \alpha = p_0 \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$$

$$p_3 = p_{B3} / \cos \alpha = p_0 \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$$

$$e_2 = \frac{e_{B2} - 2R_{B2} \cdot \text{Ev} \alpha}{\cos \alpha} = (e_0 + 2R_{Po2} \cdot \text{Ev} \alpha_0 - 2R_{Po2} \cdot \text{Ev} \alpha) \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$$

$$e_3 = \frac{e_{B3} - 2R_{B3} \cdot \text{Ev} \alpha}{\cos \alpha} = (e_0 + 2R_{Po3} \cdot \text{Ev} \alpha_0 - 2R_{Po3} \cdot \text{Ev} \alpha) \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$$

-Según sabemos, el mínimo ángulo de presión entre dos ruedas engranadas viene dado por la expresión:

$$\text{Ev} \alpha_{\min} = \frac{e_{B2} + e_{B3} - p_B}{2 \cdot (R_{B2} + R_{B3})} = \frac{e_0 + 2R_{Po2} \cdot \text{Ev} \alpha_0 + (e_0 + 2R_{Po3} \cdot \text{Ev} \alpha_0) \cos \alpha_0 - p_0 \cos \alpha_0}{2(R_{Po2} \cdot \cos \alpha_0 + R_{Po3} \cdot \cos \alpha_0)}$$

de donde se deduce que

$$\text{Ev} \alpha_{\min} = \text{Ev} \alpha_0 \quad \alpha_{\min} = \alpha_0$$

es decir, el mínimo ángulo de presión que puede lograrse entre estas

dos ruedas es igual al ángulo de presión de la herramienta de talla.
En estas condiciones queda, al sustituir:

$$e_2 + e_3 = 2 \cdot e_0 = p_0$$

que es la condición de engrane sin holgura.

Como también $d_{\min} = (R_{B2} + R_{B3}) \cdot \cos \alpha'_{\min}$, sustituyendo:

$$d_{\min} = (R_{B2} + R_{B3}) \cdot \cos \alpha'_0 / \cos \alpha_0 = R_{B2} + R_{B3} = \frac{m_0}{2} \cdot (z_2 + z_3)$$

con lo que dos ruedas dentadas talladas a cero engranan sin holgura utilizando como axoides los propios de generación de ambas ruedas.

-El grado de recubrimiento en este engranaje será:

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = z_2 \cdot \rho_2 + z_3 \cdot \rho_3$$

$$\varepsilon_2 = z_2 \cdot \rho_2 = \frac{z_2}{2\kappa} \left[\sqrt{\left(\frac{R_{Po2} + y_0 \cdot m_0}{R_{Po2} \cos \alpha_0} \right)^2 - 1} - \frac{\sin \alpha'_0}{\cos \alpha_0} \right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{z_2}{2 \cdot \kappa \cdot \cos \alpha_0} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{y_0 \cdot m_0}{R_{Po2}} \right)^2 - \cos^2 \alpha_0} - \sin \alpha'_0 \right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot \kappa \cdot \cos \alpha_0} \left[\sqrt{(z_2 + 2y_0)^2 - z_2^2 \cos^2 \alpha_0} - z_2 \cdot \sin \alpha'_0 \right]$$

Haciendo lo mismo con ε_3 y sumando, queda:

$$\varepsilon = \frac{1}{2 \kappa \cos \alpha_0} \left[\sqrt{(z_2 + 2y_0)^2 - z_2^2 \cos^2 \alpha_0} + \sqrt{(z_3 + 2y_0)^2 - z_3^2 \cos^2 \alpha_0} - (z_2 + z_3) \sin \alpha'_0 \right]$$

NOTA: En ruedas de dientes normales, pondremos $y_0 = 1$, y en ruedas de dientes cortos, $y_0 < 1$ que corresponda.

NOTA Dos ruedas cero, engranadas sin holgura, constituye lo que llamamos "engranaje cero".

b) Ruedas con desplazamiento (ruedas V): Su engrane.-

-Dos ruedas talladas con desplazamientos V_2 y V_3 , y con la misma herramienta (α'_0, m_0, y_0) , con los números de dientes z_2 y z_3 , tendrán las siguientes características:

$$R_{Po2} = m_0 \cdot z_2 / 2$$

$$R_{Po3} = m_0 \cdot z_3 / 2$$

$$R_{B2} = R_{Po2} \cdot \cos \alpha'_0$$

$$R_{B3} = R_{Po3} \cdot \cos \alpha'_0$$

$$\begin{aligned}
 p_{B2} &= p_o \cdot \cos \alpha_o & p_{B3} &= p_o \cdot \cos \alpha_o \\
 e_{B2} &= (e_o + 2V_2 \operatorname{tag} \alpha_o + 2R_{Po2} \operatorname{Ev} \alpha_o) \cos \alpha_o & e_{B3} &= (e_o + 2V_3 \operatorname{tag} \alpha_o + 2R_{Po3} \operatorname{Ev} \alpha_o) \cos \alpha_o \\
 R_{c2} &= R_{Po2} + V_2 + y_o m_o & R_{c3} &= R_{Po3} + V_3 + y_o m_o
 \end{aligned}$$

-Puestas a engranar estas dos ruedas, con un ángulo α cualquiera (compatible con un grado de recubrimiento suficiente), los datos de montaje ó funcionamiento serán:

$$R_{p2} = R_{B2} / \cos \alpha = R_{Po2} \cdot \cos \alpha_o / \cos \alpha$$

$$R_{p3} = R_{B3} / \cos \alpha = R_{Po3} \cdot \cos \alpha_o / \cos \alpha$$

$$p_2 = p_{B2} / \cos \alpha = p_o \cdot \cos \alpha_o / \cos \alpha$$

$$p_3 = p_{B3} / \cos \alpha = p_o \cdot \cos \alpha_o / \cos \alpha$$

$$e_2 = \frac{e_{B2} - 2R_{B2} \operatorname{Ev} \alpha}{\cos \alpha} = (e_o + 2V_2 \operatorname{tag} \alpha_o + 2R_{Po2} \operatorname{Ev} \alpha_o - 2R_{Po2} \operatorname{Ev} \alpha) \cdot \frac{\cos \alpha_o}{\cos \alpha}$$

$$e_3 = \frac{e_{B3} - 2R_{B3} \operatorname{Ev} \alpha}{\cos \alpha} = (e_o + 2V_3 \operatorname{tag} \alpha_o + 2R_{Po3} \operatorname{Ev} \alpha_o - 2R_{Po3} \operatorname{Ev} \alpha) \cdot \frac{\cos \alpha_o}{\cos \alpha}$$

$$R_{c2} = R_{Po2} + V_2 + a_{fo} = R_{Po2} + x_2 m_o + y_o m_o = R_{Po2} + m_o (x_2 + y_o)$$

$$R_{c3} = R_{Po3} + V_3 + a_{fo} = R_{Po3} - x_3 m_o + y_o m_o = R_{Po3} + m_o (x_3 + y_o)$$

-El mínimo ángulo de presión entre estas dos ruedas será:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Ev} \alpha_{\min} &= \frac{e_{B2} + e_{B3} - p_B}{2(R_{B2} + R_{B3})} \\
 &= \frac{(e_o + 2V_2 \operatorname{tag} \alpha_o + 2R_{Po2} \operatorname{Ev} \alpha_o) \cos \alpha_o + (e_o + 2V_3 \operatorname{tag} \alpha_o + 2R_{Po3} \operatorname{Ev} \alpha_o) \cos \alpha_o - p_o \cos \alpha_o}{2(R_{Po2} \cos \alpha_o + R_{Po3} \cos \alpha_o)}
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Ev} \alpha_{\min} = \operatorname{Ev} \alpha_o + \frac{V_2 + V_3}{R_{Po2} + R_{Po3}} \cdot \operatorname{tag} \alpha_o \quad \alpha_{\min} = \text{-----}$$

como vemos, a diferencia del engranaje de ruedas cero, el ángulo de presión mínimo no coincide con α_o .

$$\begin{aligned}
 \text{Si } V_2 + V_3 > 0 &\Rightarrow \alpha_{\min} > \alpha_o \\
 V_2 + V_3 < 0 &\Rightarrow \alpha_{\min} < \alpha_o
 \end{aligned}$$

En estas condiciones:

$$\begin{aligned}
 e_2 + e_3 &= (e_o + 2V_2 \operatorname{tag} \alpha_o + 2R_{Po2} \operatorname{Ev} \alpha_o - 2R_{Po2} \operatorname{Ev} \alpha_{\min}) \frac{\cos \alpha_o}{\cos \alpha_{\min}} + \\
 &\quad + (e_o + 2V_3 \operatorname{tag} \alpha_o + 2R_{Po3} \operatorname{Ev} \alpha_o - 2R_{Po3} \operatorname{Ev} \alpha_{\min}) \frac{\cos \alpha_o}{\cos \alpha_{\min}}
 \end{aligned}$$

con lo que, en general, nó se cumplirá la condición de engrane sin

holgura: $e_2 + e_3 \neq 2 \cdot e_o = p_o$

NOTA: Si $V_2 = -V_3$, es decir, si las dos ruedas se tallan con desplazamientos iguales y contrarios, entonces:

$$\alpha_{\min} = \alpha_0 \quad \text{Ev} \alpha_{\min} = \text{Ev} \alpha_0$$

y la holgura desaparece, al ser:

$$e_2 + e_3 = 2e_0 = p_0$$

lo cual significa que con ruedas V también pueden lograrse "engranajes cero".

NOTA: El término $\frac{V_2 + V_3}{R_{Po2} + R_{Po3}} = \frac{m_0(x_2 + x_3)}{m_0(z_2 + z_3)/2} = 2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{z_2 + z_3} = B$

se le llama "desplazamiento total relativo".

-La distancia mínima entre los ejes de las ruedas será:

$$d_{\min} = \frac{R_{B2} + R_{B3}}{\cos \alpha_{\min}} = (R_{Po2} + R_{Po3}) \cdot \cos \alpha_0 / \cos \alpha_{\min}$$

por lo cual los axoides de funcionamiento no coincidirán con los de tallado, a no ser que sea $V_2 = -V_3$

-El grado de recubrimiento vendrá dado por: (engranando a la mínima distancia)

$$\epsilon = \epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{\left(\frac{R_{Po2} + (y_0 + x_2)m_0}{R_{Po2} \cos \alpha_0} \right)^2 - 1} - \tan \alpha_{\min} \right] \quad R_{Po2} = m_0 z_2 / 2$$

sustituyendo y operando:

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2\pi \cos \alpha_0} \left[\sqrt{\left[z_2 + 2(y_0 + x_2) \right]^2 - z_2^2 \cos^2 \alpha_0} - z_2 \cos \alpha_0 \tan \alpha_{\min} \right]$$

haciendo lo mismo con z_3 , queda:

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi \cos \alpha_0} \left[\sqrt{\left[z_2 + 2(y_0 + x_2) \right]^2 - z_2^2 \cos^2 \alpha_0} + \sqrt{\left[z_3 + 2(y_0 + x_3) \right]^2 - z_3^2 \cos^2 \alpha_0} - (z_2 + z_3) \cos \alpha_0 \tan \alpha_{\min} \right]$$

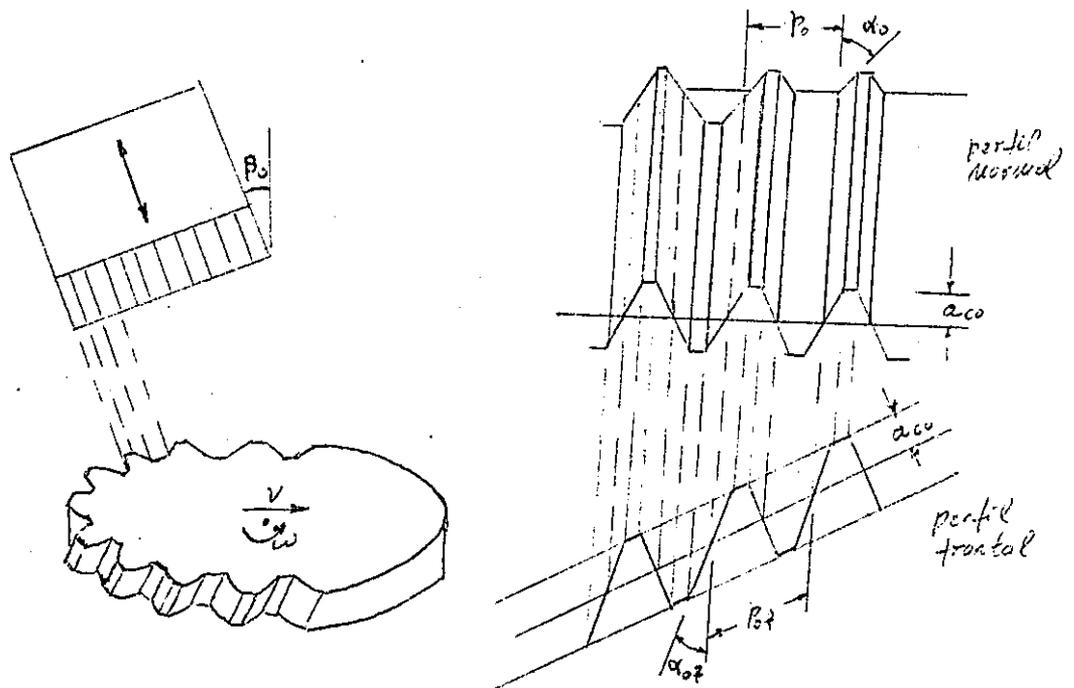
NOTA: Si $V_2 = -V_3$, ó sea, si $x_2 = x$ y $x_3 = -x$, $\alpha_{\min} = \alpha_0$, y queda:

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi \cos \alpha_0} \left[\sqrt{\left| z_2 + 2(y_0 + x) \right|^2 - z_2^2 \cos^2 \alpha_0} + \sqrt{\left| z_3 + 2(y_0 + x) \right|^2 - z_3^2 \cos^2 \alpha_0} - (z_2 + z_3) \cos \alpha_0 \right]$$

NOTA: En todos los casos anteriores, además de tener $\epsilon > 1$, también hay que comprobar la existencia de posibles interferencias. Para ello aplicaremos todos los conceptos ya estudiados, aunque como norma general puede decirse que si las dos ruedas dentadas no interfieren con la herramienta de talla, tampoco lo harán entre sí.

2-2.- TALLADO DE RUEDAS CILINDRICAS DE DIENTES HELICOIDALES.-

El tallado puede hacerse con el mismo procedimiento y el mismo util que las ruedas de dientes rectos. Basta solamente con inclinar un ángulo β_0 la cremallera, como se ve en la figura:

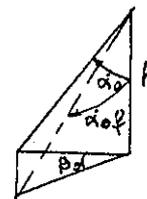
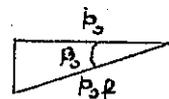


Si los datos de la cremallera son m_0 , p_0 , α_0 , y_0 , los del perfil frontal (superficie generadora) serán:

$$m_{of} = m_0 / \cos \beta_0$$

$$\tan \alpha_{of} = \tan \alpha_0 / \cos \beta_0$$

$$a_{cof} = a_{co}$$



Datos de las ruedas obtenidas

-Los datos del perfil frontal de la rueda dentada obtenida se calculan sustituyendo los valores anteriores en las fórmulas correspondientes a las ruedas cilíndricas de dientes rectas talladas con útil cremallera.

-En particular, el radio de la circunferencia primitiva de generación será:

$$R_{Po} = \frac{m_{of} \cdot z}{2} = \frac{m_o \cdot z}{2 \cdot \cos \beta_o}$$

expresión que indica que para un mismo número de dientes, R_{Po} crece al crecer la inclinación β_o (es decir, la rueda será más grande).

Inversamente, para un R_{Po} dado (tamaño de rueda fijo), z disminuye al aumentar la inclinación β_o (En efecto, si cada diente ocupa un ancho constante, cuanto más se inclinen estos, menos cabran en el cilindro)

-El tallado también puede realizarse a cero o con desplazamiento, aunque, como más adelante veremos, este último carece de interés en estas ruedas.

-Según sabemos, en ruedas de dentado helicoidal se verifica siempre (en un plano frontal): $\text{tag } \beta_B = \text{tag } \beta_P \cdot \cos \alpha$

Pues bien, en la talla con cremallera tendremos:

$$\text{tag } \beta_B = \text{tag } \beta_o \cdot \cos \alpha_{of}$$

siendo un valor constante e independiente de si se talla o no con desplazamiento.

Problemas en el tallado:

La condición que debe cumplir la herramienta para poder tallar la rueda sin penetración es la misma que en el caso de ruedas de dientes rectos, pero con los datos del perfil frontal de la cremallera.

-El desplazamiento mínimo será:

$$V_{\min} = a_{co} - R_{po} \cdot \text{sen}^2 \alpha_{of}$$

-El número mínimo de dientes que se pueden tallar sin desplazamiento y sin penetración, será:

$$R_{po(\lim)} = a_{co} / \text{sen}^2 \alpha_{of} = m_o \cdot y_o / \text{sen}^2 \alpha_{of}$$

Como $R_{po(\lim)} = m_{of} z_{\lim} / 2 = m_o \cdot z_{\lim} / 2 \cdot \cos \beta_o$, queda al sustituir

$$z_{\lim} = \frac{2y_o}{\text{sen}^2 \alpha_{of}} \cdot \cos \beta_o$$

NOTA: Para cálculos aproximados puede suponerse

$$\text{sen} \alpha_o / \text{sen} \alpha_{of} \approx \text{tag} \alpha_o / \text{tag} \alpha_{of} = \cos \beta_o$$

Con lo cual se tiene:

$$z_{\lim} = \frac{2y_o}{\text{sen}^2 \alpha_o} \cdot \cos^3 \beta_o$$

NOTA: El factor $\cos^3 \beta_o$ hace que con una inclinación suficiente de la cremallera de talla se puedan tallar a cero, sin interferencia, ruedas tan pequeñas (en número de dientes) como se quiera. Por ejemplo, para $\alpha_o = 20^\circ$, $y_o = 1$ y $\beta_o = 73^\circ$; $z_{\lim} = 1$ diente.

Engrane de estas ruedas:

↳ Engranaje con ruedas cero.-

Los datos frontales de funcionamiento serán:

$$p_2 = p_{of} = \kappa \cdot m_{of} = \kappa \cdot m_o / \cos \beta_o = p_3$$

$$e_2 = p_2 / 2 = e_3$$

$$\text{tag} \alpha = \text{tag} \alpha_{of} = \text{tag} \alpha_o / \cos \beta_o$$

$$\beta = \beta_o$$

$$d_{\min} = R_{po2} + R_{po3} = \frac{m_o (z_2 + z_3)}{2 \cdot \cos \beta_o}$$

La aparición del factor $\cos \beta_o$ en la distancia entre ejes hace que

podamos tener cualquier distancia, simplemente modificando el valor del ángulo de inclinación de la hélice.

Debido a esto, el tallado con desplazamiento no tiene utilidad práctica en estos perfiles.

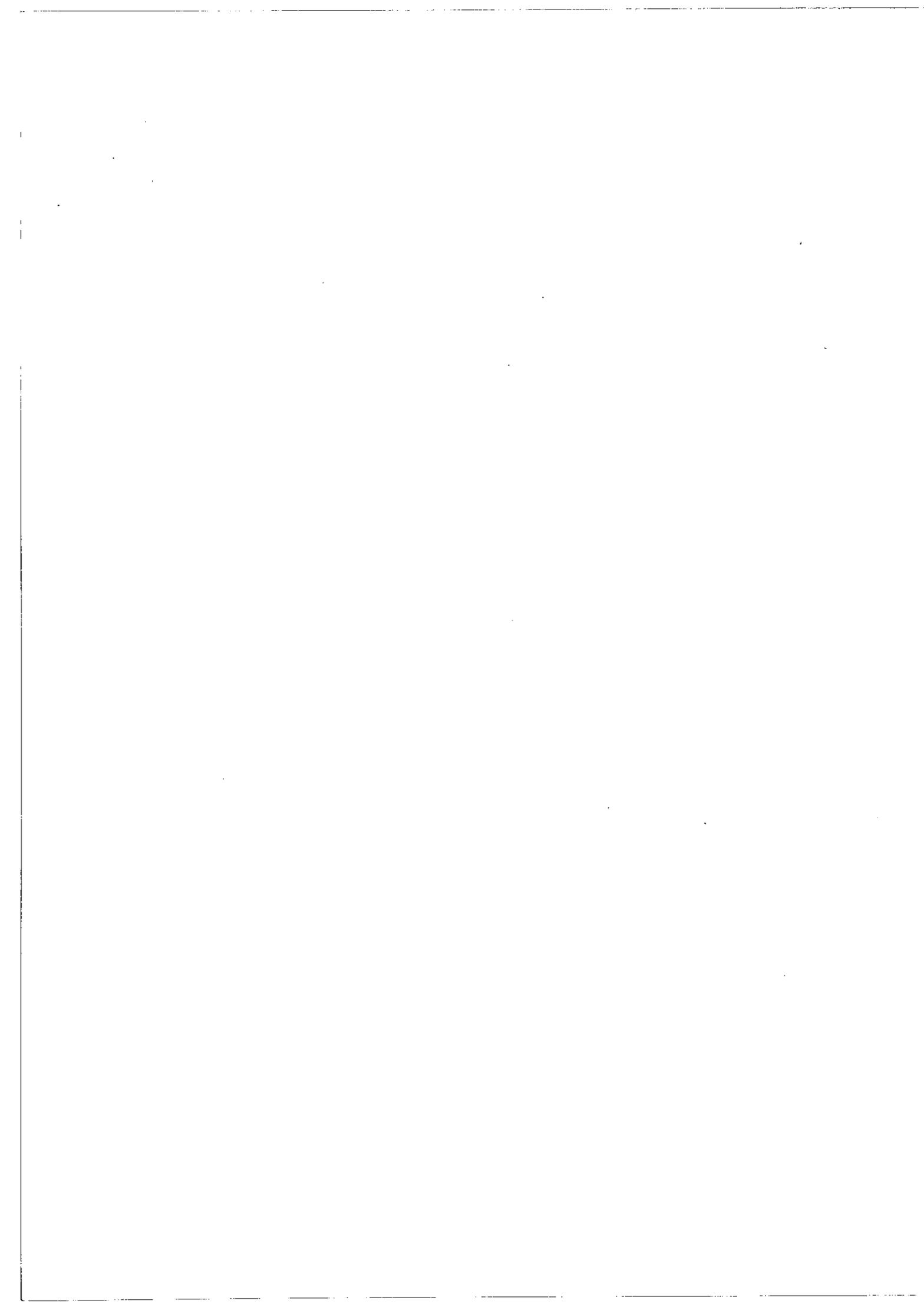
-Engranaje con ruedas V.-

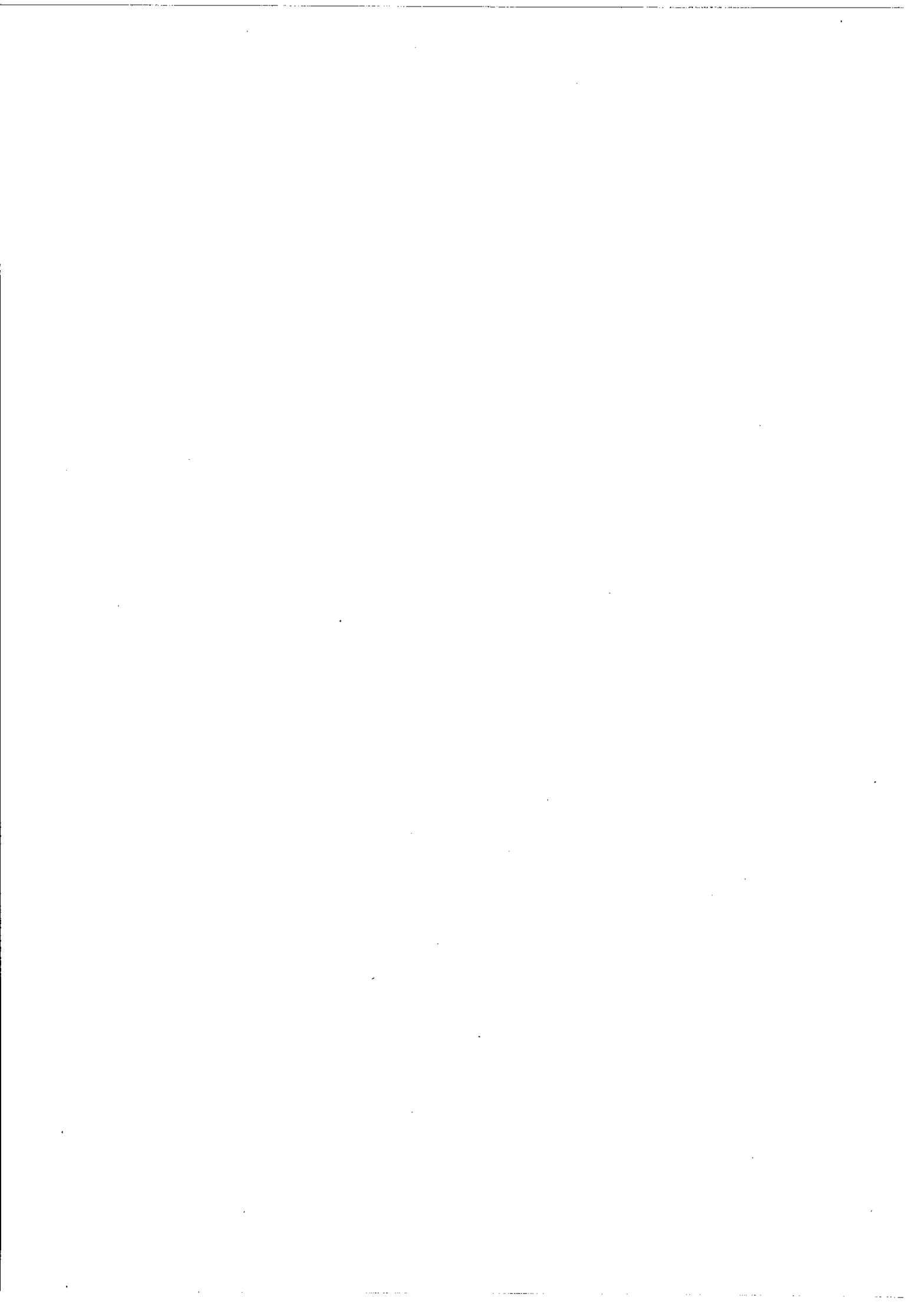
Si se hacen engranar con un ángulo de presión α (medido en el plano frontal) se tendrá:

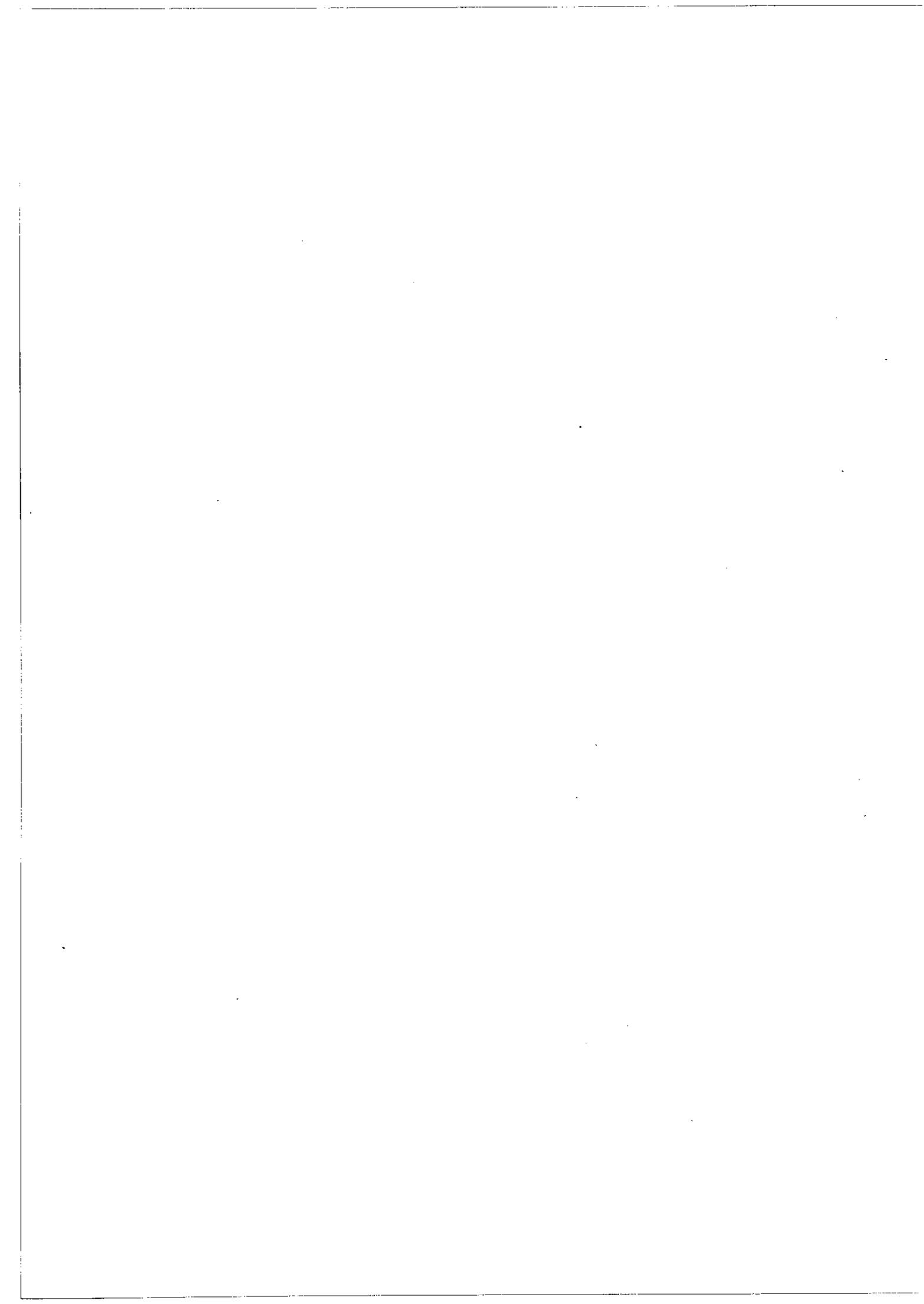
$$\operatorname{tag} \beta_p = \operatorname{tag} \beta_B / \cos \alpha = \operatorname{tag} \beta_0 \cdot \cos \alpha_{of} / \cos \alpha$$

Para calcular d_{\min} , el desplazamiento total de la rueda, relativo, será:

$$B = (V_2 + V_3) / (R_{p02} + R_{p03}) = 2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{z_2 + z_3} \cdot \cos \beta_0$$







ESTUDIO DE LOS TRENES DE ENGRANAJES.-A) Estudio de los trenes de engranajes existentes

1.-Introduccion

2.-Estudio de los trenes ordinarios

2-1.-Generalidades

2-2.-Estudio cinematico

2-3.-Estudio dinamico

3.-Estudio de los trenes de engranajes de ejes moviles

3-1.-Generalidades

3-2.-Estudio cinematico

3-2-1.-Calculo de la velocidad en un instante dado

3-2-2.-Ecuacion de la velocidad: formula de Wallis

3-2-3.-Tabulacion de velocidades

3-2-4.-Consideraciones cinematicas sobre el empleo de los trenes epicicloidales simples.

3-3.-Estudio dinamico

3-3-1.- Análisis de esfuerzos en los trenes epicicloidales

3-3-2.- Rendimiento de los trenes epicicloidales

B) Diseño de trenes de engranajes

1.-Diseño de trenes de engranajes de ejes fijos

1-1.-Consideraciones generales sobre el diseño cinematico

1-2.-Diseño de trenes sin restricciones constructivas

1-3.-Diseño de trenes de inversion

2.-Diseño de trenes de engranajes de ejes moviles

2-1.-Consideraciones generales sobre el diseño cinematico

2-2.-Diseño de trenes de tres ruedas

2-3.-Diseño de trenes de cuatro ruedas

2-3-1.- Con igual paso

2-3-2.- Con diferente paso.

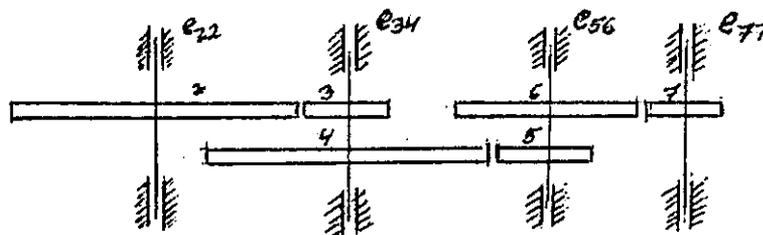
2-4.- Consideraciones sobre el montaje de estos trenes.

1.-INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LOS TRENES DE ENGRANAJES.-

Hasta el momento hemos estudiado el funcionamiento de un par de ruedas dentadas engranadas entre sí, así como el diseño de sus dientes. Naturalmente que si lo que se desea es transmitir un movimiento de rotación entre dos ejes, el empleo de un par de ruedas limitaría enormemente sus posibilidades. En efecto, si la posición de los ejes está dada y se encuentran muy separados, resulta antieconómico e inviable la creación de ruedas dentadas enormes. De la misma forma, si la relación de velocidades necesaria es muy elevada, dos ruedas no resuelven el problema debido no solo a los tamaños tan dispares entre ambas, sino también a problemas de interferencia, etc, de lo que ya hemos hablado en el estudio de engranajes.

Por otro lado, la necesidad de emplear ruedas normalizadas en el mercado hace imposible la mayor parte de las veces el empleo de un par de ruedas para lograr una relación de velocidades dada.

-Por todos los motivos anteriores nos vemos obligados a sacrificar la simplicidad de un par de engranajes y usar varios pares, conectados en serie, dando lugar a un tren de engranajes, como el de la figura:



Este ejemplo consta de 4 ejes fijos a sus cojinetes y 6 ruedas

-En todos los trenes de engranajes, a cada eje pueden ir caladas una ó dos ruedas.

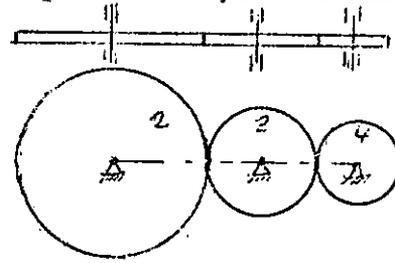
Las ruedas que reciben el movimiento por su periferia (dientes) y lo transmiten a otra por el eje, se llaman ruedas conducidas; las que reciben el movimiento por el eje y lo transmiten por la periferia se llaman conductoras.

En el ejemplo anterior, las ruedas 2, 4 y 6 son conductoras, y las

3, 5 y 7 conducidas.

Las ruedas que reciben el movimiento por la periferia (dientes) y lo transmiten al mismo tiempo por su periferia, se llaman ruedas intermedias ó ruedas parasitas.

Como veremos mas adelante, estas ruedas parasitas no introducen ninguna variacion entre las ve-

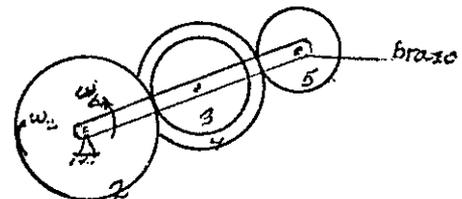


locidades de las ruedas que contactan con ellas, y su unica mision es cambiar la direccion del giro entre las dos ruedas adyacentes, asi como separar los ejes de estas ruedas.

-En los trenes de engranajes los ejes de todas las rúedas pueden ir montados sobre unos cojinetes fijos al bastidor, ó ir montados en unos cojinetes fijos a un brazo que al mismo tiempo se mueve. En el primer caso tenemos los trenes de engranajes ordinarios ó de ejes fijos, y en el segundo caso, los trenes de engranajes epicicloidales ó de ejes moviles.

El ejemplo anterior responde a un tren de ejes fijos.

Un tren de ejes moviles puede ser el representado en la fig. En él, el brazo y la rueda 1 reciben el movimiento independientemente. El movimiento de la rueda 5 es el resultado de w_1 y de w_b .



Ambos tipos de trenes requieren un tratamiento diferente, por lo que todo el estudio lo efectuaremos separadamente.

-Como resumen podemos decir que los fines que se persiguen al crear un tren de engranajes son:

1º.-Variar el sentido de la marcha entre dos ejes.

2º.-Hacer posible la transmision entre dos ejes muy distantes

3º.-Obtener una relacion de velocidades dada entre dos ejes, bien:

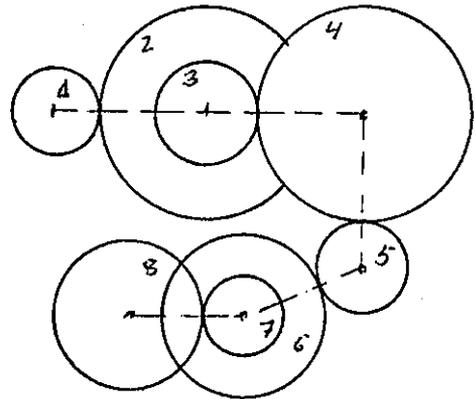
- a) Porque no se disponga de las ruedas precisas.
- b) Porque la relacion de velocidades deseada sea muy grande.
- c) Porque la relacion de velocidades sea una cantidad inconmensurable ($\sqrt{2}$, π), y el error que se comete con solo dos ruedas sea muy grande.

En los casos 1º, 2º y 3º a), los trenes de engranajes de ejes fijos son los mas empleados. En el caso 3º b), o sea, cuando se desean relaciones de transmision muy grandes, con el empleo de pocas ruedas, los trenes epicicloidaes son mas indicados.

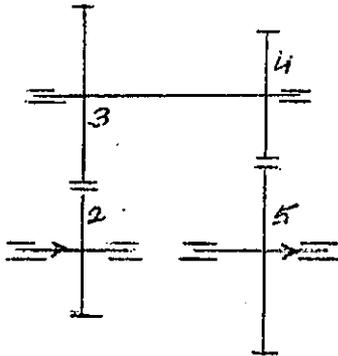
2-1.-GENERALIDADES SOBRE TRENES DE ENGRANAJES DE EJES FIJOS.-

-Como se ha dicho son los que tienen todos los ejes de las ruedas fijas al bastidor del mecanismo.

En la figura, las ruedas 1, 3 y 7 son conductoras, y las 2, 4, 6 y 8 conducidas. Las ruedas 4 y 5 son parasitas.



-Cuando los ejes primero y ultimo estan alineados, como se ve en



la figura, se ha de verificar la igualdad de la distancia entre centros

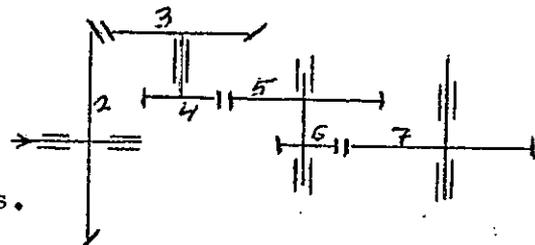
$$D_2 + D_3 = D_4 + D_5$$

que si todas las ruedas tienen el mismo paso se reduce a:

$$z_2 + z_3 = z_4 + z_5$$

-Los trenes de engranajes de ejes fijos se pueden construir con cualquier par de ruedas dentadas que hemos visto, así como con combinaciones entre tipos diferentes. Por ejemplo, se pueden construir trenes de ruedas de dientes rectos exteriores; de dientes rectos interiores y exteriores; de dientes inclinados; de dientes rectos e inclinados; de dientes cónicos; de dientes rectos y cónicos como se ve en la figura, etc.

De esta manera, las posiciones de los ejes primero y ultimo no tienen porque ser paralelas.



-También, con objeto de ganar espacio, los ejes de todas las ruedas no se colocan en el mismo plano, sino en planos paralelos, como se ve en la figura.

2-2.-ESTUDIO CINEMATICO DE LOS TRENES DE EJES FIJOS.-

-Llamaremos "relacion de transmision" de un tren de engranajes (ó razon de velocidades total), al cociente entre la velocidad angular de la ultima rueda y de la primera.

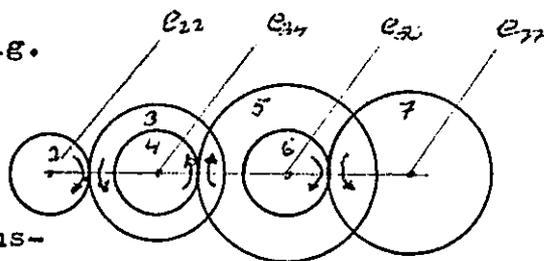
En el tren de engranajes de la fig.

la relacion de transmision sera

$$j = w_7 / w_2$$

Las "relaciones parciales de transmision" entre cada dos ruedas seran:

$$j_{23} = w_3 / w_2 ; j_{34} = w_4 / w_3 ; j_{76} = w_7 / w_6$$



-Veamos ahora la relacion entre el numero de dientes de cada rueda y la "relacion total de transmision".

En la figura anterior, y como sabemos: $w_3/w_2 = z_2/z_3 \dots (1)$

Por ir las ruedas 3 y 4 caladas en el mismo eje: $w_3 = w_4 \dots (2)$

Entre las ruedas 4 y 5: $w_5/w_4 = z_4/z_5 \dots (3)$

Por ir las ruedas 5 y 6 caladas al mismo eje $w_5 = w_6 \dots (4)$

Entre las ruedas 6 y 7: $w_7/w_6 = z_6/z_7 \dots (5)$

Operando entre las relaciones (1), (2), (3), (4) y (5) anteriores,

se tendra:

$$w_7 / w_2 = \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_4}{z_5} \cdot \frac{z_6}{z_7} = \frac{\text{nº dientes ruedas conductoras}}{\text{nº dientes ruedas conducidas}}$$

Llamaremos razon de dientes a:

$$r.d. = \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_3 \cdot z_5 \cdot z_7} = \frac{\text{producto nº dientes ruedas conductoras}}{\text{idem ruedas conducidas}}$$

En consecuencia, en un tren de engranajes de este tipo, la relacion de transmision es igual a la razon de dientes (en modulo y signo)

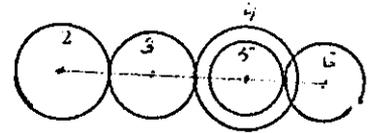
$$j = r.d.$$

-El sentido de rotacion puede obtenerse facilmente dibujando unas flechas sobre el esquema del mecanismo, como se ve en la figura anterior. En ella, w_2 y w_7 giran en sentidos contrarios, con lo cual la relacion de transmision (y la razon de dientes) es negativa.

NOTA: En el caso de existir ruedas parasitas, y a efectos de modificacion de la velocidad, es como si no existieran, pues hay que considerarlas al mismo tiempo conductoras y conducidas

$$j = \frac{w_6}{w_2} = \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_4} \cdot \frac{z_5}{z_6} = \frac{z_2 \cdot z_5}{z_4 \cdot z_6} = \text{r.d.}$$

Como se ve, el numero de dientes de la rueda parasita 3 no modifica en nada el valor de la relacion de transmision.



-Siendo j_{23} , j_{45} , etc, las relaciones parciales de transmision entre cada par de ruedas engranadas que forman el tren, se tendra en general:

$$j = j_{23} \cdot j_{45} \cdot j_{67} \cdot \dots$$

-Puede observarse tambien que en un tren de engranajes sin ruedas parasitas, el numero de ruedas y el numero de ejes estan relacionados por la expresion

$$x + 1 \text{ (ejes)} \iff 2 \cdot x \text{ (ruedas)}$$

En efecto, teniendo en cuenta que el primero y ultimo ejes llevan una sola rueda, y todos los otros ejes dos,

$$2 \cdot (x - 1) + 2 = 2 \cdot x \text{ ruedas}$$

NOTA: Todo lo anterior es valido para cualquier tipo de engranajes (dientes rectos, inclinados, ruedas conicas, etc), excepto cuando en el tren se emplea un engranaje de tornillo sin fin.

2-3.- ESTUDIO DINAMICO DE LOS TRENES DE ENGRANAJES DE EJES EJOS.-

- Como es lógico, todos los conceptos estudiados sobre análisis de fuerzas en mecanismos son de aplicación al estudio de estos tipos en particular.

En ellos se han de cumplir las ecuaciones generales:

$$\sum \bar{F} = 0$$

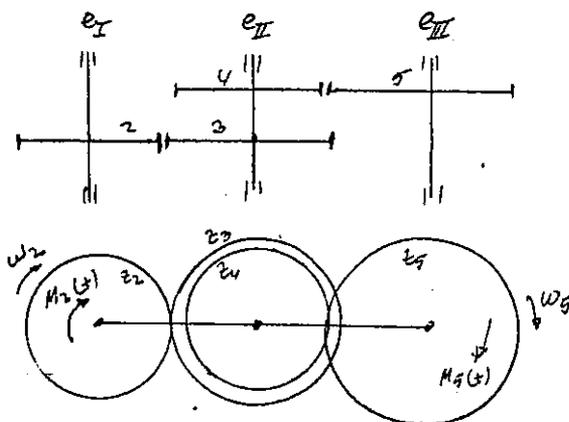
$$\sum \bar{M} = 0$$

tanto para el mecanismo en su conjunto, como para cada uno de los miembros por separado.

Además, si suponemos su rendimiento unidad, también se ha de cumplir el principio de las "potencias virtuales". En un sistema en equilibrio, pero que puede moverse (o se mueve), en cualquier movimiento posible la suma de las potencias que entran en el sistema (con signo (+) las que realmente entran, y con signo (-) las que realmente salen) es nula.

- A continuación vamos a realizar para estos mecanismos un estudio a nivel global de las potencias virtuales, y luego otro estudio particularizado para sus diferentes miembros para hallar los esfuerzos actuantes sobre cada uno.

Para ello nos vamos a referir al mecanismo de la figura:



Convenio de signos: (Lógicamente, M_5 como par resistente tendrá signo -)

- En el mecanismo de la figura, los esfuerzos exteriores aplicados son el par motor M_2 y el par resistente M_5 (además del par de vuelco, que no produce trabajo si el bastidor está fijo).

Por tanto, el principio de las potencias virtuales indica

$$M_2 \cdot \dot{w}_2 + M_5 \cdot \dot{w}_5 = 0 \quad (1)$$

Por otro lado, los movimientos posibles estan ligados -- por la ecuación

$$\frac{\dot{w}_5}{\dot{w}_2} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_3 \cdot z_5} = \mu \quad (2)$$

$$\mu w_2 - w_5 = 0 \quad (3)$$

Como se han de cumplir simultaneamente las Ecuaciones (1) y (3), sus coeficientes han de ser iguales o proporcionales, por lo que:

$$\frac{M_2}{\mu} = \frac{M_5}{-1} \Rightarrow M_5 = -\frac{1}{\mu} \cdot M_2 \quad (4)$$

que como vemos, no es mas que otra forma de escribir la Ecuación (1).

(Obsérvese el sentido negativo de M_5 , como tenia que suceder con el convenio establecido).

- Como es lógico, este mismo principio puede aplicarse a dos miembros del mecanismo cualesquiera. Por ejemplo;

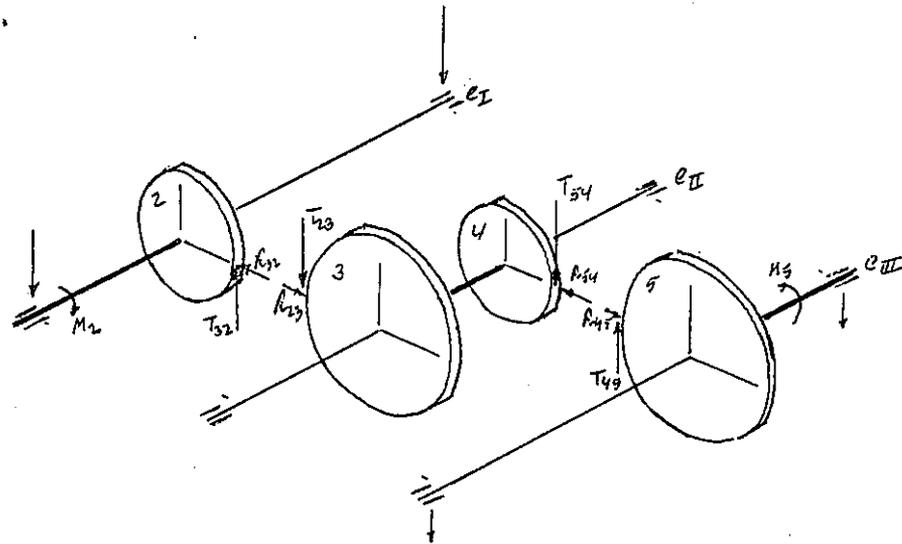
$$M_4 \cdot \dot{w}_4 = M_5 \cdot \dot{w}_5$$

$$\frac{\dot{w}_5}{\dot{w}_4} = \frac{-z_4}{z_5} = -\mu \Rightarrow w_5 + \mu w_4 = 0$$

$$\frac{M_4}{\mu} = \frac{M_5}{1} \Rightarrow M_5 = \frac{1}{\mu} M_4$$

En este caso, al ser μ negativo, M_4 tiene la misma dirección que M_5 (aunque, por supuesto, M_5 tiene sentido contrario a w_5).

- Analizando ahora las fuerzas que interviene, podríamos dibujar los diagramas de cuerpo libre de la figura:



Teniendo en cuenta que las fuerzas radiales no producen momentos, se tendrá:

$$\begin{array}{l}
 e_I \dots\dots\dots M_2 - T_{32} \cdot R_2 = 0 \\
 e_{II} \dots\dots\dots -T_{32} \cdot R_3 + T_{54} \cdot R_4 = 0 \\
 e_{III} \dots\dots\dots T_{45} \cdot R_5 - M_5 = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} e_I \\ e_{II} \\ e_{III} \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 T_{32} = T_{23} \\
 T_{54} = T_{45}
 \end{array}$$

expresiones que permiten hallar T_{32}, T_{54}, M_5 en función de M_2 y los radios primitivos.

(Los tramos de los ejes de las ruedas que están regruesados representan las zonas sometidas a momentos torsores).

Aparte de lo expuesto, falta por calcular las reacciones en los apoyos, que en este momento no tienen ningún interés.

(Obsérvese que en este tipo de tenas, las fuerzas de -- inercia son nulas).

3-1.-GENERALIDADES SOBRE LOS TRENES DE ENGRANAJES DE EJES MOVILES.

Como hemos dicho, trenes de engranajes de ejes móviles ó epicycloidales son aquellos en que los centros de todas las ruedas no están inmóviles, sino que algunos de ellos pueden girar alrededor de los ejes de las otras.

Se llaman ruedas "planetas" a las que se mueven alrededor de ejes fijos, y ruedas "satélites" a las que tienen ejes móviles, que a su vez giran alrededor de un eje fijo. Estas ruedas satélites van siempre unidas a un "brazo", el cual gira sobre un eje fijo.

(También pueden llamarse estas ruedas "solares" y "planetas", respectivamente, aunque es una nomenclatura menos usada)

NOTA: El nombre de trenes "epicycloidales" procede de que cada punto de la rueda "satélite" describe al girar sobre sí misma, y desplazarse su centro con el brazo, una epicycloide ó hipocicloide.

Tipos de trenes epicycloidales:

a).-Trenes epicycloidales simples:

Son los que tienen los ejes de entrada y salida alineados.

En estos trenes, bien el eje de entrada ó el de salida, debe girar con el brazo (En efecto, si el brazo no se moviera, tendríamos un tren de ejes fijos)

Por otra parte, bien el engranaje conductor ó el conducido, debe estar fijo.

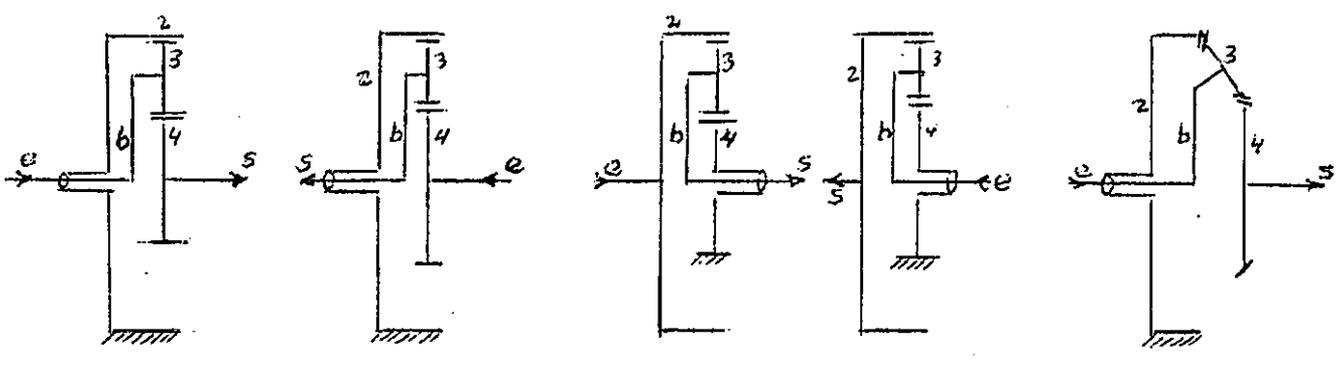
Trenes de engranajes epicycloidales simples solo hay dos tipos El tren de 3 ruedas y el de 4 ruedas.

Tanto uno como otro puede ser construido con cualquiera de los tipos de dientes vistos, como se ve en las figuras.

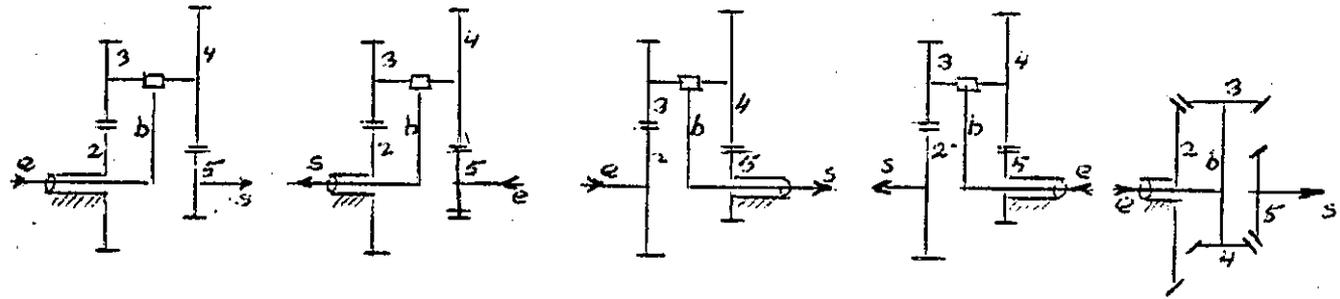
En todas ellas, la corona (planeta con dentado interior) es la rueda 2, el satélite la 3 y el planeta la 4. El brazo es b.

Por razones constructivas, siempre se hace pasar el brazo móvil por el interior de la rueda que se inmoviliza, teniendo presente que la rueda inmovilizada puede ser tanto la corona como el pl.

Trenes de tres ruedas:



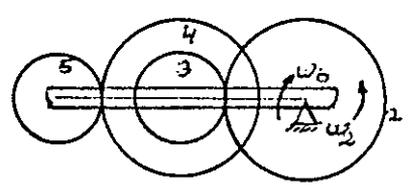
Trenes de cuatro ruedas:



b) Trenes epicicloidales de balancin:

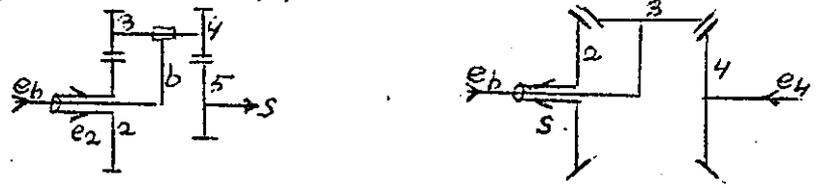
En ellos, los trenes de entrada y de salida no coinciden.

El movimiento de la primera rueda conductora y del brazo se obtienen separadamente, dando como resultado el movimiento de la ultima rueda conducida.



c) Trenes epicicloidales diferenciales:

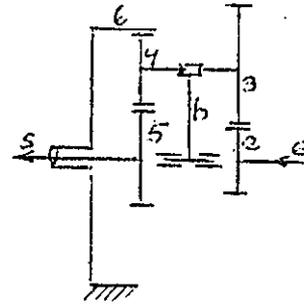
Se obtienen a partir de los trenes simples, pero sin fijar ninguna de las ruedas. Es decir, habra dos ejes de entrada y uno de salida, o viceversa. (Con estos trenes se consigue recoger en un solo eje el efecto del movimiento en otros dos ejes, ó distribuir el movimiento de un eje en otros dos).



d) Trenes epicicloidales compuestos:

Están formados por la combinación de dos trenes epicicloidales simples, como se ve en la figura.

Este tren consta del tren simple 2,3,4,5 y del 5,4,6.

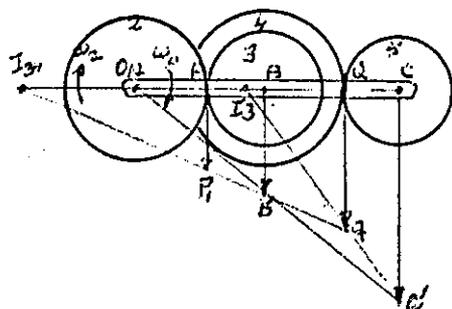


Aplicaciones de estos trenes:

- Uno de los usos más importantes de estos trenes es como mecanismos de reducción de velocidades (ó multiplicación), ya que con ellos pueden obtenerse fuertes multiplicaciones ó reducciones, con poco número de ruedas, como más adelante tendremos ocasión de comprobar.
- También pueden usarse para lograr relaciones de transmisión exactas, difíciles de lograr con trenes ordinarios,
- También son muy útiles para repartir una acción motriz entre dos ejes (diferencial de automóvil) que giran a diferente velocidad, ó para concentrar dos acciones motrices en un solo eje.
- Finalmente, y dado que en los trenes simples el engranaje conductor ó el conducido debe quedar fijo, y según se fije uno u otro se obtiene una diferente relación de transmisión, como más adelante veremos, estos trenes son empleados en las cajas de cambios de velocidad, sobre todo en las automáticas, ya que la acción de frenar una u otra rueda puede lograrse por la aplicación de frenos ó embragues movidos automáticamente en función de los requerimientos de la máquina (automóvil, etc)

3-2-1.-CALCULO DE LAS VELOCIDADES EN UN INSTANTE DADO.-

Sea el tren epicycloidal de la figura, en el cual queremos hallar la velocidad absoluta de la última rueda, conocidas las velocidades absolutas de la primera rueda y la del brazo, por aplicación de los conceptos generales estudiados en la primera parte.



Datos.- w_2 y w_b

Incog.- w_5

Soluci.-

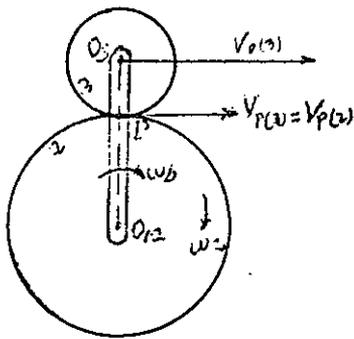
1º.-Si w_b es la velocidad angular de brazo, Bb' y Cc' son las velocidades lineales de los ejes de las ruedas 3 y 4, y 5.

2º.-Si w_2 es la velocidad angular de la rueda 2, PP_1 es la velocidad lineal absoluta del punto P.

3º.-En la rueda 3 se conoce la velocidad de P y de B; El c.i.r. de esta rueda (y de la 4) será I_{34} , hallado como se ve en la figura. Conocido I_{34} se calcula Qq , velocidad del punto Q de la rueda 4, igual a la del punto Q de 5.

4º.-Conocidas las velocidades de Q y de C de la rueda 5, se calcula la I_5 . Conocido I_5 se tiene $w_5 = Qq/QI_5$.

NOTA: Hemos de observar que si w_2 y w_b son constantes, Qq y QI_5 también lo serán, por lo cual la velocidad w_5 hallada será la velocidad angular absoluta de la rueda 5 en todo momento.

3-2-2.-ECUACION DE LA VELOCIDAD:FORMULA DE WALLIS.-

En el mecanismo de la figura, vamos a ver la relacion existente entre la velocidad angular del brazo de arrastre, la velocidad angular de la primera rueda y la de la última.

Se tendra: $|\vec{V}_{O(3)}| = w_b \cdot (r_2 + r_3)$
 $|\vec{V}_P(3)| = |\vec{V}_P(2)| = w_2 \cdot r_2$

Segun sabemos:

$$\vec{V}_{O(3)} = \vec{V}_P(3) + \vec{V}_{OP}$$

$$\vec{V}_{OP} = \vec{V}_{O(3)} - \vec{V}_P(3)$$

dado que son vectores paralelos:

$$w_3 \cdot r_3 = -w_2 \cdot r_2 + w_b \cdot (r_2 + r_3)$$

$$r_3 (w_3 - w_b) = r_2 \cdot (w_b - w_2)$$

$$\frac{w_3 - w_b}{w_b - w_2} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{z_2}{z_3}$$

multiplicando ambos miembros por (-1)

$$\frac{w_b - w_3}{w_b - w_2} = -\frac{z_2}{z_3}$$

El segundo termino no es mas que la razon de dientes de este tren, calculada como si fuera de ejes fijos. r.d. = $-z_2/z_3$

Podemos finalmente escribir

$$\frac{w_3 - w_b}{w_2 - w_b} = \text{r.d.}$$

que es la formula de Wallis, que nos da la relacion entre la velocidad angular absoluta de la ultima rueda del tren, y la primera.

NOTA: Como se comprende facilmente, la relacion obtenida para solo dos ruedas puede generalizarse para cualquier numero de ellas sin mas que aplicar lo anterior a los conjuntos sucesivos de pares de ruedas. Asi se obtendra en el caso general

$$\frac{w_n - w_b}{w_p - w_b} = \text{r.d.}$$

Podemos observar que $w_3 - w_b$ es la velocidad relativa de rotación de la rueda 3 respecto del brazo, y $w_2 - w_b$ la velocidad de rotación relativa de la rueda 2 respecto del brazo. Podemos escribir, pues:

$$\frac{w_{3/b}}{w_{2/b}} = r.d.$$

(En los trenes de ejes fijos sería: $\frac{w_{3/tierra}}{w_{2/tierra}} = r.d.$)

En otras palabras, lo anterior equivale a decir que si damos al brazo móvil de arrastre de un tren epicicloidal una velocidad igual y contraria a la que tiene realmente, ($-w_b$), el tren quedara convertido en uno ordinario, de ejes fijos; la primera rueda dara entonces $(w_p - w_b)$ r.p.m. y la ultima $(w_n - w_b)$. En estos trenes, la relación de transmisión es igual a la razón de dientes, y tendremos, como antes:

$$\frac{w_n - w_b}{w_p - w_b} = r.d.$$

NOTA: La razón de dientes da idea de como giran las ruedas dentadas entre sí, sin tener en cuenta sus velocidades absolutas, ni la velocidad del brazo.

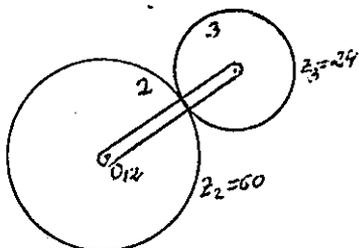
Por consiguiente, para hallar la r.d. (que siempre llevara su signo, positivo si la primera y ultima ruedas, considerando el brazo fijo, giran en el mismo sentido, ó negativo, en caso contrario) basta con considerar el brazo fijo, y calcular la r.d. como si se tratara de un tren ordinario.

NOTA: En un tren de ejes fijos, la relación de transmisión w_n/w_p (ó $w_{salida}/w_{entrada}$), era igual a la razón de dientes r.d.

$$j = \frac{w_s}{w_e} = r.d.$$

En un tren epicicloidal, la relación de transmisión $j = w_s/w_e$ (ó w_n/w_p) es diferente de la razón de dientes, tanto en módulo como en signo. Lo que es igual es la relación de transmisión relativa $w_{(s/b)}/w_{(e/b)}$ a la r.d. Por supuesto, w_s puede ser el brazo o una cualquiera de las ruedas, y viceversa. Por tanto, la j puede variar, para un mismo tren.

Ejemplo 1.-



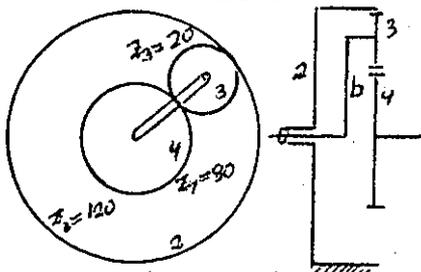
$w_2 = 200 \text{ r.p.m.}$

$w_b = -100 \text{ r.p.m.}$

$w_3 = ?$

$$\frac{w_3 - (-100)}{200 - (-100)} = -\frac{60}{24} \Rightarrow w_3 = -850 \text{ r.p.m.}$$

Ejemplo 2.-



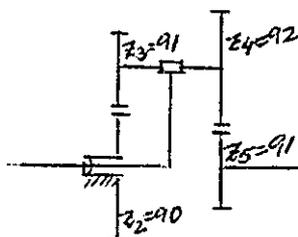
$w_2 = 0$

$w_4 = 3600 \text{ r.p.m.}$

$w_b = ?$

$$\frac{0 - w_b}{3600 - w_b} = -\frac{80}{120} \Rightarrow w_b = 1440 \text{ r.p.m.}$$

Ejemplo 3.-



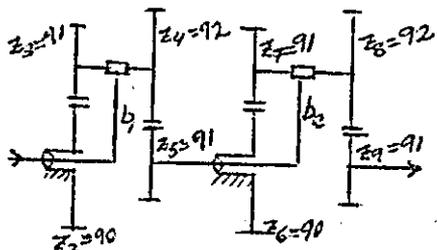
$w_2 = 0$

$w_b = 200 \text{ r.p.m.}$

$w_5 = ?$

$$\frac{w_5 - 2000}{0 - 2000} = -\frac{90}{91} - \frac{92}{91} = \frac{8280}{8281} \Rightarrow w_5 = 0,2415 \text{ rpm}$$

Ejemplo 4.-



$w_2 = 0$

$w_{b1} = 2000 \text{ r.p.m.}$

$w_9 = ?$

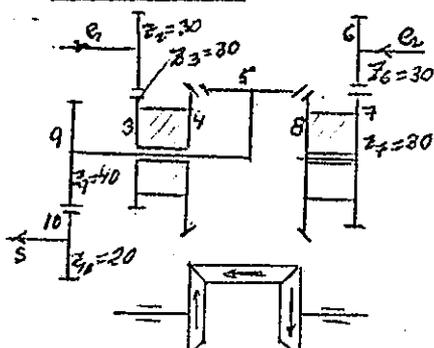
$w_5 = 0,2415 \text{ r.p.m.}$

$$\frac{w_9 - 0,2415}{0 - 0,2415} = \frac{8280}{8281} \Rightarrow w_9 = 0,00002916 \text{ rpm}$$

(equivalente a 1 revolución cada 23,8 días)

(Con este ejemplo se ven claramente las posibilidades reductoras de los trenes epicicloidales)

Ejemplo 5.-Tren diferencial



$w_2 = 300 \text{ rpm}$

$w_6 = 100 \text{ rpm}$

$w_{10} = ?$

Las velocidades a la entrada del tren diferencial serán: $w_3 = w_4 = -300 \text{ rpm}$ y

$w_7 = w_8 = -100 \text{ rpm.}$

La razón de dientes en el tren epicicloidai 4-5-8 vale -1 ,por ser

5 una rueda parasita, y las 4 y 8 iguales en numero de dientes.

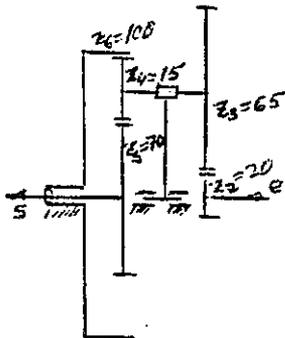
Por tanto:

$$\frac{w_8 - w_b}{w_4 - w_b} = -1 \quad \frac{-100 - w_b}{-300 - w_b} = -1 \quad w_b = -200 \text{ rpm}$$

en el tren ordinario de salida se tiene:

$$w_{10} = -200 \cdot (-40/20) = 400 \text{ rpm}$$

Ejemplo 6.- Tren epicicloidal compuesto



$$w_2 = 2000 \text{ rpm}$$

$$w_6 = 0$$

$$w_5 = ?$$

En el tren 2-3-4-5 $\frac{w_5 - w_b}{2000 - w_b} = \frac{20 \cdot 15}{65 \cdot 70} = \frac{6}{91}$

despejando $w_b = \frac{91 \cdot w_5 - 12000}{85} \quad (1)$

En el tren 6-4-5

$$\frac{w_5 - w_b}{0 - w_b} = - \frac{100}{70} \quad w_b = \frac{70}{170} \cdot w_5 \quad (2)$$

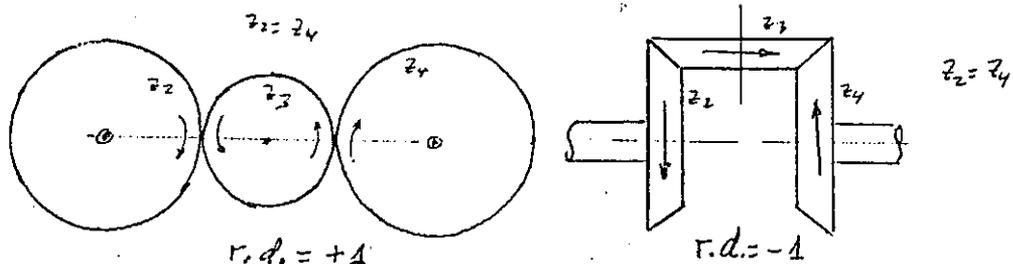
Entre las ecuaciones (1) y (2) se despeja w_5

$$w_5 = 214,3 \text{ rpm.}$$

NOTA: Se ha de tener cuidado con el valor de la razón de dientes en los trenes de ruedas cónicas, pues aparentemente tenemos tendencia a tratarlos como los de ruedas cilíndricas, y esto puede inducir a error.

En la figura se han dibujado un tren cónico de tres ruedas, con los ejes primero y último paralelos, y a su lado un tren normal, aparentemente equivalente.

Observese que el tren cónico tiene una razón de dientes negativa, y el otro tren, positiva, siendo su valor absoluto iguales en ambas.



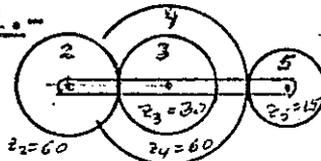
3-2-3.-METODO DE TABULACION DE VELOCIDADES.-

Teniendo en cuenta todo lo anteriormente dicho, y para facilitar el calculo de todas las velocidades intermedias, es conveniente muchas veces efectuar una "tabla de velocidades", para lo cual tendremos en cuenta:

- 1º.-En la primera fila de la tabla pondremos las velocidades angulares de cada rueda, como resultado del giro del brazo. En esta fila solo figurara la velocidad del brazo.
- 2º.-En la segunda fila pondremos inmovil el brazo, y animaremos a la rueda de velocidad conocida, de una velocidad tal, que su suma con la velocidad del brazo sea la velocidad absoluta dada de esta rueda.
- 3º.-La suma algebraica de las velocidades tabuladas en ambas filas nos dara la velocidad absoluta de cada rueda.

Como se ve, no hemos hecho mas que aplicar la formula de Wallis, diciendo que la relacion de transmision relativa respecto del brazo es igual a la razon de dientes.

Ejemplo 1.-



$$w_2 = 50 \text{ rpm}$$

$$w_b = -30 \text{ rpm}$$

$$w_3 = w_4 = ? \quad \text{y} \quad w_5 = ?$$

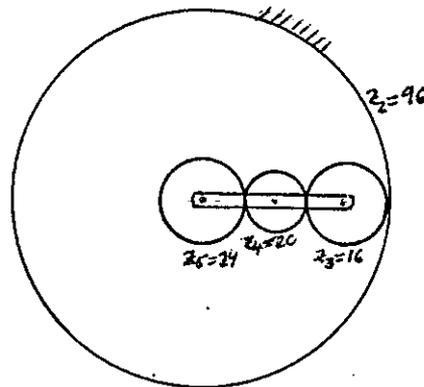
| miembro | brazo | 2 | 3-4 | 5 |
|-----------------------------|-------|-----|----------------------------------|-----|
| ruedas fijas en el brazo | -30 | -30 | -30 | -30 |
| ruedas sueltas y brazo fijo | 0 | 80 | $-\frac{60}{30} \cdot 80 = -160$ | 640 |
| velocidades absolutas | -30 | 50 | -190 | 610 |

Observese que al animar al conjunto de una velocidad opuesta a la velocidad del brazo, la rueda 2 dara -30 rpm. Como en realidad da 50 rpm, hemos de aplicarle la velocidad de 80 rpm, para que con las -30 rpm del brazo de las 50 rpm previstas.

Las demas velocidades relativas, considerando el brazo fijo, se han hallado como en los trenes ordinarios.

Ejemplo 2.-

En el tren de la figura, ¿cuanto ha de valer la velocidad del brazo para que la velocidad angular de la rueda 5 sea -75 rpm.?



$$w_2 = 0 \text{ rpm.}$$

| miembro | brazo | 5 | 4 | 3 | 2 |
|-----------------------------|-------|--|-------------------------------------|------------------|----|
| ruedas fijas al brazo | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ruedas sueltas y brazo fijo | 0 | $-\frac{96}{16} \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{20}{24}$ | $\frac{96}{16} \cdot \frac{16}{20}$ | $-\frac{96}{15}$ | -1 |
| velocidades absolutas | 1 | -3 | $29/5$ | -5 | 0 |

Como no se conoce la velocidad del brazo w_b , se ha supuesto un valor cualquiera, con la condición de que la velocidad de la corona fija w_2 sea nula, como dice el problema.

Naturalmente que con esta premisa la velocidad de 5 no será de -75 rpm, pero una vez hallada w_5 para $w_b = 1 \text{ rpm}$, podemos hallar w_b para que w_5 sea -75 rpm.

De la tabla se obtiene: $w_b/w_5 = -1/3$

$$w_b = -75 \cdot (-1/3) = 25 \text{ rpm. (como se vé, a derechas)}$$

$$w_4 = \frac{75}{-3} \cdot \frac{29}{5} = -145 \text{ rpm;}$$

$$w_3 = 75 \cdot \frac{-5}{-3} = 125 \text{ rpm.}$$

3-2-4.-CONSIDERACIONES CINEMATICAS SOBRE LOS TRENES EPI.SIMPLES.-

a)Consideraciones sobre el tren simple de tres engranajes.-

Dado que el tren simple de tres engranajes se emplea como mecanismo reductor,vamos a ver que factores intervienen decisivamente en la relacion de transmision.

-En primer lugar,y dado que podemos fijar la corona ó el planeta, veamos que ocurre en cada caso.

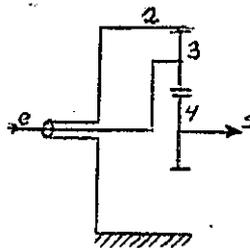
(En todo el estudio supondremos la entrada al tren por el brazo)

Corona fija

$$z_2 = 100$$

$$z_3 = 25$$

$$z_4 = 50$$



suponiendo $w_e = w_b = 1$ rpm

$$\frac{w_4 - 1}{0 - 1} = - \frac{100}{50} \Rightarrow w_4 = 3 \text{ rpm}$$

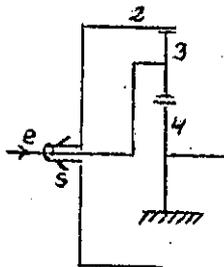
$$w_2/w_b = w_s/w_e = j = 3/1$$

Planeta fijo

$$z_2 = 100$$

$$z_3 = 25$$

$$z_4 = 50$$



suponiendo $w_e = w_b = 1$ rpm

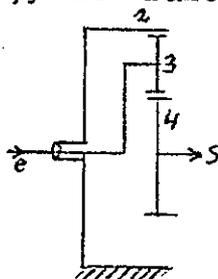
$$\frac{0 - 1}{w_2 - 1} = - \frac{2}{1} \Rightarrow w_2 = 1,5 \text{ rpm}$$

$$w_2/w_b = w_s/w_e = 1,5/1$$

Esto demuestra que a igualdad de numero de dientes (mejor, para igual razon de dientes), el mayor cambio de velocidad se consigue fijando la corona (rueda mayor)

-Veamos ahora la influencia de un cambio en la razon de dientes.

Para ello supongamos el tren simple de la figura, con la corona fija, y una razon de dientes mayor que en el ejemplo anterior.



$$z_2 = 100$$

$$z_3 = 40$$

$$z_4 = 20$$

Suponiendo $w_e = w_b = 1$ rpm

$$\frac{w_4 - 1}{0 - 1} = - \frac{100}{20} \Rightarrow w_4 = 6 \text{ rpm}$$

$$w_s/w_e = w_3/w_b = 6/1$$

Como se ve, cuanto mayor es la razon de dientes, mayor es la relacion de transmision.

-En consecuencia, en los trenes simples de tres ruedas, para obtener la máxima relación de transmisión hemos de fijar la corona, y poner, entre la corona y el planeta (el satélite es una rueda parasita) la máxima razón de dientes posible.

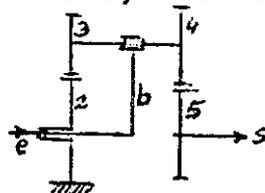
NOTA: Observese que en los trenes epicicloidales simples de tres ruedas, la relación de transmisión j es siempre positiva, y la razón de dientes siempre negativa.

Estos trenes de tres ruedas nunca permitirán que los ejes de entrada y de salida giren en sentidos opuestos.

b) Consideraciones sobre el tren simple de cuatro ruedas.-

Veamos que factores intervienen en la relación de transmisión de este tipo de trenes, suponiendo siempre que la entrada al tren se efectúa por el brazo.

-En primer lugar, y dado que se puede fijar uno de los dos planetas, vamos a ver que ocurre según se fije el mayor ó el menor.



$z_2=120$

Suponiendo $w_e=w_b=1\text{rpm}$

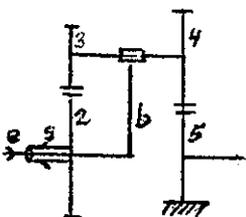
$z_3=30$

$$\frac{w_5-1}{0-1} = \frac{120 \cdot 70}{30 \cdot 20} = 14 \Rightarrow w_5 = -13\text{rpm}$$

$z_4=70$

$$w_s/w_e = -13/1$$

$z_5=20$



igual nº

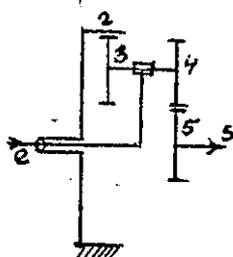
Suponiendo $w_e=w_b=1\text{rpm}$

de

$$\frac{0-1}{w_2-1} = 14 \Rightarrow w_2 = 13/14\text{rpm}$$

dientes

$$w_s/w_e = 0,93/1$$



$z_2=120$

Suponiendo $w_e=w_b=1\text{rpm}$

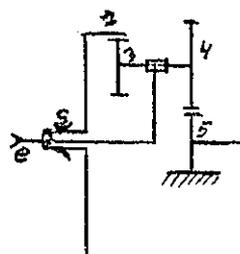
$z_3=30$

$$\frac{w_5-1}{0-1} = -\frac{14}{1} \Rightarrow w_5 = 15\text{rpm}$$

$z_4=70$

$$w_s/w_e = 15/1$$

$z_5=20$



igual nº

Suponiendo $w_e=w_b=1\text{rpm}$

dientes

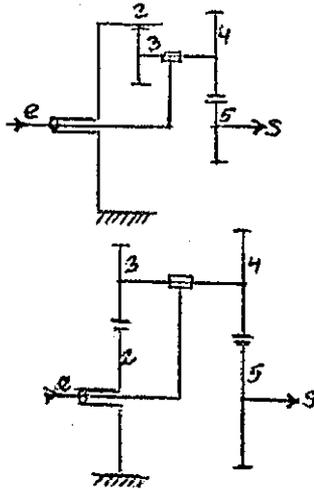
$$\frac{0-1}{w_2-1} = -\frac{14}{1} \Rightarrow w_2 = 15/14\text{rpm}$$

$$w_s/w_e = 1,07/1$$

Como se ve, para una razon de dientes dada, la mayor relacion de transmision se obtiene fijando la rueda mayor.

-Veamos ahora la influencia de una variacion de la razon de dientes en la relacion de transmision.

Sean los dos trenes de las figuras, con la rueda mayor fija, y una mayor razon de dientes que los casos anteriores respectivos.



$$z_2=120$$

$$z_3=30$$

$$z_4=75$$

$$z_5=15$$

igual

nº de

dientes

Suponiendo $w_e = 1 \text{ rpm}$

$$\frac{w_5 - 1}{0 - 1} = \frac{-120 \cdot 75}{30 \cdot 15} = -20 \Rightarrow w_5 = 21 \text{ rpm}$$

$$w_s / w_e = 21/1$$

$$\frac{w_5 - 1}{0 - 1} = 20 \Rightarrow w_5 = -19 \text{ rpm}$$

$$w_s / w_e = -19/1$$

Como se ve, al aumentar la razon de dientes aumenta la relacion de transmision.

-En consecuencia, en los trenes simples de cuatro ruedas, para lograr la maxima relacion de transmision hay que fijar la rueda mayor y colocar la maxima razon de dientes posible.

NOTA: Observese que en estos trenes la razon de dientes puede ser positiva ó negativa (depende de que tenga ó nó una rueda corona), y la relacion de transmision tambien puede ser positiva ó negativa, dependiendo del tipo de tren y de su razon de dientes.

Con trenes epicicloidales de cuatro ruedas puede lograrse que los ejes de entrada y salida giren en igual o en diferente sentido.

3-3.-ESTUDIO DINAMICO DE LOS TRENES EPICICLOIDALES.-

-Como en cualquier mecanismo, el cálculo de las fuerzas que sobre sus diferentes miembros aparecen se basa en la aplicación de las ecuaciones generales de la estática ($\sum \vec{F} = 0$ y $\sum \vec{M} = 0$) al mecanismo en su conjunto, y a cada miembro por separado.

-En este análisis de fuerzas habrá que considerar, no solo las fuerzas estáticas, sino también las dinámicas ó de inercia. Estas últimas, sin embargo, pueden ser equilibradas perfectamente, utilizando los procedimientos conocidos, ó con un adecuado diseño.

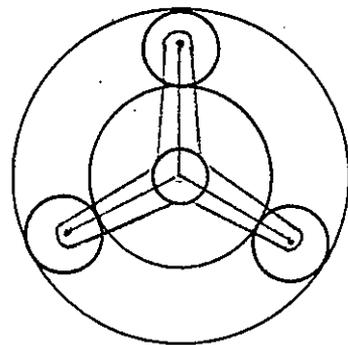


fig 1

En este sentido, los trenes epicycloidales siempre se diseñan con varios satélites, tratando siempre de que las fuerzas de inercia queden perfectamente equilibradas.

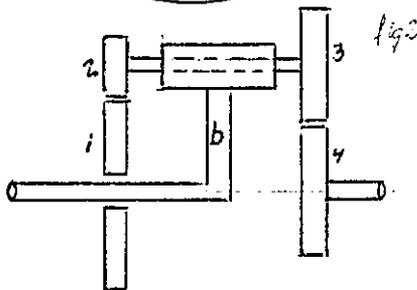


fig 2

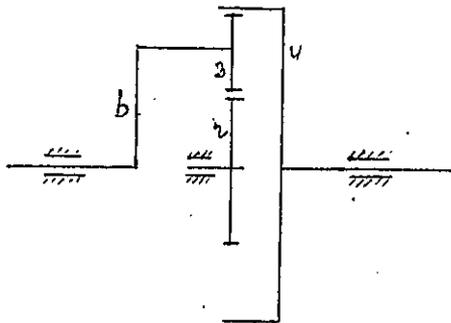
Aunque para un dimensionamiento correcto de todos los miembros de un mecanismo epicycloidal las fuerzas de inercia han de tenerse muy en cuenta, nosotros no nos ocuparemos aquí de su cálculo, aunque sí queremos hacer una importante aclaración:

En el mecanismo de la fig 1, resulta evidente que con la disposición adoptada las fuerzas de inercia se equilibran perfectamente. Sin embargo, en el mecanismo de la fig 2, al tener las ruedas 3 y 4 diferentes masas, las fuerzas de inercia que aparecen originan tensiones adicionales sobre el brazo soporte, que pueden alcanzar valores muy importantes, y que será preciso eliminar por algunos de los procedimientos estudiados, ó tenerlas en cuenta para el correcto dimensionamiento del brazo.

-A continuación vamos a efectuar el cálculo de los esfuerzos estáticos en algunos mecanismos de este tipo (los más usuales),

realizando primero un análisis global, y posteriormente otro pormenorizado a cada miembro.

Tren epicicloidal simple de tres ruedas:



Sen:

M_b el par aplicado al brazo

M_2 el par aplicado a la rueda 2

M_4 el par aplicado a la rueda 4

Como se ve, es un mecanismo de dos grados de libertad.

En él se ha de cumplir el principio de las potencias virtuales

$$M_2 \cdot w_2 + M_4 \cdot w_4 + m_b \cdot w_b = 0 \quad (1)$$

siendo los movimientos posibles los que cumplen la Ecuación de Willis

$$\frac{w_4 - w_b}{w_2 - w_b} = rd$$

$$rd \cdot w_2 + (1 - rd) \cdot w_b - w_4 = 0 \quad (2)$$

El cumplimiento simultáneo de las Ecuaciones (1) y (2) indica que:

$$\frac{M_2}{rd} = \frac{M_b}{1-rd} = \frac{M_4}{-1} \quad (3)$$

Ecuaciones que permiten hallar el par de salida (que puede ser cualquiera de los tres, por ejemplo, M_4) conocido el par de entrada (por ejemplo, M_2) será el que actúe sobre el miembro fijo (que en este supuesto será, evidentemente, el 2)

NOTA: Obsérvese que de (3) se deduce que $M_2 + M_b + M_4 = 0$ lo que ha de ser así por estar los 3 ejes alineados.

NOTA: Obsérvese que si uno de los pares es cero, también lo serán los otros dos.

- Si analizamos ahora el equilibrio decada uno de los miembros que lo componen, tendríamos:

Miembro 2

$$\Sigma \bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{F}_{12} + \bar{F}_{32} = 0 \quad (4)$$

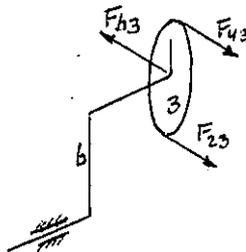
$$\Sigma \bar{M} = 0 \Rightarrow F_{32}^t \cdot R_2 = M_2$$

Miembro 3

$$\Sigma \bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{F}_{23} + \bar{F}_{b3} + \bar{F}_{43} = 0$$

$$\Sigma \bar{M} = 0 \Rightarrow F_{23}^t \cdot R_3 = F_{43}^t \cdot R_3 \Rightarrow F_{23}^t = F_{43}^t$$

de donde se deduce además:



$$F_{b3} = 2 F_{23}^t = 2 F_{43}^t \quad (5)$$

Miembro 4

$$\Sigma \bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{F}_{34} + \bar{F}_{14} = 0$$

$$\Sigma \bar{M} = 0 \Rightarrow F_{34}^t \cdot R_4 = M_4 \quad (6)$$

Miembro bfazo

$$\Sigma \bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{F}_{1b} + \bar{F}_{3b} = 0$$

$$\Sigma \bar{M} = 0 \Rightarrow F_{3b} \cdot R_b = F_{3b} \cdot (R_2 + R_3) = M_b \quad (7)$$

Las expresiones (4)(5)(6) y (7) nos permiten resolver cualquier problema de esfuerzos en estos trenes.

NOTA: Partiendo de estas Ecuaciones también puede llegarse a las Ecuaciones (3) anteriores.

En efecto:

$$M_b = F_{3b} \cdot R_b = 2 F_{23}^t \cdot R_b = \frac{2M_2}{R_2} R_b = \frac{2M_2}{R_2} (R_2 + R_3)$$

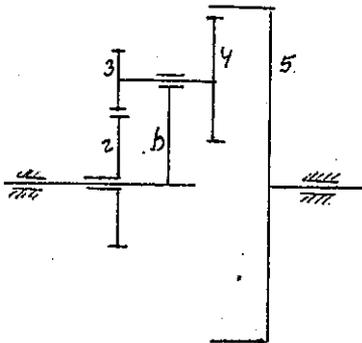
$$R_4 = R_2 + 2R_3 \implies 2R_3 = R_4 - R_2$$

$$M_b = \frac{M_2}{R_2} (2R_2 + R_4 - R_2) = M_2 \left(1 + \frac{R_4}{R_2}\right)$$

Como en estos trenes, $rd = -\frac{R_2}{R_4}$

$$M_b = -M_2 \left(\frac{1}{rd} - 1\right)$$

Tren epicicloidal simple de 4 ruedas:



Sean M_b el par aplicado al brazo, M_2 el par aplicado a la rueda 2, M_5 el par -- aplicado a la rueda 5 (todos ellos son pares exteriores: por ejemplo, M_b puede ser el par de entrada, M_5 el de salida y M_2 , si esta es la rueda fija, la reacción del bastidor. Igualmente podría suponerse cualquier otra combinación posible).

- En todas ellas se ha de cumplir el principio de las potencias virtuales:

$$M_2 \cdot w_2 + M_b \cdot w_b + M_5 \cdot w_5 = 0 \quad (1)$$

Los movimientos posibles son los que cumplen la ecuación de Willis:

$$\frac{w_5 - w_b}{w_2 - w_b} = rd$$

$$w_2 \cdot rd + (1 - rd) w_b - w_5 = 0 \quad (2)$$

El cumplimiento simultáneo de las Ecuaciones (1) y (2), indica que:

$$\frac{M_2}{rd} = \frac{M_b}{1 - rd} = \frac{M_5}{-1} \quad (3)$$

Ecuaciones que permiten, conocido el par de entrada (que puede ser M_2 , M_b o M_5) hallar el par de salida (que también puede ser cualquiera de los tres) y la reacción del miembro que se fije al bastidor (el tercero no elegido anteriormente).

NOTA: Obsérvese que en estos trenes también se cumple que $M_2 + M_b + M_5 = 0$, así como que si uno de ellos es cero, también lo son los otros.

- Si analizamos ahora el equilibrio de cada uno de los miembros, obtenemos:

Miembro 2

$$\Sigma \bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{F}_{12} + \bar{F}_{32} = 0$$

$$\Sigma \bar{M} = 0 \Rightarrow F_{32}^t \cdot R_2 = M_2 \quad (4)$$

Miembro 3-4

$$\Sigma \bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{F}_{23} + \bar{F}_{b34} + \bar{F}_{54} = 0$$

$$\Sigma \bar{M} = 0 \Rightarrow F_{23}^t \cdot R_3 = F_{54}^t \cdot R_4 \quad (5)$$

Miembro 5

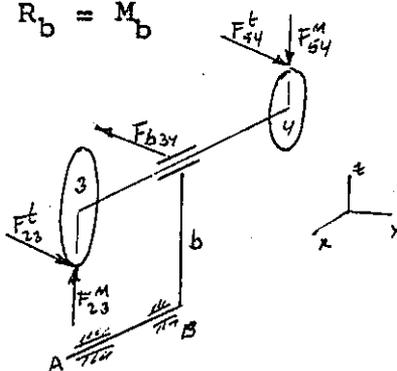
$$\Sigma \bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{F}_{45} + \bar{F}_{15} = 0$$

$$\Sigma \bar{M} = 0 \Rightarrow F_{45}^t \cdot R_5 = M_5 \quad (6)$$

Miembro brazo

$$\Sigma \bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{F}_{1b} + \bar{F}_{(3-4)b} = 0$$

$$\Sigma \bar{M} = 0 \Rightarrow F_{34b}^t \cdot R_b = M_b \quad (7)$$



Obsérvese que en este tipo de trenes, al ser $|F_{54}^t| \neq |F_{23}^t|$ el brazo queda sometido a un momento torsor según el eje z-z (que solo puede ser contrarrestado situando un par de cojinetes A y B).

- Las expresiones (4) (5), (C) y (Z) permiten calcular los esfuerzos desconocidos, en función de los esfuerzos dados.

NOTA: Partiendo de estas Ecuaciones también puede llegarse a las Ecuaciones (3) anteriores: En efecto:

$$F_{23} \cdot R_3 = F_{54}^t \cdot R_4 \Rightarrow \frac{M_2}{R_2} \cdot R_3 = \frac{M_5}{R_5} \cdot R_4$$

$$M_5 = M_2 \cdot \frac{R_3 \cdot R_5}{R_2 \cdot R_4} = M_2 \left(-\frac{1}{rd} \right)$$

Por otra parte:

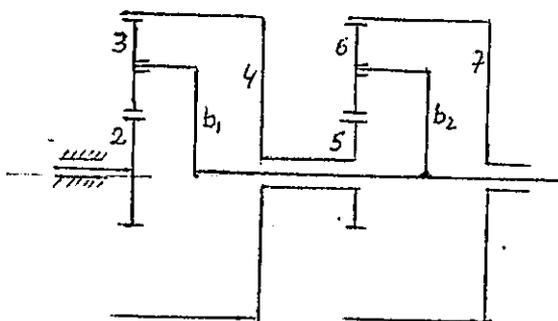
$$\begin{aligned} M_b &= F_{34b} \cdot R_b = (F_{23}^t + F_{54}^t) R_b = \left(\frac{M_2}{R_2} + \frac{M_5}{R_5} \right) R_b = \\ &= \left(\frac{M_2}{R_2} + \frac{M_2}{R_5} \cdot \frac{R_3 \cdot R_5}{R_2 \cdot R_4} \right) \cdot R_b = M_2 \left(\frac{R_b}{R_2} + \frac{R_b}{R_5} \cdot \frac{R_3 R_5}{R_2 R_4} \right) \end{aligned}$$

$$= M_2 \left[\frac{R_2 + R_3}{R_2} + \frac{R_5 - R_4}{R_5} \cdot \frac{R_3 R_5}{R_2 R_4} \right]$$

$$= M_2 \left[1 + \frac{R_3}{R_2} \left(\frac{1}{\frac{R_2 R_4}{R_3 R_5}} \right) - \frac{R_4 R_3 R_5}{R_5 R_2 R_4} \right]$$

$$= M_2 \left(1 + \frac{1}{\frac{R_2 R_4}{R_3 R_5}} \right) = M_2 \left(1 - \frac{1}{rd} \right)$$

Tren epicicloidal compuesto:



Sean

- M_2 el par aplicado en 2
- M_4 el par aplicado en 4 (por medio de un freno de cinta, por ejemplo)
- M_7 el par aplicado en 7
- $M_{b1} = M_{b2}$ el par aplicado al brazo
= M_b

- En estas condiciones se ha de cumplir:

$$M_2 \cdot w_2 + M_4 \cdot w_4 + M_7 \cdot w_7 + M_b \cdot w_b = 0 \quad (1)$$

- Tercera condición, la conservación de los esfuerzos.

- y también, la ecuación de los movimientos posibles:

$$\frac{w_4 - w_{b1}}{w_2 - w_{b1}} = rd_1 \quad \text{tren 1 (2-3-4-b}_1)$$

$$w_4 \equiv w_5$$

$$\frac{w_7 - w_{b2}}{w_4 - w_{b2}} = rd_2 \quad \text{tren 2 (5-6-7-b}_2)$$

ecuaciones que pueden escribirse:

$$rd_1 \cdot w_2 - w_4 + (1 - rd_1) \cdot w_b = 0 \quad (2)$$

$$rd_2 w_4 - w_7 + (1 - rd_2) w_b = 0 \quad (3)$$

Como la ecuación (1) ha de cumplirse con cualquier conjunto de velocidades que cumplan simultáneamente las Ecuaciones (2) y (3), los coeficientes de las w en la (1) han de ser una combinación lineal de los coeficientes de las w en (2) y (3), esto es:

$$\begin{aligned} M_2 &= \alpha \cdot rd_1 + \beta \cdot 0 \\ M_4 &= \alpha(-1) + \beta \cdot rd_2 \\ M_7 &= \alpha(0) + \beta(-1) \\ M_b &= \alpha(1 - rd_1) + \beta(1 - rd_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Eliminando los parámetros de proporcionalidad α y β queda un sistema de 2 Ecuaciones con 4 incógnitas.

Fijadas dos de ellas, pueden hallarse las otras dos.

NOTA: También puede observarse que se cumple:

$$M_2 + M_4 + M_7 + M_b = 0$$

por la misma razón de antes.

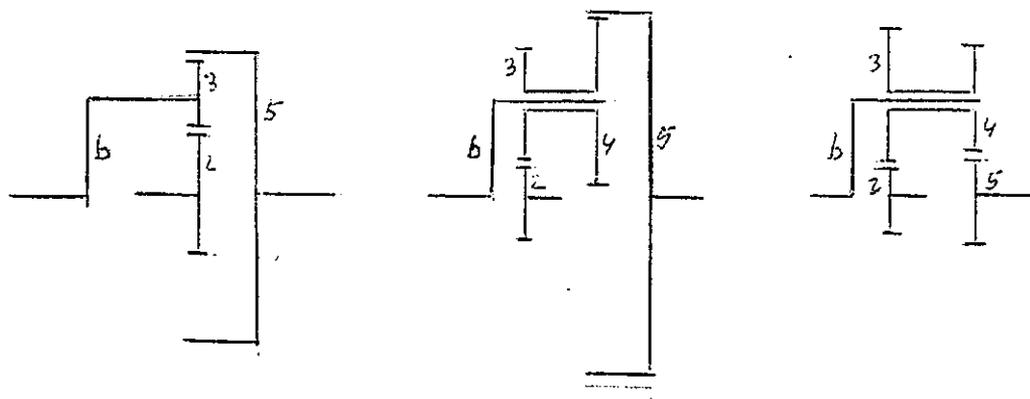
NOTA: Los dos ejemplos de trenes epicicloidales analizados poseen ambos dos grados de libertad. Por ello, es preciso fijar dos incógnitas, para hallar las otras dos. En general, si el sistema tiene G grados de libertad y actúan N pares exteriores sobre los miembros coaxiales, conociendo $G-N$ pares, quedan determinados los otros G (tal es el caso de algunas cajas de transmisión automáticas)

3-3-2.- RENDIMIENTO DE LOS TRENES EPICICLOIDALES.-

- Al contrario de los trenes de ejes fijos, en los que el rendimiento es bastante alto (95;99%) y de valor constante, en los trenes epicicloidales el rendimiento varía mucho de unos tipos a otros, y dentro de cada uno de ellos, varía también según sea el miembro que actúe como entrada y como salida, así como el que se fije.

En algunos casos, el rendimiento de estos trenes alcanza valores extremadamente bajos, lo cual supone una importante limitación en su uso.

A continuación vamos a realizar un estudio del rendimiento de estos trenes, como los representados en la figura. En todos ellos se denotará por b el brazo, 2 y 5 las ruedas extremas (una de las cuales se fijará siempre).



Sean M_2, M_5 y M_b los pares exteriores actuantes.

Como hemos visto, se ha de cumplir:

$$M_2 \cdot w_2 + M_5 \cdot w_5 + M_b \cdot w_b = 0 \quad (1)$$

$$M_2 + M_5 + M_b = 0 \quad (2)$$

$$rd = \frac{w_5 - w_b}{w_2 - w_b} = \frac{w_5/b}{w_2/b}$$

- El rendimiento del tren fijo (con el brazo inmovilizado) será conocido, en función del rendimiento de los diferentes engranajes que lo forman $\eta_o = \eta_o(2-3) \cdot \eta_o(4-5)$

- Sin embargo, cuando se quiere expresar el valor de este rendimiento como cociente entre la potencia resistente y la potencia motora nos encontramos con la ambigüedad de no saber cual de las ruedas 2 y 5 es la resistente y cual la motora.

Pero es evidente que solo caben dos posibilidades:

- a).- Si 2 es la rueda motora

$$\eta_0 = \frac{-w_5/b \cdot M_5}{w_2/b \cdot M_2} \quad (4)$$

- b).- Si 5 es la rueda motora

$$\eta_0 = \frac{-w_2/b \cdot M_2}{w_5/b \cdot M_5} \quad (5)$$

(El signo (-) en el numerador señala que el par resistente tiene sentido contrario a la velocidad angular).

- Por otro lado, el rendimiento del tren epicicloidal sí podrá expresarse unívocamente, pues siempre sabremos cual es el organo de entrada y cual el de salida, considerando que uno de ellos ha de ser necesariamente el brazo. Supongamos que este es el elemento motor. Entonces el rendimiento del tren puede expresarse (si 2 es el miembro fijo):

$$\eta = \frac{-w_b \cdot M_5}{w_2 \cdot M_b} \quad (6)$$

- Como lo que se pretende es encontrar una relación para η en función de los parámetros η_0 y rd , hemos de combinar adecuadamente las Ecuaciones (2), (4) y (5) y (6).

El problema se plantea en cual de las Ecuaciones (4) y (5) usar en cada caso.

La regla que se empleará será la de analizar el signo de $w_{5/b}$ y el de M_5 en ellas.

Si ambas tienen igual signo, se empleará la Ecuación (5) y si tienen signos diferentes, habrá que emplear la Ecuación (4). (Como se ve, cuando $w_{5/b} \cdot M_5$ tiene signo (-) figura en el numerador, y el tren de ejes fijos será el tipo a)

NOTA: Obsérvese que en el tren real, M_5 y w_5 tienen sentidos contrarios.

De la Ecuación (3) obtenemos una relación entre w_5 y $w_{5/b}$:

$$rd = \frac{w_{5/b}}{w_2/b} = \frac{w_5 - w_b}{0 - w_b}$$

$$w_5 - w_b + rdw_b = 0$$

$$w_5 = (1 - rd)w_b \quad (7)$$

$$w_{5/b} = w_5 - w_b = w_5 - \frac{w_5}{1 - rd} = \frac{1 - rd - 1}{1 - rd} w_5$$

$$w_{5/b} = \frac{rd}{rd - 1} \cdot w_5 \quad (8)$$

para que $w_{5/b}$ y w_5 tengan igual signo ha de ser:

$$\frac{rd}{rd - 1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} rd > 1 \\ rd < 0 \end{cases}$$

Si $rd > 1$ o $rd < 0$, $w_{5/b}$ tiene el mismo signo que w_5 . Pero en el tren real, M_5 tiene sentido contrario que w_5 , por lo cual M_5 y $w_{5/b}$ tienen sentidos contrarios, debiendo usarse, en consecuencia, la Ecuación (4).

En resumen, para este caso, el valor del rendimiento η , en función de η_0 y rd puede hallarse utilizando las tres ecuaciones

$$M_2 + M_5 + M_b = 0 \quad (\text{I})$$

$$\eta_o = \frac{-w_5/b \cdot M_5}{w_2/b \cdot M_2} \quad (\text{II})$$

$$\eta = \frac{-w_5 \cdot M_5}{w_b \cdot M_b} \quad (\text{III})$$

para ello basta eliminar M_b , M_5 y M_2 entre ellos.

De la Ecuación (II) obtenemos:

$$M_2 \cdot \eta_o = -M_5 \cdot rd \Rightarrow M_5 = -\frac{\eta_o}{rd} M_2$$

sustituyendo en (I)

$$M_2 - \frac{\eta_o}{rd} M_2 + M_b = 0$$

$$M_2 = \frac{1}{1 - \frac{\eta_o}{rd}} M_b = \frac{rd}{rd - \eta_o} M_b$$

sustituyendo en (I)

$$M_5 = -M_2 - M_b = -\frac{rd}{rd - \eta_o} M_b - M_b$$

$$M_5 = \frac{\eta_o}{rd - \eta_o} M_b$$

Como además $\frac{w_5}{w_b} = 1 - rd$ (de 7) queda al sustituir en (III)

$$\eta = - (1 - rd) \frac{\frac{\eta_o}{rd - \eta_o} M_b}{M_b}$$

$$\eta = - \frac{(1-rd) \eta_0}{rd - \eta_0} \quad (9)$$

- En el caso de ser $rd > 0$ y $rd < 1$, las ecuaciones seran:

$$M_2 + M_5 + M_b = 0$$

$$\eta_0 = \frac{-w_{2/b} \cdot M_2}{w_{2/b} \cdot M_5}$$

$$\eta = \frac{-w_5 \cdot M_5}{w_b \cdot M_b}$$

Operando como antes conducen a

$$\eta = \frac{rd - 1}{rd \cdot \eta_0 - 1} \quad (10)$$

NOTA: Podrian realizarse estudios paralelos, suponiendo que la rueda fija fuera la 5 en lugar de la 2, y que el brazo fuera la salida del tren, en lugar de la entrada, como se ha supuesto.

La tabla adjunta recoge todos estos valores:

| | Ent. | Sal. | Fijo | M_b | M_2 | M_5 | η |
|------------------|------|------|------|-----------------------------|--|------------------------------------|--------------------------------------|
| rd > 1 rd < 0 | b | 5 | 2 | M_b | $\frac{\eta_0}{rd - \eta_0} \cdot M_b$ | $\frac{rd}{\eta_0 - rd} \cdot M_b$ | $(1-rd) \frac{\eta_0}{\eta_0 - rd}$ |
| | 5 | b | 2 | $(rd \cdot \eta_0 - 1) M_5$ | M_5 | $-rd \cdot \eta_0 \cdot M_5$ | $\frac{1 - \eta_0 \cdot rd}{1 - rd}$ |

| | | | | | | | |
|------------------|---|---|---|--|---|---|--|
| rd > 0 rd < 1 | b | 5 | 2 | M_b | $\frac{1}{rd \cdot \eta_0 - 1} \cdot M_b$ | $\frac{rd \cdot \eta_0}{1 - rd \cdot \eta_0} \cdot M_b$ | $\frac{\eta_0 - 1}{rd \cdot \eta_0 - 1}$ |
| | 5 | b | 2 | $\frac{rd - \eta_0}{\eta_0} \cdot M_5$ | M_5 | $\frac{-rd}{\eta_0} \cdot M_5$ | $\frac{\eta_0 - rd}{\eta_0 - \eta_0 \cdot rd}$ |

De todo lo expuesto se deduce (teniendo presente que $\eta_0 \approx 0,96 \div 0,98$) que los trenes epicicloidales de tres ruedas, y los de cuatro ruedas con unacorona, en los que $rd < 0$, el rendimiento siempre sera alto, incluso mayor que η_0 .

Sin embargo, los trenes de cuatro ruedas, con dos ruedas corona o ninguna, en los que $rd > 0$, habra casos en que sea alto y otros en que sea muy bajo, incluso cero.

4-1.-CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL DISEÑO CINEMÁTICO DE TRENS DE ENGRANAJES DE EJES FIJOS.-

Segun se ha dicho anteriormente, la creacion de un tren de engranajes surge como consecuencia de la resolucio de alguno de estos problemas

- a) Transmitir el movimiento entre dos ruedas muy separadas
- b) Variar el sentido de marcha entre dos ejes
- c) Transmitir una relacion de velocidades dada entre dos ejes, en forma exacta o aproximada.

La necesidad de crear un tren puede ser debida tanto a una relacion de transmision elevada, imposible de lograr con dos ruedas, como, aun siendo pequena la relacion de transmision, sea imposible fabricar dos ruedas con un numero de dientes muy elevado.

- d) Transmitir una relacion de velocidades incommensurable $\sqrt{2}$, π , etc para lo cual, el empleo de mayor numero de ruedas da cada vez resultados mas exactos.

El diseño de un tren de engranajes para resolver cualquiera de los problemas anteriores no es un problema cuya solución resulte de una ecuacion matematica, sino que es un compromiso juicioso entre una serie de requisitos del proyecto y de limitaciones practicas que llevaran, en general, a multiples soluciones, dentro de las cuales la mas sencilla, robusta y economica sera siempre la mas aceptable.

Dentro de los factores que influyen en el diseño de un tren de engranajes tenemos que considerar:

- a) Razon de velocidades y sentido de rotacion

No siempre una relacion de velocidades exacta es posible de conseguir, habiendo de recurrirse a soluciones aproximadas. Esto depende, naturalmente, de las exigencias del problema.

Igualmente, el sentido de rotacion del eje de salida puede ser, ó no, importante.

- b) Numero de engranajes

En general, la soluc ion que emplee menos ruedas es siempre mejor.

Sin embargo, a veces, un par de engranajes extra, pequeños y baratos compensa lo que cuesta usar un número menor de ruedas grandes.

c) Uso de engranajes comerciales

Siempre resulta más económico, usar ruedas existentes en el mercado que construir las expresamente.

Sin embargo, el empleo de ruedas normalizadas de pocos dientes no puede efectuarse alegremente; es necesario tener siempre en cuenta las posibles interferencias, pues el hecho de que una rueda sea normalizada no garantiza un correcto funcionamiento con todas las demás de igual paso.

En general, y solo a título de referencia, no es recomendable el empleo de ruedas de menos de 12 dientes ni mayores de 200.

d) Relaciones uniformes de los engranajes:

Al dividir la relación de velocidades j en una serie de relaciones de transmisión parciales, ha de procurarse que estas sean lo más iguales posible, con objeto de reducir el número de ruedas diferentes. El empleo de ruedas iguales es muy conveniente cuando estas han de ser expresamente fabricadas.

También es norma constructiva que los valores de las relaciones parciales de transmisión no rebasen un cierto límite, estando este comprendido entre 5 y 7 (en casos excepcionales se puede llegar hasta 12), para evitar desgastes excesivos, ruidos, roturas, etc.

e) Requisitos de montaje:

Una vez calculado el número de ruedas y el número de dientes de cada una, calcularemos, en función de la potencia a transmitir el módulo (ó paso) de los dientes, y con él, el diámetro de cada rueda. El diámetro de las ruedas regulará las distancias entre ejes y en resumidas cuentas, el tamaño del tren y la disposición de las ruedas en el mismo.

La posición de los ejes de entrada y salida puede ser ó no importante. Como veremos más adelante, el diseño de trenes en que los ejes de entrada y salida estén alineados requiere algunas considera-

ciones extra sobre el paso de las ruedas y distancias entre ejes.
En general, y para todos los trenes de engranajes, siempre ha de irse a las soluciones mas compactas.

El camino a seguir para la resoluci3n de estos trenes sera el siguiente, partiendo de una relaci3n de velocidades dada $j = a/b$

1º.-Si no se especifica nada sobre engranajes disponibles, se entiende que cualquier rueda puede ser fabricada, siempre que su numero de dientes este comprendido entre 12 y 200.

2º.-Calculo del numero minimo de pares de ruedas:

Teniendo en cuenta que la maxima relaci3n parcial de transmisi3n permitida es de $1/7$ (6 $7/1$), se calcula facilmente el numero de veces que necesitamos repetir esta relaci3n parcial para igualar 6 superar la relaci3n de velocidades dada j .

Por ejemplo, si $j = 1/300$, necesitaremos $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{343} > \frac{1}{300}$

es decir, necesitaremos tres pares de ruedas.

Si se ha de utilizar necesariamente una serie de engranajes existentes, la maxima relaci3n parcial de transmisi3n vendra fijada por el cociente entre los dientes de las ruedas mayor y menor disponibles (siempre dentro de los limites admisibles).

3º.-Calculo de las relaciones parciales de transmisi3n:

A continuaci3n se descompone la relaci3n parcial de transmisi3n j en el producto de relaciones parciales, en numero igual al de pares de ruedas calculado.

El sistema de descomposici3n se vera en cada caso con unos ejemplos. Sin embargo hay que procurar siempre que las relaciones parciales de transmisi3n sean lo mas parecidas posible.

4º.-Fijaci3n del numero de dientes:

Una vez conocidas las relaciones parciales de transmisi3n, el numero de dientes de cada rueda se tendra sin mas que multiplicar numerador y denominador por un factor conveniente, procurando que el numero de dientes que se obtenga para cada rueda esta compre

dido entre 12 y 240 (cuanto menor sea el número de dientes, mejor). También debe procurarse que sean iguales el mayor número de ruedas posible.

En el caso de trenes de inversión, habrá de tenerse en cuenta consideraciones sobre la distancia entre ejes, etc, como se verá en su momento.

Finalmente, si se dispone de un cierto número de ruedas hay que ajustarse a ellas para fabricar el tren, teniendo aquellas que cumplan las relaciones parciales de transmisión obtenidas.

5º.-Por último se hace un esquema completo del tren, procurando que sea lo más compacto posible. Este esquema deberá hacerse necesariamente a escala, dando más ó menos la posición exacta de los cojinetes de apoyo, y la forma que ha de llevar el bastidor ó soporte.

4-2.-DISEÑO SIMPLIFICADO DE LOS SISTEMAS DE ENGRANAJES DE EJES FIJOS SIN RESTRICCIONES CONSTRUCTIVAS.-

A continuación, y por medio de algunos ejemplos, vamos a efectuar un estudio detallado del cálculo de los trenes de engranajes de ejes fijos, en los que no se hace ninguna consideración sobre la posición de estos ejes, ni del tamaño de las ruedas, etc. Solo se pide conservar entre los ejes de entrada y salida la relación de velocidades dada.

NOTA: A título de ejemplo, en algunos casos resolveremos el problema haciendo uso de una serie de engranajes comerciales disponibles.

1º TIPO.-

La relación de transmisión dada es una fracción irreducible de números primos ó nó, pero ambos menores que $z_{\max} = 200$

EJEMPLO:

Fabricar un tren para lograr una relación de transmisión $w_s/w_e = 58/1$

1º.-Como no se especifica nada se entiende que las ruedas podran construirse de cualquier número de dientes comprendido entre 12 y 200

2º.-Cálculo del número mínimo de pares de ruedas:

Admitiendo una relación parcial de transmisión máxima de 7, vemos que necesitaremos 3 pares de ruedas $\frac{7}{1} \cdot \frac{7}{1} \cdot \frac{7}{1} = \frac{343}{1} > \frac{58}{1}$

Observese que dos pares con la relación máxima 7/1 nos darían 49/1, que no llega a alcanzar la relación pedida.

3º.-Cálculo de las relaciones parciales de transmisión:

Las tres relaciones parciales de transmisión podían ser, exactamente: $\frac{7}{1} \cdot \frac{7}{1} \cdot \frac{58}{49}$. Sin embargo, como la tercera relación es muy diferente de las dos primeras, y las tres deberán ser lo más iguales posible, podemos tomar: $\frac{4}{1} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{58}{16}$, que son bastante precisas: 4/1, 4/1, 3,6/1.

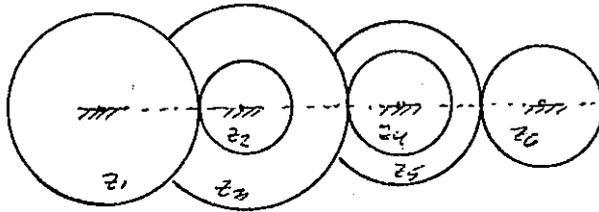
4º.-Fijación del número de dientes:

Suponiendo el piñón más pequeño de 12 dientes, tendríamos:

$$\frac{4 \cdot 12}{1 \cdot 12} \cdot \frac{4 \cdot 12}{1 \cdot 12} \cdot \frac{58}{16} = \frac{48}{12} \cdot \frac{48}{12} \cdot \frac{58}{16}$$

Como vemos, solo hemos de fabricar 4 tipos de ruedas.

5º.-Dibujo del tren:



$$\begin{aligned} z_1 &= 48 \\ z_2 &= 12 \\ z_3 &= 48 \\ z_4 &= 12 \\ z_5 &= 58 \\ z_6 &= 16 \end{aligned}$$

NOTA: Como se observa, el problema presenta infinitas soluciones.

Sin embargo, una de las ruedas siempre tendrá los dientes que indica el numerador de la relación de transmisión (ó el denominador, si fuera $j = 1/58$).

NOTA: Si dispusiéramos de una serie de ruedas en el mercado, habríamos de modificar las tres fracciones en que se ha descompuesto $58/1$ para lograr que todas las ruedas tubieran los dientes disponibles.

2º TIPO.-

La relación de transmisión dada es una fracción irreducible, con el numerador (ó el denominador) mayor que z_{\max} , pero este número elevado ha de ser necesariamente NO PRIMO.

EJEMPLO:

Fabricar un tren para lograr la relación de transmisión $w_s/w_e = 1/300$

1º.- Como no se especifica nada, se supone que las ruedas se construyen expresamente, estando sus dientes limitados entre 12 y 200.

2º.- Cálculo del número mínimo de pares de ruedas:

Suponiendo una relación parcial máxima de 7, necesitaremos 3 pares de ruedas: $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{343} > \frac{1}{300}$

3º.- Cálculo de las relaciones parciales de transmisión:

Exactamente, pueden ser: $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{49}{300}$. Las tres fracciones son muy parecidas, pero al ser 49 y 300 primos (al no poder dividir 49 por 300), no se pueden fabricar ruedas con estos números de dientes.

Tomaremos: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{300}$, que son relaciones parciales bastante parecidas, pues $64/300 = 1/4,6$, aun a costa de colocar un par más, pues si ponemos $1/6 \cdot 1/7 \cdot 42/300$, esta última es mayor que $1/7$.

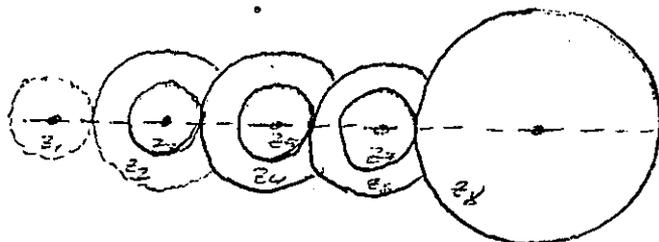
4º.-Fijacion del numero de dientes:

Suponiendo los piñones de 12 dientes, tendríamos:

$$\frac{12}{48} \cdot \frac{12}{48} \cdot \frac{12}{48} \cdot \frac{32}{150}$$

5º.-Esquema del tren:

$$\begin{array}{lll} z_1=12 & z_4=48 & z_7=32 \\ z_2=48 & z_5=12 & z_8=150 \\ z_3=12 & z_6=48 & \end{array}$$



NOTA: Como se observa, el problema presenta infinitas soluciones.

Sin embargo, el hecho de ser 300 divisible (no primo) indica que siempre se podrá lograr todas las ruedas de menos de $z_{max}=200$ (Como vemos, siempre se han de poner relaciones parciales de transmision iguales ó diferentes, de forma que su producto, que forma el numerador de la ultima fraccion sea divisible por 300)

EJEMPLO 2.-

El mismo problema, pero ahora solo disponemos de ruedas del siguiente numero de dientes: Entre 12 y 24, todas; entre 24 y 100, las pares; entre 100 y 120, de 4 en 4.

1º.-Calculo del numero de pares de ruedas:

Por las ruedas disponibles, podemos lograr una relacion parcial de transmision maxima de $120/12 = 10/1$, que es superior a la maxima admisible de $7/1$.

2º.-Calculo de las relaciones parciales de transmision:

Al igual que antes, llegaríamos a $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{300}$

3º.-Calculo del numero de dientes:

Tomando el piñon mas pequeño disponible, quedarn las ruedas:

$$\frac{12}{48} \cdot \frac{12}{48} \cdot \frac{12}{48} \cdot \frac{32}{150} \quad \text{no tenemos rueda de 150 dientes.}$$

Tomamos las relaciones: $\frac{12}{48} \cdot \frac{12}{48} \cdot \frac{12}{48} \cdot \frac{16}{75}$

Tampoco tenemos rueda de 75 dientes. En consecuencia, hemos de modificar alguna de las fracciones procurando que el numerador de 300 sea divisible por 3, 5, etc

Tomamos: $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{100}{300} \quad \frac{12}{60} \cdot \frac{12}{60} \cdot \frac{12}{60} \cdot \frac{20}{50}$ (disponemos de todas estas ruedas)

4º.- Esquema del tren:

3º TIPO.-

La relación de transmisión dada es una fracción irreducible, cuyo numerador y denominador, no primos, son mayores que z_{\max} , pero sus factores primos son menores que z_{\max} .

EJEMPLO:

Fabricar un tren que tenga $w_s/w_e = 369/46$

1º.-Como no se indica nada, las ruedas pueden construirse de cualquier número de dientes, entre 12 y 200

2º.-Cálculo del número mínimo de pares de ruedas:

Admitiendo una relación parcial de transmisión máxima de 7, como $369/46 = 8,023$, habremos de colocar dos pares de ruedas.

3º.-Cálculo de las relaciones parciales de transmisión:

Descomponiendo la fracción en sus factores primos, tenemos:

$$369/46 = 3 \cdot 3 \cdot 41 / 2 \cdot 23 = 9 \cdot 41 / 2 \cdot 23$$

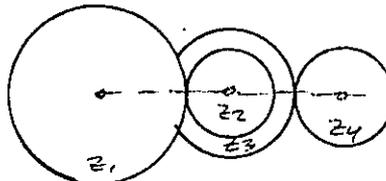
4º.-Cálculo del número de dientes:

Suponiendo el piñón de 12 dientes: $\frac{9 \cdot 6}{2 \cdot 6} \cdot \frac{41}{23} = \frac{54}{12} \cdot \frac{41}{23}$

Como vemos, también se presentan múltiples soluciones.

5º.-Esquema del tren:

$$\begin{array}{ll} z_1 = 54 & z_3 = 41 \\ z_2 = 12 & z_4 = 23 \end{array}$$



NOTA: Observese que si los factores primos 41 y 23 hubieran sido mayores de z_{\max} , no podíamos haber construido el tren de ninguna forma. Este caso lo veremos en el siguiente punto.

NOTA: Si hubiera que ajustarse a ruedas del mercado, el problema se habría resuelto igual al caso anterior.

4º TIPO.-

La relación de transmisión dada es una fracción irreducible, con el numerador y el denominador primos, ó con factores primos mayores de z_{\max}

EJEMPLO:

Fabricar un tren que tenga $w_s/w_e = 383/649$

1º.-Como no se indica nada, fabricaremos las ruedas.

2º.-Calculo del numero minimo de pares de ruedas:

Como $383/649 \approx 1/2$,basta con solo dos ruedas

3º.-Calculo del numero de dientes:

No podemos fabricar ruedas con un numero de dientes tan grande. Tampoco,al ser ambos numeros primos,podemos fabricar un tren de dos pares de ruedas.

Hemos de ir,por tanto,a una solucion aproximada.

a) Si no se dice nada acerca del error que se cometa en la aproximación,podemos sustituir $j = w_g/w_e$ por una j' tal que

$$j = a/b \quad \dots\dots\dots j' = \frac{a \cdot n \pm c}{b \cdot n} \quad , \text{siendo el error} = \frac{c}{n \cdot a}$$

siempre que los terminos de la fraccion j' tengan factores primos menores que z_{max} .

En nuestro caso, $383/649$, no puede aplicarse.

b)Si se exige un error maximo,ó el procedimiento anterior no puede aplicarse,se desarrolla en fraccion continua,y se adopta como solucion una de las fracciones reducidas.

Si $j = a/b$,y las reducidas son c/d , e/f ,etc,el error cometido al sustituir a/b por c/d sera menor que $1/d^2$,o bien, menor que $1/d \cdot f$,siendo e/f la reducida siguiente.

En este caso, fijando un error menor de $1/2000$ se tendra:

$$\frac{383}{649} = \frac{1}{\frac{649}{383}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{10}}}}}}}}$$

Las reducidas son $1/1, 1/2, 3/5, 10/17, 13/22, 23/39, 36/61, 383/649$

Tomando como relacion de transmision la reducida $23/39$,el error cometido sera: $1/39^2$ ó $1/39 \cdot 61 = 1/2379 > 1/2000$

Luego el tren aproximado tendra dos ruedas $z_1=23$ y $z_2=39$

NOTA: A veces es posible lograr una relacion de transmision exacta, imposible de lograr con trenes de ejes fijos,empleando trenes de ejes moviles.

5º TIPO.-

La relacion de transmision es una cantidad incommensurable

EJEMPLO.-

Calcular un tren para transmitir la relacion $j = 1/\pi$

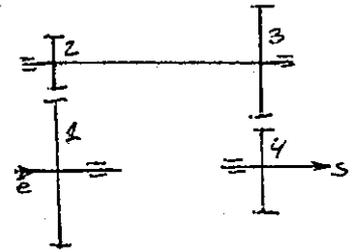
-Se sustituye $1/\pi$ por una fraccion decimal con la aproximacion deseada, ó bien por las reducidas sucesivas de una fraccion continua equivalente a la relacion dada.

$$j = \frac{1}{3,1416} = \frac{31416}{98696} \quad \text{error menor de } 1/10000$$

y se procede como en el caso anterior.

4-3.-DISEÑO CINEMÁTICO DE TRINOS DE INVERSIÓN.-

En muchos mecanismos, y concretamente en los cajas de cambios de velocidades, se desea que los ejes de entrada y salida estén alineados, como se ve en la figura, esto introduce ciertas restricciones en el cálculo de estos trenes que analizaremos a continuación con algunos ejemplos.



Como los dos pares de ruedas de estos trenes pueden tener igual ó diferente paso, veremos cada uno por separado.

1º TIPO.-

Todas las ruedas del tren han de tener el mismo paso.

PROBLEMA:

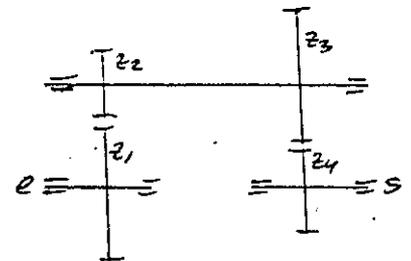
Se desea proyectar un tren que tenga $w_s/w_e = 40/1$. Los ejes de entrada y de salida han de estar alineados, y todas las ruedas habrán de tener el mismo paso.

Se dispone en existencia de las siguientes ruedas: de 12 a 24 dientes todas; de 24 a 160 todas las pares; de 100 a 160 de 3 en 3.

1º.-Cálculo del número de pares de ruedas:

Tomando una relación máxima de transmisión de 7 (observese que con las ruedas en existencia podemos lograr una relación máxima de $160/12$), necesitaremos dos pares de ruedas: $\frac{7}{1} \cdot \frac{7}{1} = \frac{49}{1} > \frac{40}{1}$

2º.-Con 4 ruedas, y los ejes de entrada y salida alineados, tendremos un tren como el de la figura.



En este tren se ha de cumplir:

$$\frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{D_3 + D_4}{2}$$

Como $D = z/\text{paso diametral} \dots$ $\frac{z_1 + z_2}{P_d} = \frac{z_3 + z_4}{P_d}$

En definitiva, $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$

3º.-Cálculo de las relaciones parciales de transmisión:

En este tren se ha de cumplir: $\frac{40}{1} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4}$

Que podemos poner para mayor facilidad de trabajo

$$\frac{40}{1} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4}$$

\downarrow multiplicar
 \downarrow sumar
 S S

z_1, z_2, z_3, z_4 , han de ser tales que $z_1 \cdot z_3 = 40$; $z_2 \cdot z_4 = 1$

$$z_1 + z_2 = S = z_3 + z_4$$

Tomemos $\frac{40}{1} = \frac{8}{1} \cdot \frac{5}{1}$

\parallel \parallel
 9 6

Como vemos, se satisface el producto, pero no la suma.

Para satisfacer tambien la suma, tomamos el m.c.m. de 9 y 6

$$9 = 3^2 ; 6 = 2 \cdot 3 \quad \text{n.c.m.}(9, 6) = 2 \cdot 3^2 = 18$$

Dividimos $18/9 = 2$ y $18/6 = 3$; a continuacion, multiplicamos y dividimos cada fraccion por estos numeros:

$$\frac{40}{1} = \frac{8 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 3} = \frac{16}{2} \cdot \frac{15}{3}$$

\parallel \parallel
 18 = 18

Como vemos, ahora se cumple el producto y la suma. Tenemos, por consiguiente, las relaciones parciales de transmision. $16/2, 15/3$

4º.-Calculo del numero de dientes:

Multiplicamos el numerador y denominador de ambas fracciones por el mismo numero, de forma que consigamos en todas ellas las rueda disponibles, procurando que sean las de menor numero de dientes posible. Tomando la rueda mas pequeña, la de 12 dientes, tenemos:

$$\frac{16 \cdot 6}{2 \cdot 6} \cdot \frac{15 \cdot 6}{3 \cdot 2} = \frac{96}{12} \cdot \frac{90}{18} \quad (\text{Como vemos, se dispone de todas})$$

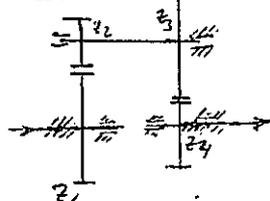
5º.-Esquema del tren:

$$z_1 = 96$$

$$z_2 = 12$$

$$z_3 = 90$$

$$z_4 = 18$$



NOTA: Observese que en las dos fracciones hay que multiplicar numerador y denominador por el mismo numero, o sea, todas por el mismo numero, para que no solo se conserve el producto, sino tambien la suma.

NOTA: Si con las relaciones parciales $8/1$ y $5/1$ tomadas, no fuera posible la resolusion del problema, repetiriamos los calculos con otras relaciones, tales como $10/1$ y $4/1$, et.

2º TIPO.-

Los dos engranajes los tomamos de diferente paso.

EJEMPLO:

Se desea proyectar un tren que tenga $j = 1/20$, con los ejes de entrada y salida alineados. Dos de las ruedas tienen de paso 10 y las otras dos, 8. Se dispone de las siguientes ruedas: Tadoas, de 12 a 24 dientes todas las pares de 24 a 160; de 3 en 3, entre 100 y 160.

1º.-Calculo del numero minimo de pares de ruedas:

La maxima relacion que disponemos es de $160/12$. Como es muy gran

la tomamos de 7, con lo que necesitaremos dos pares de ruedas
 $(1/7) \cdot (1/7) = 1/49 > 1/20$

2º.-Calculo de las relaciones parciales de transmision:

Se ha de cumplir: $1/20 = (z_1/z_2) \cdot (z_3/z_4)$

Tambien $(D_1+D_2)/2 = (D_3+D_4)/2 \dots \dots (z_1+z_2)/p_{1-2} = (z_3+z_4)/p_{3-4}$

En nuestro caso:

$$(z_1+z_2)/10 = (z_3+z_4)/8 \dots \dots 4z_1+4z_2 = 5z_3+5z_4$$

Todo esto puede resumirse en el siguiente cuadro:

| | | |
|------------------|--|---------|
| multiplicar | | |
| $\frac{1}{20} =$ | $\frac{4z_1}{4z_2} \cdot \frac{5z_3}{5z_4}$ | ↓ sumar |
| | $\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ S & S \end{matrix}$ | |

Tomemos $1/20 = (1/4) \cdot (1/5)$, y sustituyamoslo en el cuadro anterior

| | | |
|------------------|---|--|
| $\frac{1}{20} =$ | $\frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 5}$ | se satisface al producto, pero no la suma. |
| | $\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ 20 \neq & 30 \end{matrix}$ | |

Para satisfacer ambas, tomemos el m.c.m. de 20 y 30 que es 60
 $60/20 = 3$ y $60/30 = 2$, y multipliquemos y dividamos por estos numeros:

| | | |
|------------------|---|--|
| $\frac{1}{20} =$ | $\frac{4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 1 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 12} \cdot \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 10}$ | que como vemos, satisface el producto y la suma. |
| | $\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ 60 = & 60 \end{matrix}$ | |

Las relaciones parciales de transmision son $3/12$ y $2/10$.
 (Observese que los pasos, representados por los numeros 4 y 5 se han respetado en todo momento; solo se ponen para asegurar el cumplimiento de la igualdad de la distancia entre ejes)

3º.-Calculo del numero de dientes;

Teniendo en cuenta las ruedas en existencia, y procurando que se las de menor numero de dientes, multiplicamos los 4 terminos de

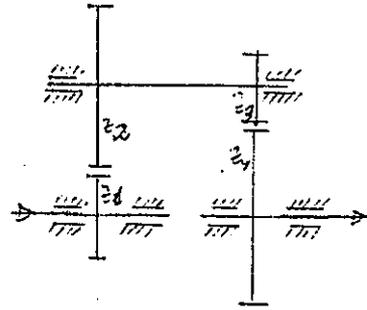
las dos fracciones por 6, con lo que queda:

$$z_1 = 3.6 = 12$$

$$z_2 = 12.6 = 72$$

$$z_3 = 3.6 = 12$$

$$z_4 = 10.6 = 60$$



4º.-Esquema del tren:

NOTA: Observese que las dos relaciones parciales de transmision se han multiplicado y dividido por el mismo numero, para poder conservar la distancia entre ejes.

NOTA: Observese que en toda la operacion de calculo de las relaciones parciales de transmision, los pasos (en este caso, sus divisores 4 y 5) no han intervenido para nada. Solo los ponemos para comprobar la igualdad de las sumas.

NOTA: Cuando los dos pares de ruedas tienen diferentes pasos, el orden en que se supongan las relaciones parciales de transmision de partida puede tener especial importancia.

De efecto, si hubieramos descompuesto $1/20 = (1/5) \cdot (1/4)$, habria

$$\text{resultado } \frac{1}{20} = \frac{4.1}{4.5} \cdot \frac{5.1}{5.4}$$

$$\frac{24}{24} \neq \frac{25}{25}$$

$$\text{m.c.m.}(24, 25) = 600$$

$$\frac{1}{20} = \frac{4.1.25}{4.5.25} \cdot \frac{5.1.24}{5.4.24}$$

como vemos, no tenemos ruedas con estos numeros de dientes.

CINEMATICO DE LOS TRENES DE EJES MOVILES.-

Son aplicables las mismas consideraciones que para trenes de ejes fijos. Los factores que influyen seran:

- a) La razon de velocidades w_s/w_e , y el sentido de rotacion, que habran de ajustarse a las necesidades.
- b) Se debe utilizar el menor numero de engranajes posible.
- c) Debe utilizarse, a ser posible, engranajes comerciales, sin mas restriccion que las posibles interferencias.
- d) Deben utilizarse relaciones parciales de transmision lo mas uniformes posible, aunque en estos trenes esta condicion se ha de sacrificar a menudo a otras condiciones mas importantes.
- e) Los numeros de dientes y el paso (ó los pasos) de los mismos han de ser compatibles con la disposicion de montaje, y con el espacio disponible.

-El camino a seguir para el proyecto de trenes epicicloidalos simpl puede ser el siguiente:

1º.- Identificar los organos de entrada y salida del tren.

En un tren epicicloidal simple, tanto de 3 como de 4 ruedas, la entrada sera, bien la rueda movil, bien el brazo.

(El brazo nunca puede ser fijado, por propia definicion de tren epicicloidal. El engranaje movil puede ser tanto la corona como el planeta, segun se vio en la cuestion)

En cualquier caso, sea el tren epicicloidal simple de 3 o de 4 ruedas, y fijese la rueda que se fije, tendremos siempre dos opciones de acople para estos trenes:

1ª.- Entrada por el engranaje movil

Salida por el brazo

Planeta o corona fijo.

2ª.- Entrada por el brazo

Salida por el engranaje movil

Planeta o corona fijo

2º.- Calcular la razón de dientes del tren pedido:

Esto se consigue sustituyendo las correspondientes velocidades de entrada y salida del tren, correctamente y con su signo, en la fórmula de Wallis:

$$r.d. = \frac{w_n - w_b}{w_1 - w_b}$$

Como hay dos organos posibles de entrada en un tren dado, habrá siempre dos valores de la r.d. para escojer.

3º.- Seleccionamos el tipo de tren a proyectar.

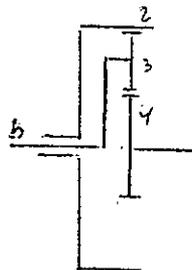
Puede ser tanto el de 3 ruedas como el de 4. En cualquier caso, el tipo seleccionado debe ser capaz de producir la r.d. pedida y el sentido de rotación especificado, para lo cual hemos de tener presente todo lo dicho en la cuestión.

En igualdad de condiciones, nos inclinaremos por un tren de 3 ruedas, si es mas barato; sino, tomaremos uno de 4 ruedas.

4º.- A continuación se calcula el número de dientes de todos los engranajes:

Para ello, en el caso de trenes de 4 ruedas, se fijan las relaciones parciales de transmisión; luego se fija el número de dientes de cada rueda teniendo en cuenta los requisitos de paso y distancia entre ejes, (además de otras consideraciones que veremos mas adelante)*.

- En los trenes simples de 3 ruedas, se tendrá en todos los



casos (con independencia del paso, tipo de dentadura, etc)

$$R_2 = 2R_3 + R_4$$

- Si las ruedas han sido talladas sin desplazamiento, entonces el paso es idéntico en las tres, y podemos poner:

$$z_2 = 2z_3 + z_4 \quad (1)$$

- Si las ruedas fueron talladas con desplazamiento, entonces los pasos (paso circunferencias $P = \frac{P_B}{\cos \alpha}$) entre las ruedas 2 y 3 no tiene porque se igual al de las ruedas 3 y 4, (en caso de engranaje cero).

En este caso, podríamos poner:

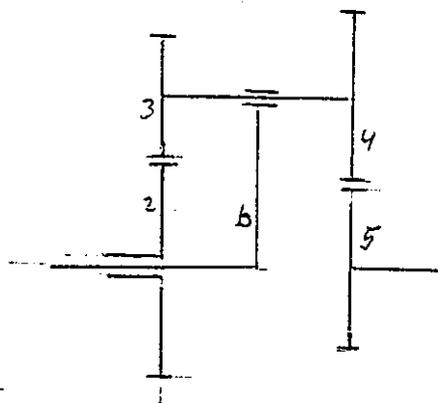
$$\frac{P_B \cdot z_2}{2\pi \cos \alpha_{23}} = \frac{P_B \cdot z_3}{2 \cos \alpha_{23}} + \frac{P_B \cdot z_3}{2\pi \cos \alpha_{34}} + \frac{P_B \cdot z_4}{2\pi \cos \alpha_{34}}$$

$$\frac{z_2}{\cos \alpha_{23}} - \frac{z_3}{\cos \alpha_{23}} = \frac{z_3}{\cos \alpha_{34}} + \frac{z_4}{\cos \alpha_{34}}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha_{23}} (z_2 - z_3) = \frac{1}{\cos \alpha_{34}} (z_3 + z_4) \quad (2)$$

Esta restricción (2) es menos rigurosa que la (1), por lo que muchas veces se recurre, en este tipo de trenes, a utilizar engranajes corregidos.

- En el caso de engranajes helicoidales, pueden hacerse las mismas apreciaciones, sin mas que aplicarlas a su perfil frontal.
- En los trenes simples de 4 ruedas también pueden hacerse observaciones similares:



- Si son ruedas sin desplazamiento, de distinto paso

$$P_{23}(z_2 + z_3) = P_{45}(z_4 + z_5)$$

- Si son ruedas V, engranando a "cero"

$$\frac{P_{B23} \cdot z_2}{2\pi \cos \alpha_{23}} + \frac{P_{B23} \cdot z_3}{2\pi \cos \alpha_{23}} = \frac{P_{B45} \cdot z_4}{2\pi \cos \alpha_{54}} + \frac{P_{B45} \cdot z_5}{2\pi \cos \alpha_{54}}$$

5º.- Finalmente se hará un esquema a escala del tren, dando la forma necesaria del bastidor, posición de los cojinetes, etc.

Completado el esquema, debe comprobarse que el tren cumple las especificaciones previstas.

5-2.-DISEÑO DE UN TREN EPICICLOIDAL DE TRES RUEDAS.-

A continuación y por medio de un ejemplo, vamos a ilustrar el camino a seguir para el diseño de uno de estos trenes.

Sin embargo hemos de señalar que para una relación de velocidades dada w_s/w_e , y el signo de rotación especificado, no siempre puede decirse de antemano si podemos tomar un tren de 3 ó de 4 ruedas.

Es evidente que los pasos 1º, 2º, y 3º del punto anterior han de darse en función de los datos del problema, sin prejuzgar nada acerca del tipo de tren.

NOTA: Como se desprende del estudio efectuado de los trenes epicicloidales simples, siempre que se exija que los ejes de entrada y salida giren en sentidos contrarios, el empleo de trenes de 3 ruedas queda descartado de antemano.

EJEMPLO:

Proyectar un tren epicicloidal simple para una relación de velocidades $w_s/w_e = 9/1$, con los ejes de entrada y salida girando en igual sentido. Se dispone de las siguientes ruedas (incluidas ruedas coronas): Todos los números del 12 al 24; todos los pares del 24 al 144.

1º.-Identificamos los órganos de entrada y salida del tren:

- a) Entrada por la rueda móvil (planeta ó corona)
salida por el brazo
la otra rueda fija (corona ó planeta respectivamente)
- b) Entrada por el brazo
Salida por la rueda móvil

2º.-Calculamos la razón de dientes, en cada caso:

- a) $\frac{0 - 9}{1 - 9} = \frac{9}{8}$ (Observese que si la entrada es por la rueda móvil, la última rueda del tren es la fija, tanto en un tren de 3 como de 4 ruedas)
- b) $\frac{9 - 1}{0 - 1} = -8$

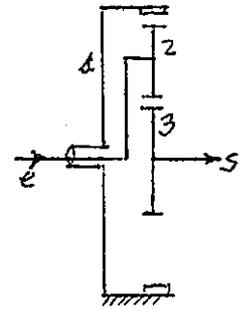
3º.-Seleccionamos el tipo de tren:

Como según vimos, en un tren de tres ruedas la razón de dientes siempre ha de ser **negativa**, queda descartado el caso (a)

Por otra parte, la r.d. = -8, necesaria que sea negativa en un tren de 3 ruedas, no es demasiado elevada para lograrla con uno

de estos trenes. En consecuencia, nos decidimos por un tren de 3
ruedas, con entrada por el brazo,
como se ve en la figura.

(Observese que la r.d. se establece entre la corona y el planeta, pues el satélite es una rueda parasita)



Es conveniente comprobar también que esta r.d. puede lograrse con los engranajes en existencia. En efecto, con las ruedas disponibles podemos lograr una r.d. máxima de $144/12 > 8$

4º.-Cálculo del número de dientes:

Como la r.d. es de 8, y la rueda menor es de 12 dientes, podemos tomar la corona de $12 \cdot 8 = 96$ dientes, que la tenemos disponible. Los dientes del satélite se determinarán por razones constructivas: En la figura se observa que:

$$D_1/2 = D_2 + D_3/2 \qquad D_2 = (D_1 - D_3)/2$$

como las tres ruedas han de tener el mismo paso

$z_2 = (z_1 - z_3)/2 = (96 - 12)/2 = 42$ dientes, que también la tenemos.

5º.-Esquema y comprobación:

$$z_1 = 96 \quad z_2 = 42 \quad z_3 = 12$$

Comprobación:

$$r.d. = -8$$

$$w_e = 1$$

$$w_s = ?$$

$$\frac{w_n - 1}{0 - 1} = -8$$

$$w_n = 8 + 1 = 9$$

5-3.-DISEÑO DE TRENES EPICICLOIDALES DE CUATRO RUEDAS.-

Como se desprende del estudio efectuado de los trenes epicicloidales en la cuestión , hemos de emplear necesariamente un tren de 4 ruedas cuando:

- a) La relación de transmisión w_s/w_e sea negativa.
- b) Cuando la razón de dientes sea muy elevada para conseguirla con solo dos ruedas (que es el caso de trenes de 3 ruedas, donde el satélite es una rueda parasita, que no cuenta a efectos de variar la r.d.)
- c) Cuando aun pudiendo emplear un tren de 3 ruedas, no dispongamos de las necesarias en existencia

Sin embargo, como se vio en el ejemplo anterior, es conveniente plantear "a priori" la posibilidad de las dos soluciones (3 ó 4 ruedas, con exclusion del caso de que w_s/w_e sea negativa), para asegurar por medio de un calculo sistemático la mejor solución en cualquier caso.

NOTA: Tengase presente que se pueden tomar los dos engranajes del tren de 4 ruedas con igual ó diferente paso.

EJEMPLO:

Proyectar un tren de engranajes epicicloidal que tenga $w_s/w_e = 11/1$ con los ejes de salida y entrada girando en sentidos contrarios. Los engranajes en existencia son: Todos los numeros entre 12 y 24; todos los pares entre 24 y 144. (Todas las ruedas disponibles tienen el mismo paso).

1º.-Identificamos los ejes de entrada y salida del tren:

- a) Entrada por el brazo
salida por la rueda movil
- b) Entrada por la rueda movil
salida por el brazo

2º.-Calculo de la r.d. en cada caso:

$$a) \quad \frac{-11 - 1}{0 - 1} = \frac{12}{1} \qquad b) \quad \frac{0 - (-11)}{1 - (-11)} = \frac{11}{12}$$

3º.-Elección del tipo de tren:

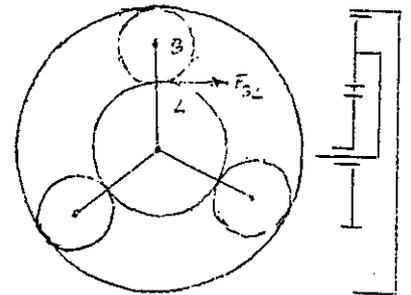
(Como se observa, la r.d. es, en ambos casos, positiva, lo que abunda en la imposibilidad de utilizar un tren de 3 ruedas)

5-4.-CONSIDERACIONES DE MONTAJE.-

- Como ya se ha dicho, es práctica habitual en los trenes epicicloidales montar varios satélites, uniformemente distribuidos, en un brazo portasatélites en forma de estrella.

Ello presenta ventajas y tales como:

- 1º.- Si son s satélites, reparte el esfuerzo tangencial (en el caso de trenes de 3 ruedas, con entrada por el brazo) entre los s satélites, anulando la resultante sobre el eje de las ruedas planetas (2), además del portasatélites (brazo).



(Sin embargo, en la práctica nunca se toma como fuerza sobre cada brazo, o carga sobre

cada diente la fracción $1/s$ de la misma, sino que se mayor, pues la distribución de esfuerzos siempre vendrá afectada por las holguras, defectos de montaje, etc).

- 2º.- La disposición uniformemente distribuida de los satélites anula la resultante de las fuerzas centrífugas sobre el eje del brazo portasatélites, en todos los tipos de trenes, lo cual facilita enormemente la construcción de este, simplificando de paso los apoyos del mismo.
- Sin embargo, para que se den correctamente los supuestos anteriores, todos los satélites que se coloquen han de estar distribuidos uniformemente (por ejemplo, 2 a 180° , 3 a 120° , 4 a 90° , etc). Desgraciadamente, esta condición de distribución uniforme no se puede cumplir en todos los casos e introduce nuevas restricciones al diseño cinemático de estos mecanismos.

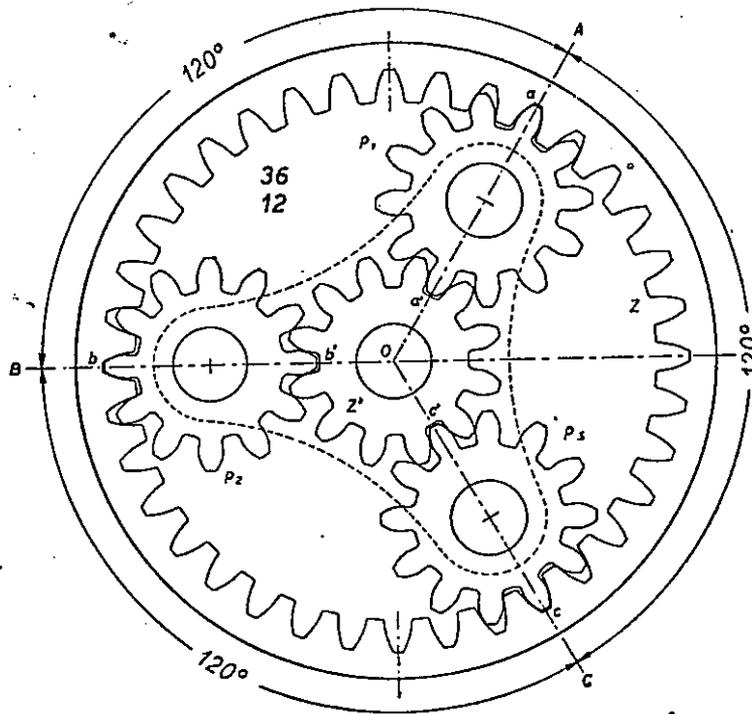
Un ejemplo aclarará lo dicho, perfectamente:

En el tren de 3 ruedas de la figura, en el que el portasatélites tiene 3 satélites a 120° .

$$Z = 36$$

$$P_1 = P_2 = P_3 = 12$$

$$Z^1 = 12$$



puede observarse que los tres satélites P_1, P_2 y P_3 encajan perfectamente en la corona Z y en el planeta Z' , manteniéndose sus centros respectivos en las líneas OA, OB y OC , exactamente a 120° .

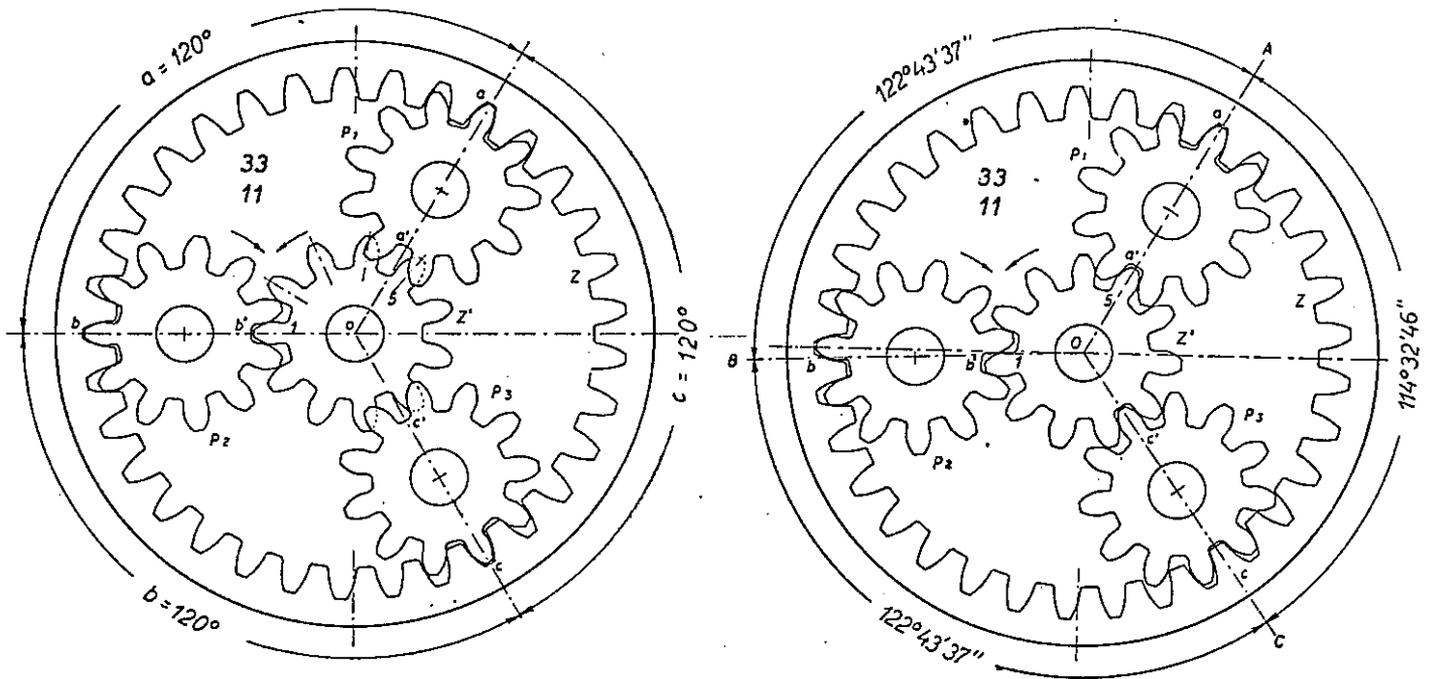
Además, al ser par el número de dientes de los satélites, un diente encaja en el hueco de Z en a , y el diente opuesto encaja en el hueco del planeta Z' en a' , y así los demás.

Por otra parte, la rueda planeta Z' queda dividida por los puntos a', b' y c' en tres partes iguales, cada una sustentando 4 pasos circunferenciales.

$$\frac{12 \text{ dientes de } Z'}{3 \text{ satélites}} = 4 \text{ dientes} = 4 \text{ pasos}$$

Al girar el planeta, con la corona fija (o viceversa), cuando esta gire $1/3$ de vueltas o sea, cuando el arco avanzado sea 4 pasos, el planeta P_2 estará exactamente en la posición del P_1 y este en la de P_3 y este en la de P_2 .

Sin embargo, vemos ahora el caso del tren de 3 ruedas de la figura también con 3 satélites, y en donde $Z = 33; Z' = 11; P_1 = P_2 = P_3 = 11$.



En este caso, al no ser la rueda planeta Z' divisible por 3, es imposible que encajen los dientes de los satélites con los del planeta, manteniendo los centros de los satélites en líneas a 120° , como se ve claramente en la figura.

$$\frac{11 \text{ dientes de } Z'}{3 \text{ satélites}} = 3\frac{2}{3} \text{ dientes} = 3\frac{2}{3} \text{ paso}$$

Para encajar los tres satélites en el planeta y en la corona no queda mas remedio que dejar de cumplir la restricción de $\hat{a}=\hat{b}=\hat{c}=120^\circ$, pasando estos ángulos a los valores que se van en la figura.

El procedimiento consiste en girar ligeramente Z' en el sentido de la flecha, hasta que el diente 5 encaja en el seno de P_1 (punto a' sobre la línea OA). La simple observación de la figura indica que Z' habrá que desplazarla el ángulo correspondiente a $1/3$ del paso, manteniendose fija P_1 .

Este giro hará girar a P_2 en el sentido de la flecha, desalineando su centro de la línea OB , y aumentando ligeramente el valor del ángulo \hat{a} .

La P_3 , que no se ha movido, deberá encajar ahora con el planeta bajo el mismo ángulo resultante ($\hat{b} = \hat{a}$)

Para el cálculo del desplazamiento en grados del brazo, cuando el planeta Z' gira $1/3$ del paso, procederíamos del modo siguiente:

$$\frac{w_{Z'} - w_b}{0 - w_b} = -\frac{Z}{Z'} \Rightarrow w_{Z'} = w_b \left(1 + \frac{Z}{Z'}\right)$$

$$\text{Si } w_b = 4 \text{ rpm.} \Rightarrow w_{Z'} = \left(1 + \frac{Z}{Z'}\right) \cdot \text{r.p.m}$$

Sustituyendo valores

$$w_{Z'} = 4 \text{ r.p.m}$$

Si 1 r.p.m del brazo equivalen a 4 r.p.m del planeta Z' , también se cumplirá que por cada giro de 360° del brazo, Z' habrá girado $4(p \cdot Z')$ (siendo p el paso). El número de grados del brazo que corresponde al giro correspondiente a un paso de Z' será:

$$\begin{array}{r} 360^\circ \text{ — } 4pZ' \\ x^\circ \text{ — } 3p \\ \hline x^\circ = \frac{120^\circ}{4Z'} = 2,7272^\circ = 2^\circ 43' 37'' \end{array}$$

Con esto resulta:

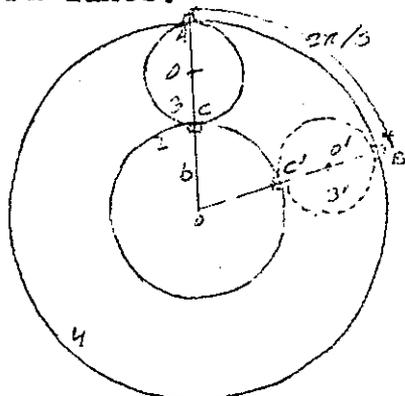
$$\hat{a} = 120^\circ + 2^\circ 43' 37'' = 122^\circ 43' 37''$$

$$\hat{b} = 122^\circ 43' 37''$$

$$\hat{c} = 360^\circ - [2 \times (122^\circ 43' 37'')] = 114^\circ 32' 46''.$$

- Generalizando lo expuesto, veamos cual es la condición para que en un tren de 3 ruedas puedan colocarse 3 satélites, uniformemente espaciados, es decir, formando sus centros un ángulo de $2\pi/3$

radianes.



Tanto si gira 2, permaneciendo 4 fija, como al revés, si se tienen s satélites igualmente espaciados, al girar el brazo un ángulo $2\pi/s$, partiendo de la posición O , el centro del mismo satélite tiene que estar en O' , sobre la línea OB .

Y para que eso ocurra, la rueda que haya girado (en este caso la 2, si 4 es la fija) ha tenido que hacerlo un ángulo tal que el arco en la circunferencia primitiva sea igual a un número entero de pasos.

$$\widehat{CC'} = n.p$$

con objeto de que el satélite encaje en el planeta y en la corona en la misma posición anterior.

En el caso de que giraran ambas ruedas, también la suma de los arcos descritos sobre la circunferencia primitiva de 2 o de 4 han de ser múltiples enteros del paso.

- La fórmula de Wallis aplicada al tren de tres ruedas da:

$$\frac{w_2 - w_b}{w_4 - w_s} = -\frac{z_3}{z_2}$$

$$z_2 w_2 + z_4 w_4 = (z_2 + z_4) \cdot w_b$$

Como $\varphi = \omega t$, la misma relación entre las velocidades angulares ha de cumplirse entre los ángulos girados.

Si φ_2 y φ_3 son los ángulos correspondientes a los giros, durante un tiempo t , de las ruedas 2 y 3, se tendrá:

$$z_2 \cdot \varphi_2 + z_4 \varphi_4 = (z_2 + z_4) \varphi_b$$

Si hacemos que el brazo gire un ángulo

$$\varphi'_b = 2\pi/s$$

Las ruedas 2 y 4 giraran los ángulos φ'_2 y φ'_4

$$z_2 \varphi'_2 + z_4 \varphi'_4 = (z_2 + z_4) \frac{2\pi}{s} \quad (1)$$

Si después de estos giros ψ'_2 y ψ'_3 , los centros del satélite se encuentran formando un ángulo de $2\pi/s$ radianes, entonces la construcción del tren es posible.

El ángulo correspondiente a un arco igual al paso, en la rueda 2 será:

$$\psi_2 = \frac{P}{R_2} = \frac{2\pi R_2}{z_2 \cdot R_2} = \frac{2\pi}{z_2}$$

igualmente en la rueda es: $\psi_4 = \frac{2\pi}{z_4}$

Transformando la expresión (1)

$$\frac{\psi'_2}{\frac{2\pi}{z_2}} + \frac{\psi'_4}{\frac{2\pi}{z_4}} = \frac{z_2 + z_4}{s}$$

que también se puede escribir:

$$\frac{\psi'_2}{\psi_2} + \frac{\psi'_4}{\psi_4} = \frac{z_2 + z_4}{s} \quad (2)$$

Los dos primeros sumandos representan el número de pasos que corresponde al giro de las ruedas 2 y 4, que como ya hemos visto, ha de ser un número entero.

Como consecuencia, también el segundo miembro de (2) ha de ser con número entero, o lo que es igual $z_2 + z_4$ ha de ser un múltiplo entero del número de satélites.

$$z_2 + z_4 = \dot{s} \quad (3)$$

- En el caso de trenes de 4 ruedas se puede realizar un razonamiento análogo, pero es más sencillo diseñar el tren de modo que las dos ruedas planetas sean múltiplo del número de satélites.

$$\begin{aligned} z_2 &= \dot{s} \\ z_4 &= \dot{s} \end{aligned}$$

