

VIBRACIONES MECÁNICAS

Roque Calero Pérez

VIBRACIONES EN MAQUINAS
=====

INDICE GENERAL
=====

0.- Preámbulo

1.- Bases previas

2.- Introducción al estudio de vibraciones mecánicas

3.- Sistemas vibrantes de 1 GDL

3-1.- Análisis general

3-2.- Aplicaciones prácticas

4.- Sistemas vibrantes de 2 GDL

4-1.- Análisis general

4-2.- Aplicaciones prácticas

5.- Sistemas vibrantes de n GDL

5-1.- Análisis general

5-2.- Aplicaciones prácticas

0-.PREAMBULO

=====

-El conocimiento de las vibraciones en sistemas mecánicos constituye un paso decisivo para el diseño de máquinas, de cimentaciones y estructuras soporte de las mismas y para el desarrollo de sistemas de control y mantenimiento.

-Especialmente de interés es el estudio de vibraciones para el diseño de máquinas cuando se considera que estas producen esfuerzos sobre sus miembros, variables en el tiempo, que son la causa principal del conocido fenómeno de "fatiga de los materiales", origen del fallo de los mismos en muchos casos.

La vibración, así mismo, también es causa del fallo de los elementos de máquinas por aumento rápido del desgaste de las piezas de contacto.

-En ingeniería mecánica, la vibración casi siempre se origina por elementos desequilibrados en movimiento, originados por diseños incorrectos, por defectos de manufactura, o por deterioros en servicio. En otros casos la vibración sobre una máquina puede causarse por movimientos de su propio soporte, o por otras causas ajenas a la misma (por ejemplo, un automóvil se verá sometido a vibración por efecto de un camino irregular sobre el que circula. En el caso de estructuras como puentes, etc, las acciones del viento, terremotos u otras causas son el origen de las vibraciones de los mismos).

-Las vibraciones mecánicas también pueden ser causa de funcionamientos incorrectos que aunque no conduzcan a la rotura de las piezas, pueden ser causa de graves peligros para la seguridad del sistema. (Por ejemplo, las ruedas de algunas

locomotoras pueden levantarse más de 1 cm. de los raíles cuando no están bien equilibradas y giran a elevada velocidad).

-En la medida que el hombre está integrado muchas veces en un sistema mecánico (automóvil, avión, etc.), o desempeña su trabajo en las proximidades de una fuente de vibración (por ejemplo, en las proximidades de un gran motor diesel, no bien equilibrado), la vibración puede ser causa de pérdida de confort, pérdidas de eficiencia (por ejemplo, la vibración en un panel de instrumentos puede impedir totalmente su lectura), e incluso, peligros para la salud.

-En todos los casos mencionados, la vibración se convierte en un efecto indeseable, de manera que en los casos en que esta no pueda ser eliminada o aminorada, el ingeniero ha de considerarla para lograr un diseño correcto, tanto desde el punto de vista resistente, como desde el de un correcto funcionamiento.

-Sin embargo, existen muchos casos en que la vibración tiene una connotación positiva, y el ingeniero ha de buscar su existencia, dentro de unos límites previstos. Tal es el caso de transportadores vibratorios, compactadores, procesos de acabado por vibración, etc.

-Finalmente, el análisis de vibraciones en los sistemas mecánicos ha alcanzado un gran desarrollo en el área del mantenimiento, ensayos, control y vigilancia del estado de las máquinas.

En concreto, el registro de las vibraciones en sistemas mecánicos, y su análisis posterior, permite un conocimiento bastante exacto del estado de las mismas, permitiendo la

previsión de fallos catastróficos (humanos -avión-, económicos -equipos de fabricación-, ecológicos -central nuclear-, etc.), así como la consecución de un mantenimiento predictivo de máxima rentabilidad.

1-.BASES PREVIAS AL ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES MECANICAS
=====

- 1.- Movimiento armónico: Definición
- 2.- Velocidad y aceleración en el movimiento armónico
- 3.- Composición de movimientos armónicos
 - 3-1.- Igual dirección. Pulsación
 - 3-2.- Direcciones perpendiculares
- 4.- Movimientos periódicos
- 5.- Trabajo realizado por fuerzas de variación armónica

1.-Movimiento armónico. Introducción

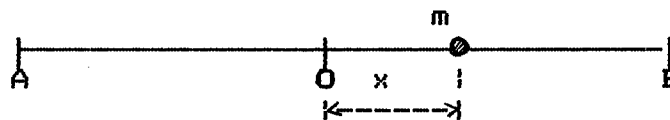
-Gran cantidad de las vibraciones que se producen en los elementos de máquinas son de tipo armónico. Incluso, en el caso de vibraciones periódicas no armónicas, mediante el análisis de Fourier puede realizarse su descomposición en suma de armónicos, y estudiarla como tales.

En consecuencia, es importante recordar algunos aspectos relativos al movimiento armónico.

-Como sabemos de mecánica general, una partícula se dice que está dotada de movimiento armónico cuando:

1º.- Su movimiento es rectilíneo

2º.- La aceleración de este movimiento es siempre proporcional a la distancia a un punto fijo de la trayectoria, y su dirección va dirigida siempre hacia ese punto.



En la figura, AB es la trayectoria del punto de masa m , y O el punto medio fijo, hacia el cual es atraída la masa.

La masa m se mueve entre los puntos A y B con un movimiento de vaivén. Si se parte de una posición de reposo en A, la aceleración irá decreciendo a medida que se acerca a O, hasta anularse en dicho punto.

La velocidad será entonces máxima en A.

A continuación, la masa sigue desplazándose hacia B, disminuyendo su velocidad y aumentando su aceleración.

En B la velocidad es cero y la aceleración máxima.

(un movimiento de este tipo es el que adquirirá la masa si estuviese unida a O por un resorte)

Con estas condiciones, la ecuación del movimiento puede representarse por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 \cdot x$$

siendo w^2 la constante de proporcionalidad (llamada así por simple conveniencia, en este momento. Más tarde se verá la razón.)

La solución de esta ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 \cdot x = 0 \quad [1]$$

es del tipo:

$$x = X \cdot \text{Cos} (w \cdot t + \varphi) \quad [2]$$

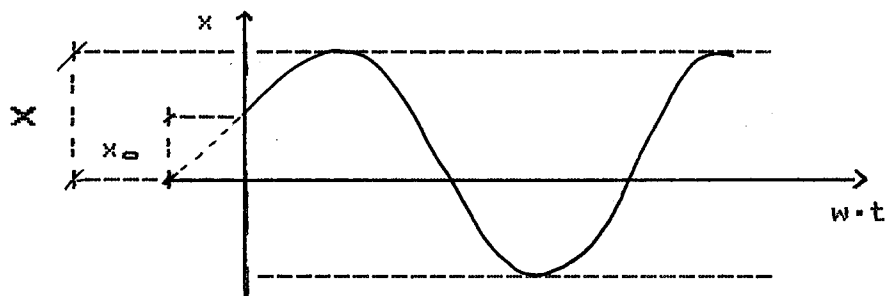
siendo X y φ constantes a determinar en función de las condiciones iniciales establecidas para [1]

La ecuación [2] es la ecuación de desplazamiento del movimiento armónico.

Como se vé, es una función senoidal (cosenoidal, en este caso), en la que X representa la amplitud del movimiento (desplazamiento máximo del punto) y φ el ángulo de fase inicial (que da la posición de x para $t = 0$)

La figura muestra la representación gráfica de la ecuación [2]

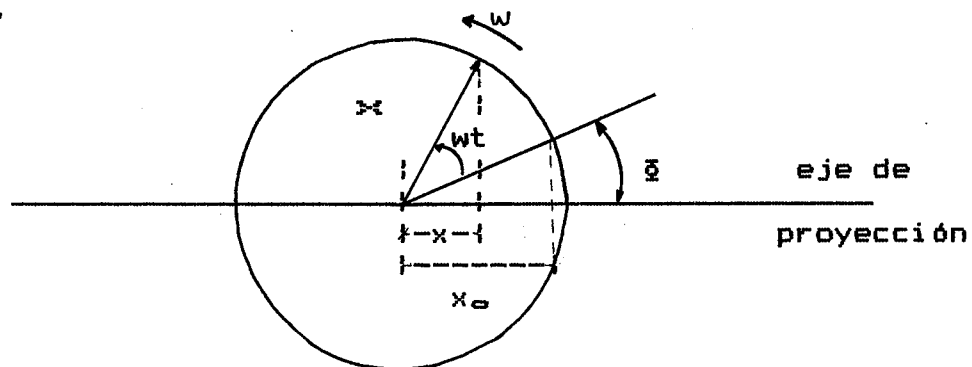
Para $t = 0 \implies x = x_0 = X \cdot \text{Cos} \varphi$



-La ecuación de un movimiento armónico se genera fácilmente mediante la proyección de un vector rotatorio de magnitud X , que gira a izquierdas con velocidad angular w (rd/s). La posición del vector rotatorio en función del tiempo viene dada por el producto $w \cdot t$

$$w \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}} \right] \cdot t(\text{s}) = w \cdot t \text{ (rd.)}$$

El origen de tiempos puede ser el propio eje de proyección u otro cualquiera. En este último caso, el ángulo de desfase será el formado entre el eje de proyección y el origen de tiempos.



(Obsérvese que para $t = 0 \implies x = x_0 = X \cdot \cos \phi$)

A la velocidad angular constante de este vector rotatorio se le denomina "frecuencia circular"

-El período (tiempo transcurrido entre dos posiciones homólogas consecutivas del punto vibrante -de x -, medido en segundos) de un movimiento armónico es fácil de calcular en función de la frecuencia circular w rd/s

$$\begin{array}{l} w \text{ rd} \implies 1 \text{ s.} \\ 1 \text{ ciclo} = 2\pi \text{ rd} \implies T \text{ s.} \end{array} \quad T = \frac{2\pi}{w} \text{ s.}$$

Se define la "frecuencia" del movimiento armónico como el número de ciclos en la unidad de tiempo. Es decir:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi} \cdot \frac{\text{ciclos}}{s} = \frac{w}{2\pi} \text{ Hertzios}$$

-La ecuación [2] también puede representarse en forma binómica:

$$\begin{aligned} x &= X \cdot \cos (w \cdot t + \varphi) \\ &= X \cdot (\cos wt \cdot \cos \varphi - \text{Sen } wt \cdot \text{Sen } \varphi) \\ &= (X \cdot \cos \varphi) \cdot \cos wt - (X \cdot \text{Sen } \varphi) \cdot \text{Sen } wt \\ x &= A \cdot \cos wt + B \cdot \text{Sen } wt \end{aligned} \quad [3]$$

siendo $A = X \cdot \cos \varphi$ y $B = -X \cdot \text{Sen } \varphi$ de donde:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ \varphi &= \text{arccotag } \frac{B}{A} \end{aligned}$$

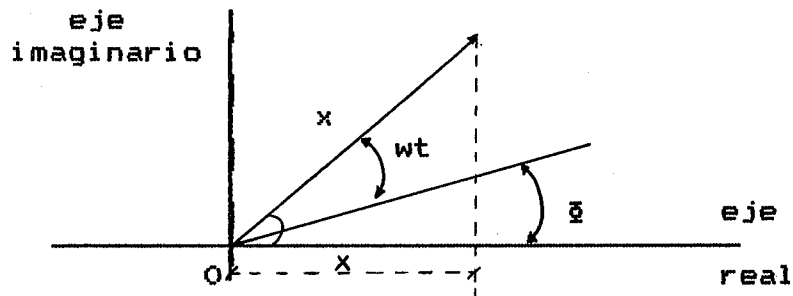
-En lugar de los parámetros X y φ , o A y B , también puede emplearse, para definir el movimiento armónico, las condiciones iniciales x_0 y \dot{x}_0 . En efecto:

$$\begin{aligned} x &= A \cdot \cos wt + B \cdot \text{Sen } wt \\ \dot{x} &= -A \cdot w \cdot \text{Sen } wt + B \cdot w \cdot \cos wt \\ \text{para } t = 0 &====> x_0 = A \\ & \dot{x}_0 = w \cdot B \\ \text{de donde } &====> A = x_0 \\ & B = \dot{x}_0 / w \end{aligned}$$

con lo que la ecuación [2] puede escribirse:

$$x = x_0 \cdot \cos wt + \frac{\dot{x}_0}{w} \cdot \text{Sen } wt \quad [4]$$

-Finalmente, el movimiento armónico también puede representarse en forma compleja



Como sabemos

$$\vec{x} = |X| \left[\cos (wt + \varphi) + i \cdot \text{Sen} (wt + \varphi) \right] = |X| \cdot e^{i(wt + \varphi)}$$

De donde puede escribirse:

$$x = \text{Re} \{ \vec{x} \} = \text{Re} \{ |X| \cdot e^{i(wt + \varphi)} \}$$

(representando $\text{Re} \{ \vec{x} \}$ la parte real del número complejo \vec{x})

El valor de x también se puede escribir:

$$x = \text{Re} \{ |X| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{iwt} \} = \text{Re} \{ \tilde{X} \cdot e^{iwt} \}$$

siendo \tilde{X} un número complejo, independiente del tiempo, al que se denomina "fasor", por representar el desfase inicial respecto del eje real de referencia

$$\tilde{X} = |X| \cdot e^{i\varphi} = |X| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \text{Sen} \varphi)$$

$$\text{Re} \{ \tilde{X} \} = |X| \cdot \cos \varphi$$

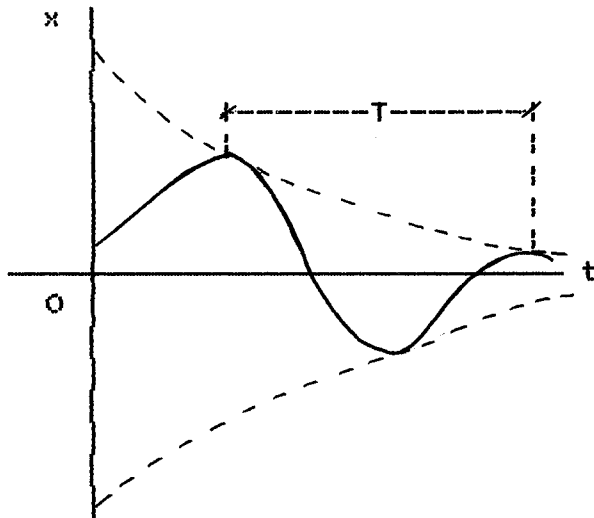
Movimiento armónico amortiguado

Tiene por ecuación, según sabemos:

$$x = e^{-\alpha t} \cdot X \cdot \cos (wt + \delta)$$

en donde α es un parámetro cualquiera.

Se representa por la curva de la figura



Se trata de un movimiento armónico, cuya amplitud decrece con el tiempo en forma exponencial.

Como se ve, x se anula sólo cuando lo hace $X \cdot \cos (wt + \delta)$ por lo que

los valores nulos de x se encuentran en los mismos puntos que en el movimiento no amortiguado. Por tanto, el período del movimiento es el mismo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

-Se llama decremento periódico a la relación entre las amplitudes, correspondiente a puntos homólogos de dos ciclos consecutivos.

$$x(t_1) = e^{-\alpha t_1} \cdot X \cdot \cos (wt_1 + \delta)$$

$$x(t_1 + T) = e^{-\alpha(t_1 + T)} \cdot X \cdot \cos (wt_1 + 2\pi + \delta)$$

$$= e^{-\alpha t_1} \cdot e^{-\alpha T} \cdot \cos (wt_1 + \delta)$$

$$= e^{-\alpha T} \cdot x(t_1)$$

luego

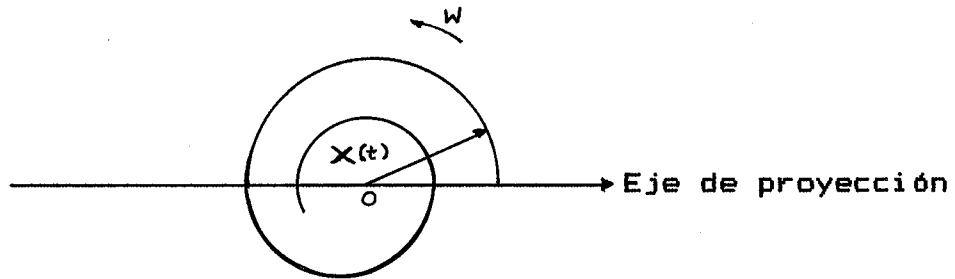
$$\frac{x(t_1)}{x(t_1 + T)} = e^{-\alpha T}$$

El decremento logarítmico es el exponente de esta expresión:

$$\alpha T = \text{Ln} \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T)} = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$$

Igual que sucede con el desplazamiento, la velocidad (\dot{x}) y la aceleración (\ddot{x}) también varían de un ciclo a otro en $e^{-\alpha T}$

Lógicamente el movimiento armónico amortiguado puede representarse por la proyección de un vector rotatorio, cuyo módulo disminuye con el tiempo.



2.-Velocidad y aceleración en el movimiento armónico

Conocida la ecuación del desplazamiento es fácil hallar la de velocidad y aceleración. En efecto

$$x = X \cdot \text{Cos} (wt + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d^2x}{dt} = -X \cdot w \cdot \text{Sen} (wt + \varphi) = \\ &= X \cdot w \cdot \text{Cos} (wt + \varphi + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad [3]$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d^2x}{dt^2} = -X \cdot w^2 \cdot \text{Sen} (wt + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ &= X \cdot w^2 \cdot \text{Cos} (wt + \varphi + \pi) \end{aligned} \quad [4]$$

Como se ve, la velocidad es también armónica, de amplitud $X \cdot w$, y desfasada $\pi/2$ respecto del desplazamiento.

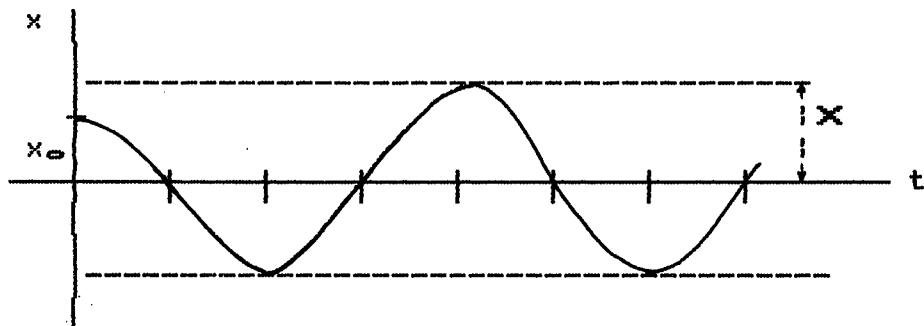
En cuanto a la aceleración, su amplitud es $w^2 \cdot X$, y se encuentra desfasada 180° respecto del desplazamiento.

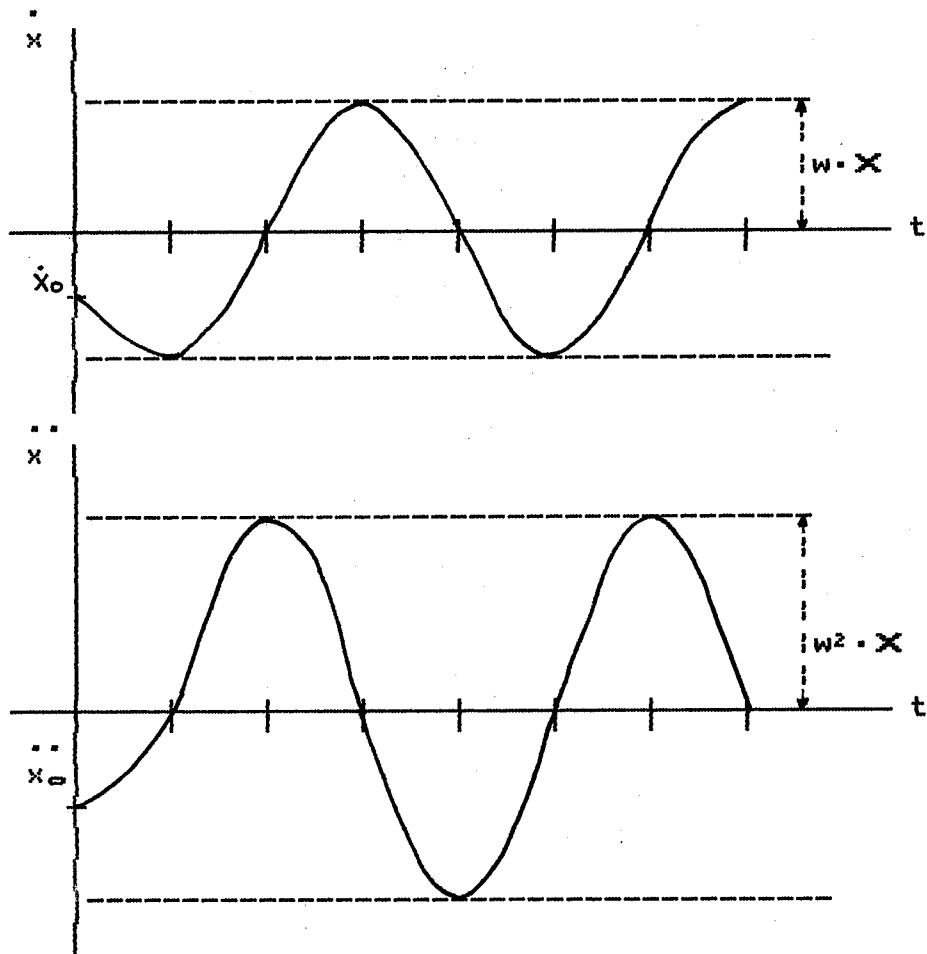
En las figuras se han representado gráficamente estas tres funciones, sabiendo que las condiciones para $t = 0$ serán:

$$x_0 = X \cdot \text{Cos} \varphi$$

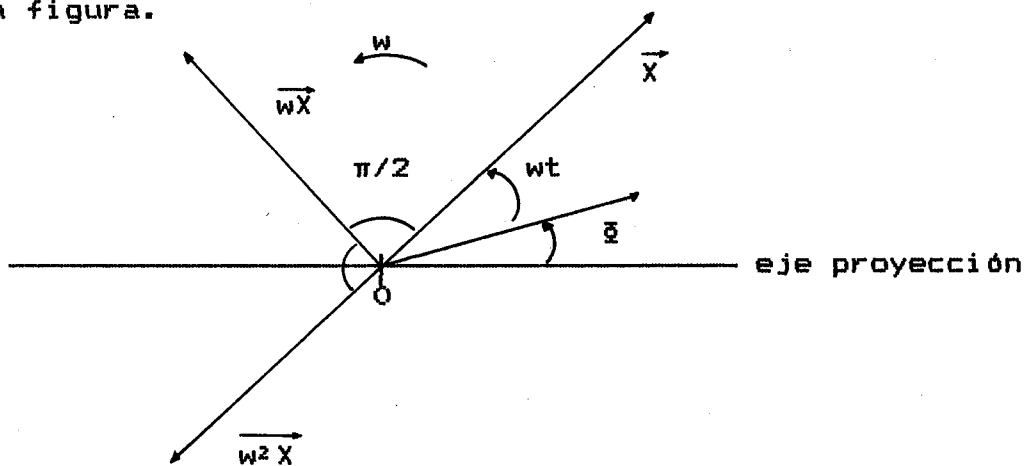
$$\dot{x}_0 = X \cdot w \cdot \text{Cos} (\varphi + \frac{\pi}{2}) = -X \cdot w \cdot \text{Sen} \varphi$$

$$\ddot{x}_0 = X \cdot w^2 \cdot \text{Cos} (\varphi + \pi) = -X \cdot w^2 \cdot \text{Cos} \varphi$$





-Según esto, los vectores velocidad y aceleración también pueden representarse como vectores rotatorios de frecuencia circular w , con los módulos y posiciones relativas que se ven en la figura.



-En forma compleja puede ponerse

$$x = \operatorname{Re} \left[|X| \cdot e^{i(\omega t + \phi)} \right]$$

$$\dot{x} = \operatorname{Re} \left[|X| \cdot i\omega \cdot e^{i(\omega t + \phi)} \right] = \operatorname{Re} \left[|X| \cdot \omega \cdot e^{i(\omega t + \phi + \pi/2)} \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[\tilde{X} \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t} \right]$$

$$\ddot{x} = \operatorname{Re} \left[|X| \cdot \omega \cdot i\omega \cdot e^{i(\omega t + \phi + \pi/2)} \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[|X| \cdot \omega^2 \cdot e^{i(\omega t + \phi + \pi)} \right] = \operatorname{Re} \left[\tilde{X} \cdot (i\omega)^2 \cdot e^{i\omega t} \right]$$

3.- Composición de movimientos armónicos

3-1.- Composición de movimientos armónicos de igual dirección.

Pulsación.-

Al sumar dos movimientos armónicos, en la misma dirección, el resultado puede ser otro movimiento armónico, o no serlo (aunque en este caso, será un movimiento periódico)

$$x_1 = A_1 \cdot \cos w_1 \cdot t + B_1 \cdot \text{Sen } w_1 \cdot t$$

$$x_2 = A_2 \cdot \cos w_2 \cdot t + B_2 \cdot \text{Sen } w_2 \cdot t$$

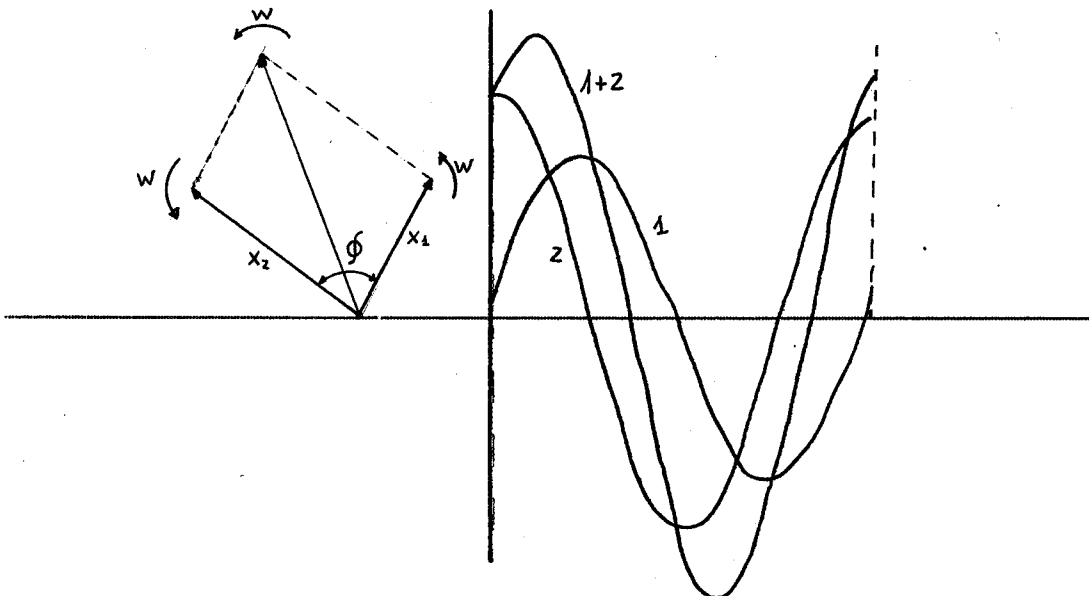
a.- Frecuencias circulares iguales:

$$w_1 = w_2 = w$$

En este caso, el movimiento resultante es también armónico, de amplitud la suma de ambas

$$x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2) \cdot \cos wt + (B_1 + B_2) \cdot \text{Sen } wt$$

La composición de los vectores rotatorios justifica y aclara, rápidamente, la formación de este movimiento resultante.

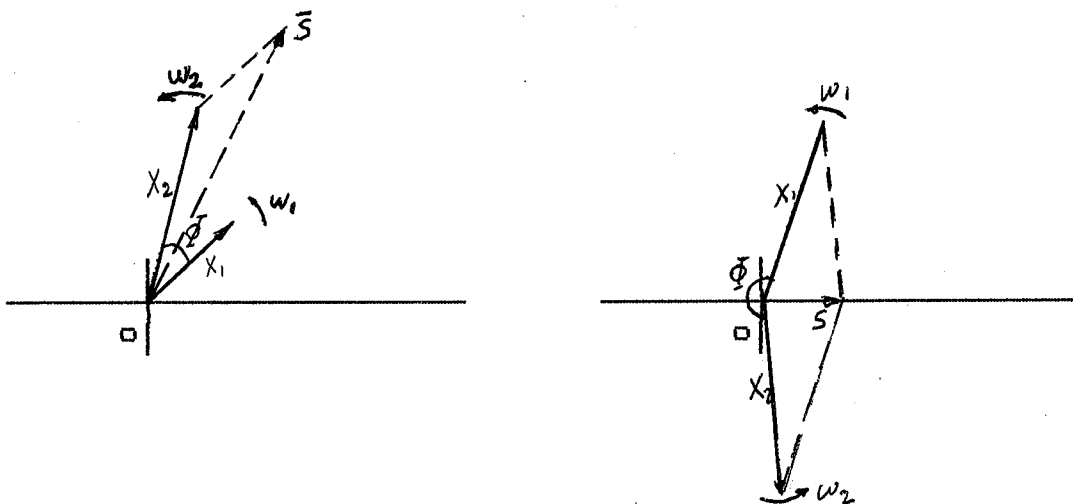


b.- Frecuencias circulares casi idénticas:

$$\omega_1 \approx \omega_2$$

En este caso aparece el fenómeno de pulsación. El movimiento resultante no es armónico. La justificación se deduce fácilmente a partir de la observación de los vectores rotatorios.

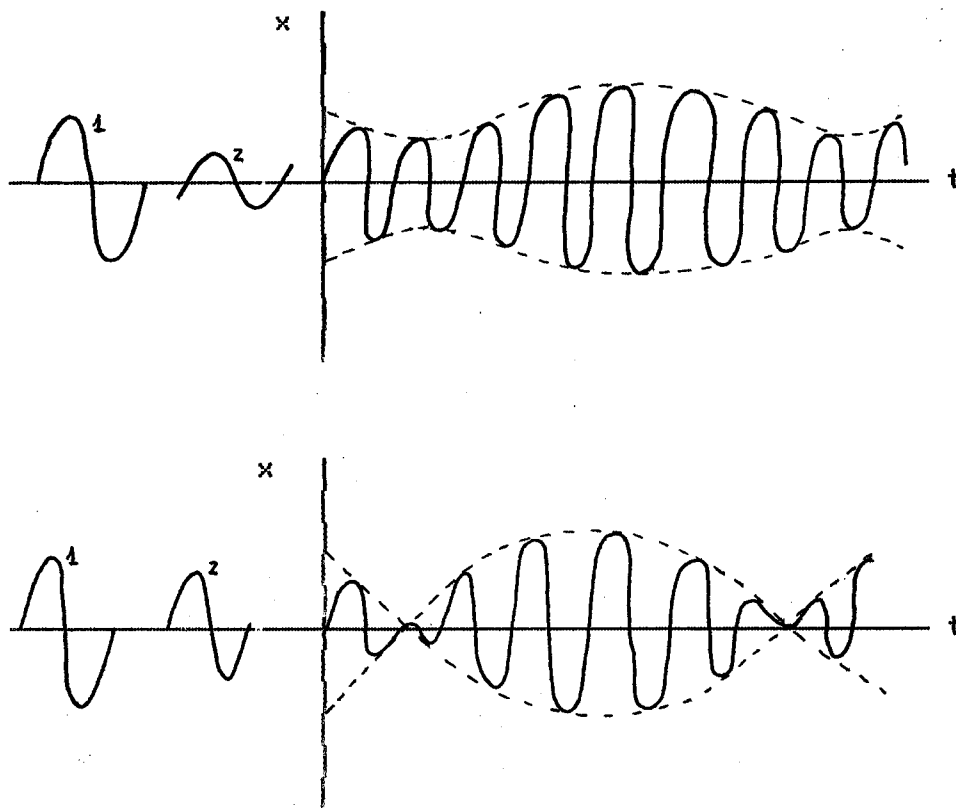
$$\vec{s} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$



Si ω_1 , es aproximadamente igual a ω_2 , los dos vectores mantendrán durante un cierto tiempo sus posiciones relativas parecidas ($\phi \approx \text{cte.}$), período durante el cual el movimiento resultante será la suma de ambos, (como si tuvieran frecuencias iguales).

Con el paso del tiempo el ángulo ϕ irá variando por lo que las "senoides suma" no tendrán la misma amplitud.

El movimiento resultante es el mostrado en las figuras, en las que se han dibujado dos casos diferentes, según que las amplitudes de los vectores x_1 y x_2 sean iguales o diferentes (sólo en el caso de que $x_1 = x_2$, el movimiento resultante tendrá amplitudes nulas)



(Obsérvese que las amplitudes resultantes máximas se darán cuando los dos vectores \bar{x}_1 y \bar{x}_2 , tienen sentidos parecidos, las mínimas, (o nulas), cuando tienen sentidos contrarios). En este caso, lo que puede definirse en el movimiento periódico resultante es la "frecuencia de la pulsación" (f_p)

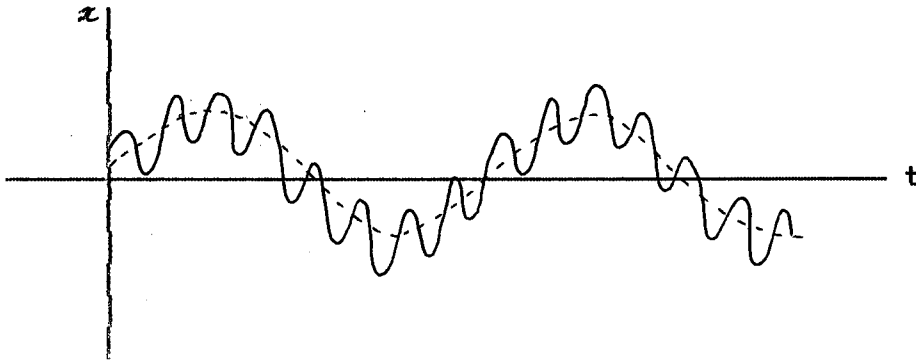
$$f_p = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

Con lo cual, el período de la pulsación será:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

c.- Frecuencias circulares muy diferentes:

Si $\omega_2 \gg \omega_1$, los dos movimientos se reconocen fácilmente, por separado, como se ve en la figura:



3-2.-Suma de movimientos armónicos en direcciones perpendiculares

Un punto puede estar sometido a dos movimientos vibratorios simultáneos, en direcciones perpendiculares

$$x = X \cdot \cos (\omega_1 t + \delta_1)$$

$$y = Y \cdot \cos (\omega_2 t + \delta_2)$$

En estos casos, la trayectoria resultante (que será una función de x e y del tipo $f(x,y) = 0$) se conoce con el nombre de curva de Lissajous.

También conviene separar dos casos según las frecuencias seán iguales o diferentes.

a.- Frecuencias circulares iguales:

$$x = X \cdot \cos (\omega t + \delta_1)$$

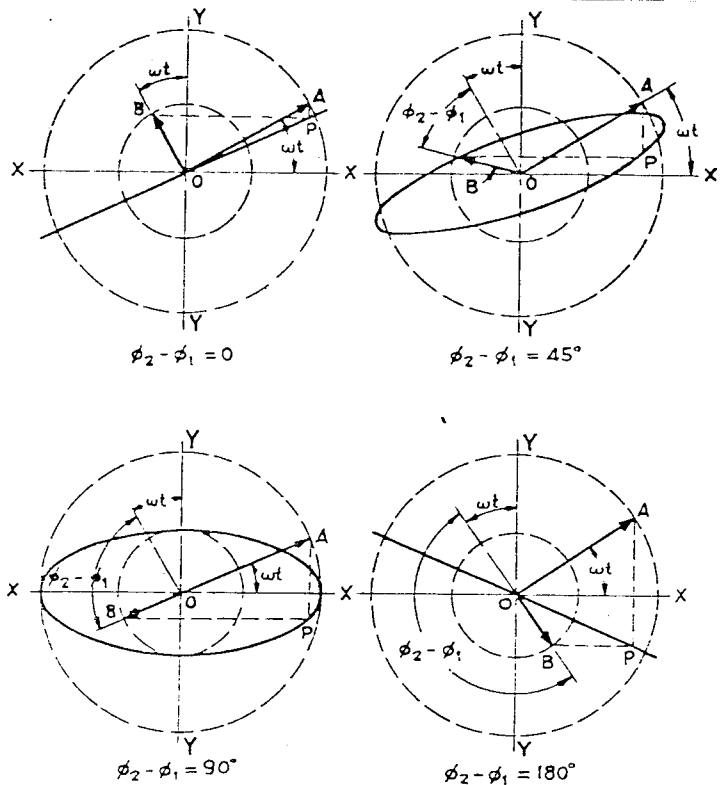
$$y = Y \cdot \cos (\omega t + \delta_2)$$

eliminando t entre ellas se obtiene la ecuación de la trayectoria:

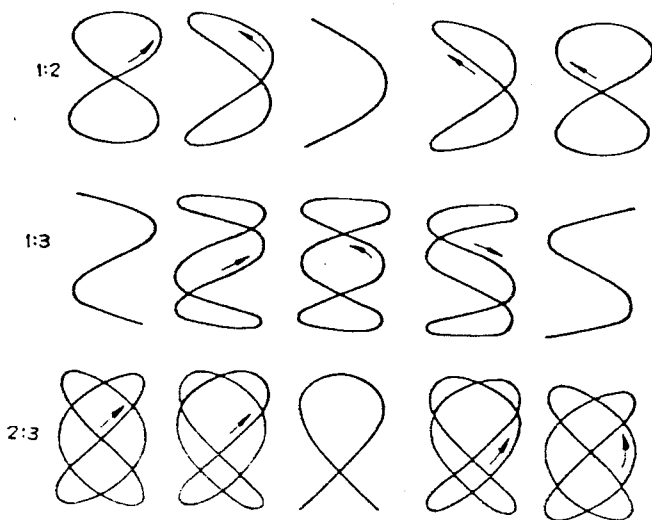
$$\left[\frac{Y}{X} \right]^2 \cdot x^2 - \frac{2 \cdot Y}{X} \cdot \cos (\delta_1 - \delta_2) \cdot xy + y^2 - Y^2 \cdot \text{Sen}^2 (\delta_1 - \delta_2) = 0$$

NOTA: En el caso particular de $X = Y$ y $\delta_1 = \delta_2$, la trayectoria es un círculo de radio $X = Y = R$.

Las figuras muestran diferentes curvas para distintos valores de $\phi_1 - \phi_2$.



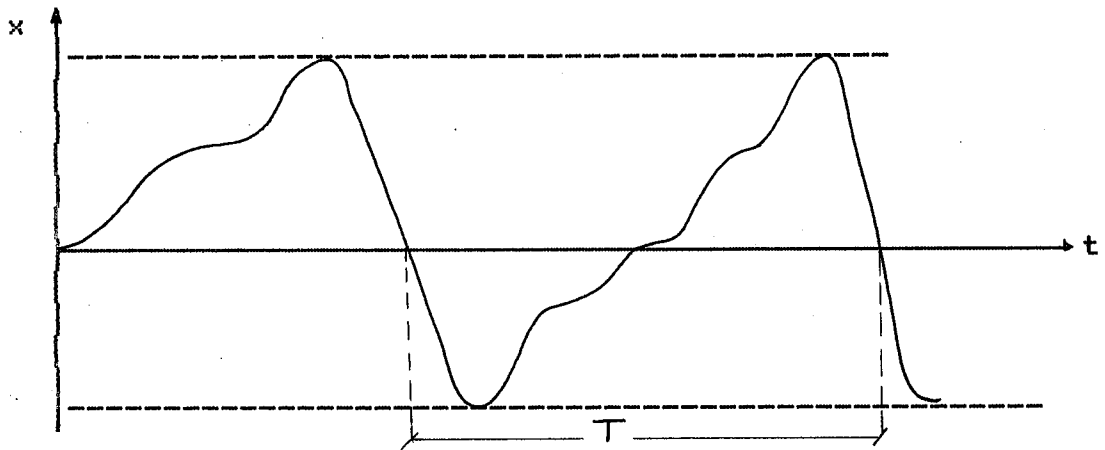
b.-Si las frecuencias no son iguales (pero su relación es un número entero) se tienen las curvas de la figura.



Igual que antes, la forma de la trayectoria depende de la relación de frecuencias y del ángulo de desfase entre los vectores (además de su amplitud), por lo que si no se conocen las frecuencias, pero si la curva resultante, se pueden hallar aquellas.

4.-MOVIMIENTOS PERIODICOS

-Es el movimiento que se repite con un periodo determinado, como se ve en la figura.



-Según demostró Fourier, el movimiento periódico puede considerarse la suma de un número infinito de movimientos armónicos, según la expresión:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \text{Cos } \omega t + a_2 \cdot \text{Cos } 2\omega t + \dots \\ + b_1 \cdot \text{Sen } \omega t + b_2 \cdot \text{Sen } 2\omega t + \dots$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \text{Cos } n\omega t + b_n \cdot \text{Sen } n\omega t) \quad [1]$$

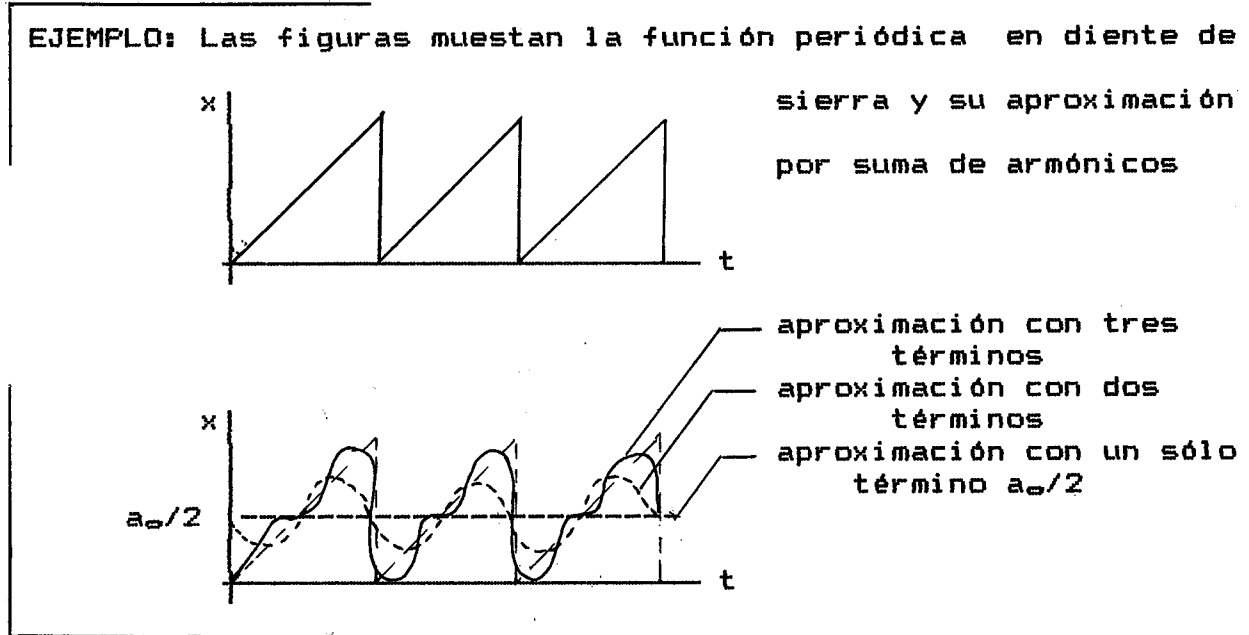
en donde $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental y $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ unos coeficientes constantes de valor:

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cdot dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot dt$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cdot \text{Cos } n\omega t \cdot dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \text{Cos } n\omega t \cdot dt$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cdot \text{Sen } n\omega t \cdot dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \text{Sen } n\omega t \cdot dt$$

Naturalmente, la aproximación de la función [1] a la función real depende de los términos que se desprecien en la serie (error de truncamiento)



-Las series de Fourier también pueden ser representadas por una suma de términos cosenos, solamente. En efecto:

$$x(t) = c_0 + c_1 \cdot \cos(\omega t - \varphi_1) + c_2 \cdot \cos(2\omega t - \varphi_2) + \dots$$

siendo:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$$

$$\varphi_n = \text{Tag}^{-1} \cdot \left[\frac{b_n}{a_n} \right]$$

-También puede representarse la serie de Fourier en forma de números complejos. Recordando que:

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} \cdot (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2} \cdot (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

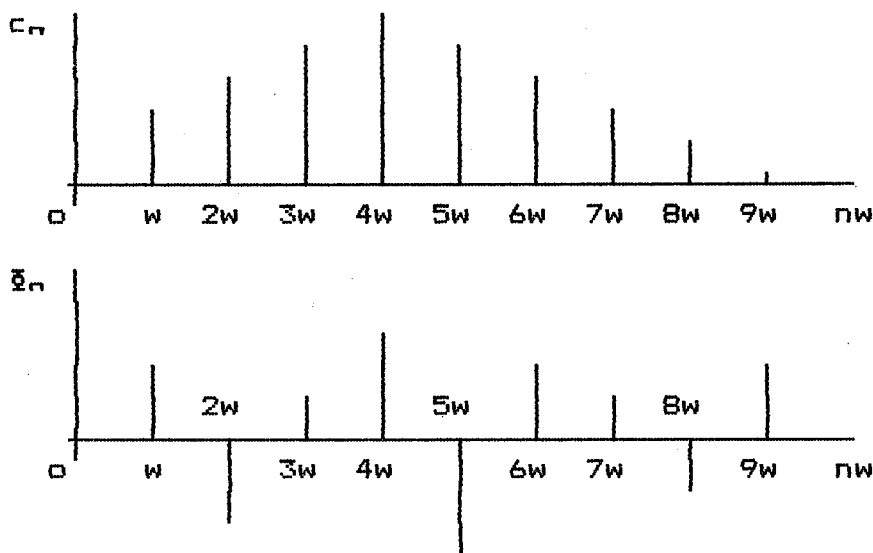
Podemos escribir:

$$a(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n [e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}] + b_n [e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}] \right]$$

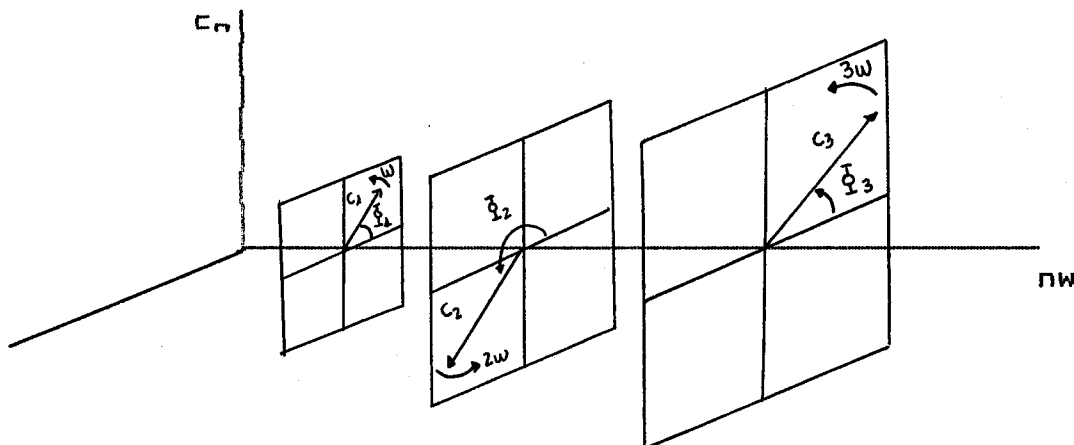
-La función armónica $a_n \cdot \cos n\omega t$ o $b_n \cdot \sin n\omega t$ se conocen como "armónico de orden n" de la función periódica $x(t)$. El periodo de este armónico será T/n

Cuando las amplitudes de los armónicos se representan en un diagrama frente a las frecuencias, se obtiene el conocido "espectro de frecuencias" o "diagrama espectral".

En la misma forma también puede trazarse el "diagrama de fases".



Un gráfico combinado de ambos puede verse en la figura

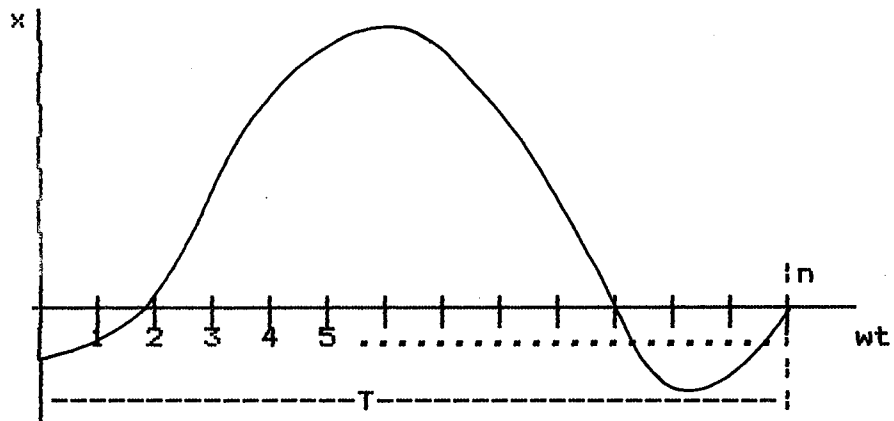


NOTA: Obviamente, cuando alguno de los coeficientes son nulos, es evidente que los armónicos correspondientes "no estarán presentes" en el diagrama espectral

NOTA: En muchas aplicaciones prácticas se desconoce la ecuación matemática de $x(t)$.

En este caso puede seguirse un método aproximado para calcular a_0 , a_n y b_n .

Para ello se divide el periodo T en un número n de partes iguales, y se numeran. Se mide $x(t)$ para cada división, y se obtienen así los valores $x_i(t)$



Los coeficientes pueden calcularse mediante las expresiones

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t)$$

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t) \cdot \cos(k \cdot i \cdot \theta)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t) \cdot \text{Sen}(k \cdot i \cdot \theta)$$

Siendo θ el ángulo correspondiente a cada división

5.-Trabajo realizado por una fuerza de variación armónica (o par), sobre un punto que se mueve armónicamente

a.- Caso en que la fuerza y el movimiento tienen la misma frecuencia circular

$$F = F_0 \cdot \text{Sen} (wt + \varphi)$$

$$x = X \cdot \text{Sen} (wt)$$

φ es el desfase entre la fuerza aplicada y el movimiento del punto.

Para $\varphi = 0$, la fuerza crece y decrece al mismo ritmo y dirección que lo hace el movimiento del punto.

Para $\varphi = \pi$, el punto se mueve en un sentido, mientras la fuerza lo "empuja" en sentido contrario.

El trabajo elemental de la fuerza aplicada será:

$$F \cdot dx = F \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

Durante un periodo:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T F \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \frac{1}{w} \int_0^{2\pi} F \cdot \frac{dx}{dt} (dwt) = \\ &= F_0 \cdot X \int_0^{2\pi} \text{Sen} (wt + \varphi) \cdot \text{Cos} wt \cdot d(wt) = \\ &= F_0 \cdot X \int_0^{2\pi} \text{Cos} wt \cdot (\text{Sen} wt \cdot \text{Cos} \varphi + \text{Cos} wt \cdot \text{Sen} \varphi) \cdot d(wt) = \end{aligned}$$

$$= F_0 \cdot X \cdot \cos \varphi \int_0^{2\pi} (\sin \omega t \cdot \cos \omega t \cdot d(\omega t)) + F_0 \cdot X \cdot \sin \varphi \int_0^{\pi} (\cos^2 \omega t \cdot d(\omega t))$$

$$W = \pi \cdot F_0 \cdot X \cdot \sin \varphi$$

(la primera integral es cero y la segunda, π)

Como se observa, para un desfase nulo entre la fuerza y el desplazamiento, ($\varphi = 0$), $W = 0$. Cuando $\varphi = \pi/2$, W es máximo, o lo que es igual, el trabajo es máximo cuando la fuerza aplicada esta en fase con la velocidad del punto.

b.- En el caso de que la fuerza y el movimiento no tengan la misma frecuencia (lo que sucederá cuando se aplican fuerzas armónicas en puntos con movimiento periódico), vamos a ver que no producen trabajo, salvo en casos particulares.

Por ejemplo, en un movimiento periódico no armónico, sobre el que actúa una fuerza armónica, esta efectuará trabajo solamente sobre la componente armónica del movimiento de igual frecuencia, pero no sobre las demas.

En efecto:

$$F = F_0 \cdot \sin n\omega t$$

$$x = X \cdot \sin (m \cdot \omega t + \varphi)$$

$$W = \int_0^T F \cdot dx = \int_0^T F \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int_0^T F_0 \cdot \sin n\omega t \cdot X \cdot m\omega \cdot \cos (n\omega t + \varphi) \cdot dt =$$

$$= \int_0^T F_0 \cdot \sin n\omega t \cdot X \cdot m \cdot \omega \cdot (\cos m\omega t \cdot \cos \varphi - \sin m\omega t \cdot \sin \varphi) \cdot dt =$$

$$\begin{aligned}
&= X \cdot m \cdot w \cdot \cos \vartheta \cdot F_0 \cdot \int_0^T \text{Sen } nwt \cdot \text{Cos } m \cdot wt \cdot dt + \\
&+ X \cdot m \cdot w \cdot \text{Sen } \vartheta \cdot F_0 \cdot \int_0^T \text{Sen } nwt \cdot \text{Sen } m \cdot wt \cdot dt = \\
&= X \cdot F_0 \cdot m \cdot w \cdot \cos \vartheta \cdot \int_0^T \left[\frac{1}{2} \text{Sen } (n + m) \cdot wt + \frac{1}{2} \text{Sen } (n - m) \cdot wt \right] \cdot dt + \\
&+ X \cdot F_0 \cdot m \cdot w \cdot \text{Sen } \vartheta \cdot \int_0^T \left[\frac{1}{2} \text{Cos } (n - m) \cdot wt + \frac{1}{2} \text{Cos } (n + m) \cdot wt \right] \cdot dt
\end{aligned}$$

$$W = 0 \text{ para } n \neq m$$

$$W = F_0 \cdot X \cdot m \cdot w \cdot \text{Sen } \vartheta \text{ para } n = m$$

Ya que para $T = 2\pi/w$, las dos integrales se anulan para valores de m y n enteros y distintos.

Para $n = m$, la primera integral es nula, y la segunda vale π/w .

2.-INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES MECANICAS

=====

- 1.- Concepto y origen de las vibraciones mecánicas.
- 2.- Clasificación de los movimientos vibratorios mecánicos.
- 3.- Parámetros fundamentales que definen los movimientos vibratorios.
- 4.- Sistema vibrante. Clasificación.
- 5.- Grados de libertad de los sistemas vibrantes.
- 6.- Rigidez de los sistemas vibrantes.
- 7.- Amortiguamiento de los sistemas vibrantes.
- 8.- Planteamiento general del problema de vibraciones mecánicas.

1.-Concepto y origen de las vibraciones mecánicas.

-Se entiende por movimiento vibratorio la variación de la configuración de un sistema mecánico elástico, con el tiempo, alrededor de una posición de equilibrio estable.

(Normalmente se supone que tales desplazamientos son relativamente pequeños, y compatibles con las deformaciones de tipo elástico -dentro del límite elástico-).

-El fenómeno vibratorio mecánico tiene su origen en las dos siguientes circunstancias:

a.-La existencia de sistemas másicos (cuerpos, elementos de máquinas) elásticos, capaces de almacenar energía e intercambiarla (de deformación e inercial), entre las diferentes partes componentes, y de disiparla por la inevitable presencia de elementos disipadores de naturaleza muy diversa (disipación en forma de calor, de ruido, etc.).

b.-La existencia de acciones perturbadoras de las posibles posiciones de equilibrio estático, puntuales unas veces (choques e impactos, etc.) o persistentes en el tiempo.

-Como ejemplo de vibraciones pueden considerarse las que se producen en motores en movimiento (producidas por las fuerzas y movimientos de trepidación), sacudidas en martillos pilones, automóvil sobre calzada defectuosa, terremotos, etc.

2.-Clasificación de los movimientos vibratorios mecánicos.

a.-En función de la forma del movimiento:

Pueden dividirse en "periódicos" (en los que la configuración del sistema se repite en intervalos de tiempo iguales) y "aperiódicos". Estos últimos pueden dividirse en "deterministas" y "aleatorios". En los primeros puede conocerse una evolución en el tiempo (de forma que en cada instante puede conocerse la posición, velocidad y aceleración de todos y cada una de los puntos del sistema vibrante), mientras que en los segundos ello no es posible, y sólo pueden conocerse los parámetros desde un punto de vista probabilístico.

b.-En función de la magnitud del desplazamiento:

Movimientos vibratorio "constantes", en los que la amplitud tiene siempre el mismo valor.

Movimiento vibratorio "amortiguado", cuando en cada ciclo las amplitudes van decreciendo.

Movimiento vibratorio "amplificado", en el caso contrario.

c.-En función del tipo de excitación:

Movimientos vibratorios "libres", cuando no existen fuerzas exteriores aplicadas durante la vibración.

Movimientos vibratorios "forzados", cuando existe una fuerza exterior aplicada durante la vibración (que puede ser constante o variable).

(Naturalmente, tanto las vibraciones libres como las forzadas, pueden estar amortiguadas).

d.-En función de su comportamiento durante la vibración:

Vibraciones "lineales", cuando la ecuación del desplazamiento es lineal, y por tanto admite el principio de superposición.

Vibraciones "no lineales", en caso contrario.

e.-En función de su duración temporal:

Vibraciones "permanentes"

Vibraciones "transitorias"

CUADRO RESUMEN

- 1.- Vibraciones deterministas.
 - 1-1.- Sistemas lineales.
 - 1-1-1.- Sistemas discretos.
 - 1-1-1-1.- Sistemas de 1 GDL.
 - 1-1-1-1-1.- Vibraciones libres.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-1-2.- Vibraciones forzadas permanentes: excitación armónica.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-1-3.- Vibraciones forzadas permanentes: excitación periódica.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-1-4.- Vibraciones forzadas transitorias.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-1-4.- Vibraciones forzadas por funciones cualesquiera: Integral de Duhamel.
 - 1-1-1-2.- Sistemas de 2 GDL.
 - 1-1-1-2-1.- Vibraciones libres.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-2-2.- Vibraciones forzadas.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-3.- Sistemas de n GDL.
 - 1-1-1-3-1.- Vibraciones libres.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-3-2.- Vibraciones forzadas.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-2.- Sistemas continuos.
 - 1-1-2-1.- Vibraciones libres.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-2-2.- Vibraciones forzadas.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-2.- Sistemas no lineales.
- 2.- Vibraciones aleatorias.

3.-Parámetros fundamentales que definen los movimientos vibratorios.

-Ciclo: Evolución del sistema entre un instante y el siguiente en que vuelven a repetirse las mismas características del sistema (x, \dot{x}, \ddot{x})

-Periodo: Tiempo en que transcurre un ciclo. Se designa por T.

-Frecuencia: Número de ciclos en la unidad de tiempo. Se designa por f ($f = 1/T$)

-Valor pico: Es el máximo valor del desplazamiento x_{max} .

En un movimiento armónico coincide con la amplitud.

-Valor medio: Se define por

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot dt$$

Para una onda senoidal, $x = A \cdot \text{Sen } \omega t$; $\bar{x} = 0$

Para media onda:

$$\bar{x} = \frac{A}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \text{Sen } \omega t \cdot dt = \frac{2A}{\pi} = 0,637 \cdot A$$

-Valor cuadrático medio: Se define por

$$\bar{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x^2(t) \cdot dt$$

Para una onda senoidal $x = A \cdot \text{Sen } \omega t$

$$\bar{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \cdot \int_0^T \text{Sen}^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2} A^2$$

-Raíz cuadrática media (r.m.s): Se define por

$$r.m.s. = \sqrt{\frac{x^2}{T}}$$

Para ondas senoidales $x = A \cdot \text{Sen } \omega t$

$$r.m.s. = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot A$$

-Decibel: Se define por

$$Db = 10 \cdot \log_{10}(x_1/x_2)^2 \quad \text{ó} \quad Db = 20 \cdot \log_{10}(x_1/x_2)$$

(En realidad, es una medida de la relación entre amplitudes)

Un amplificador de ganancia de amplitud 5 ($X_2 = 5X_1$) tiene una ganancia de 14 decibelios ($20 \cdot \log_{10}5 = 14$)

-Octava: Cuando el límite superior del rango de frecuencias es el doble del límite inferior, se dice que la frecuencia cubre una octava

<u>banda</u>	<u>rango frecuencias</u>	<u>ancho banda</u>
1	10 - 20 Hz	10
2	20 - 40 "	20
3	40 - 80 "	40
4	200 - 400 "	200

4.-Sistema vibrante. Clasificación

-Se entiende por "sistema vibrante" el modelo idealizado de cualquier cuerpo (elemento de máquina, en nuestro caso) que por las causas que sean pueda entrar en vibración.

-En general las vibraciones mecánicas (de los elementos de máquinas) pueden incluirse en una de estas tres categorías:

- a.- Vibraciones de extensión (tracción-compresión).
- b.- Vibraciones de torsión.
- c.- Vibraciones de flexión.
- d.- Cualquier combinación de las anteriores.

-Evidentemente, los sistemas vibrantes han de reproducir con la máxima exactitud el elemento real en vibración, lo que significa que han de "reflejar" las cuatro propiedades físicas que caracterizan a un sólido en vibración:

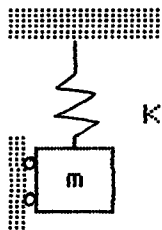
- a.- Su masa, que en forma idealizada se supone puntual e indeformable.
- b.- Su elasticidad (o mejor, su rigidez) la cual, puede ser idealizada por un resorte (sin masa), o por una barra de torsión (también sin masa) en sistemas con vibraciones de torsión o por una viga (sin masa), en sistema vibrante en flexión.
- c.- El amortiguamiento, interno o externo, de varios tipos, según sea el mecanismo de amortiguación preponderante en el cuerpo en vibración, y que se suele representar por un pequeño "cilindro amortiguador" (como se ve en las figuras)

d.- Las coordenadas o parámetros que definen el movimiento de todas y cada una de las masas del sistema, o mejor, los grados de libertad del sistema.

-Según todo lo dicho, los sistemas vibrantes pueden clasificarse en alguna de estas categorías:

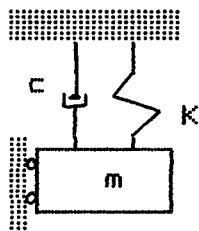
- a.- Sistemas masa-resorte.
- b.- Sistemas de torsión.
- c.- Sistemas de flexión.
- d.- Cualquier combinación de las anteriores.

-El sistema vibrante masa-resorte más sencillo es el representado en la figura.



Está formado por un "resorte ideal", sin masa, de rigidez K , y una masa ideal, indeformable (rigidez infinita) de valor m_1 .

El movimiento de la masa es vertical.



Si este sistema masa-resorte estuviera amortiguado, su representación sería la que se ve en la figura, siendo c la constante de amortiguamiento.

-El sistema vibrante de torsión más sencillo es el mostrado en la figura.

Está formado por un disco indeformable unido al apoyo por una barra sin masa de rigidez a la torsión K_t . El amortiguamiento de la vibración a torsión se representa como se ve en la

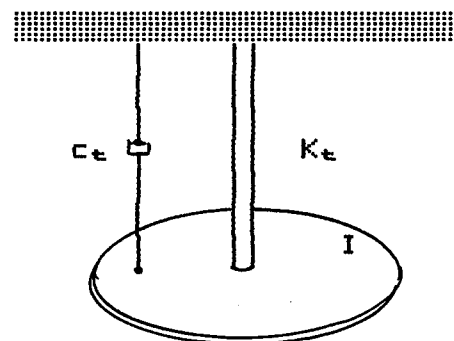
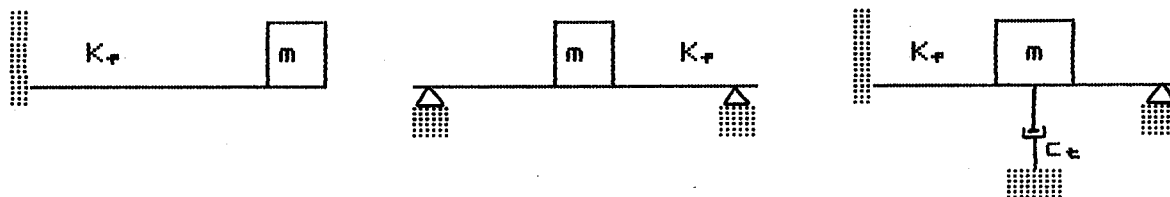


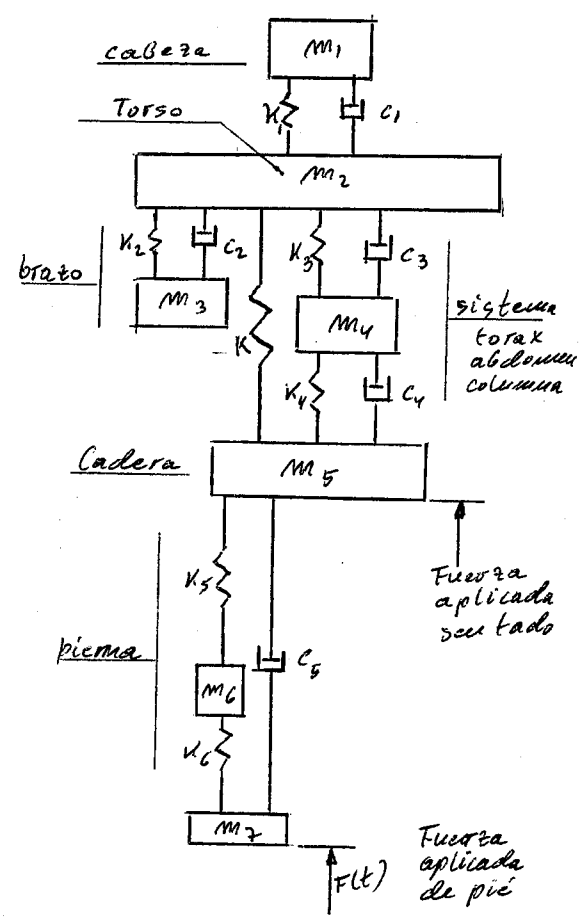
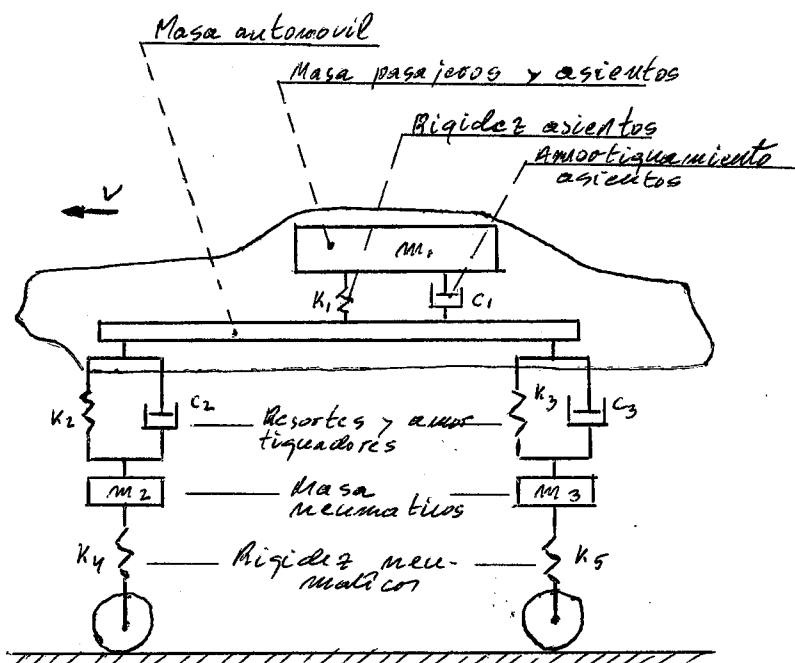
figura (en lugar de la masa m ha de considerarse el momento polar de inercia I del disco, respecto al eje de giro)

-Los sistemas vibrantes en flexión pueden adquirir variadas configuraciones, según sean las condiciones de los apoyos. Las figuras muestran algunos casos.



-Naturalmente, los sistemas vibrantes pueden alcanzar una gran complejidad, según lo sea el sistema físico (máquina) al que pretendan simular.

En las figuras se han representado los sistemas vibrantes que idealizan el comportamiento de un esqueleto humano, y el de un automóvil.



5.-Grados de libertad de los sistemas vibrantes

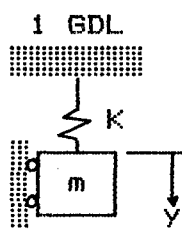
-Se define como grados de libertad de un sistema vibrante el número de parámetros independientes necesarios para definir su configuración, en cualquier instante.

-Un sistema que puede definirse por un número finito de grados de libertad se dice que es "discreto". En caso contrario se denomina "continuo".

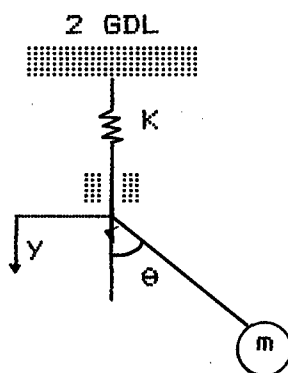
(En la práctica, todos los sistemas mecánicos vibrantes son continuos pero aplicándole diversas hipótesis simplificativas pueden convertirse, con mayor o menor exactitud, en sistemas discretos, siempre más sencillos de estudiar).

-Los sistemas discretos, atendiendo al número de grados de libertad precisos para definirlos, se clasifican en 1, 2, 3, ... n GDL.

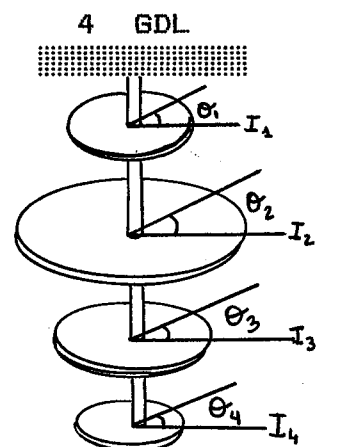
-Ejemplos:



(la coordenada y define la configuración del sistema)



(y y θ definen la configuración del sistema)



($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ definen la configuración del sistema)

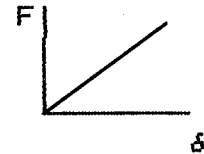
-En el ejemplo anterior del esqueleto humano, se tiene un sistema de 7 GDL.

6.-Rigidez de los sistemas vibrantes

a.-Sistemas masa-resorte:

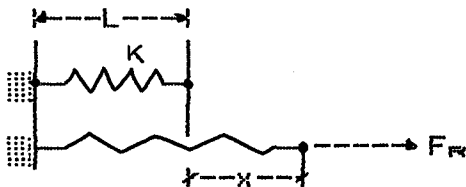
Como sabemos, al aplicarle a un resorte dado una fuerza F se produce un alargamiento δ , y mientras el material se mantenga dentro de su límite elástico, la relación entre F y δ es constante.

$$K = \frac{F_1}{\delta_1} = \frac{F_2}{\delta_2} = \dots$$



El resorte se dice que es lineal y K es una constante llamada rigidez.

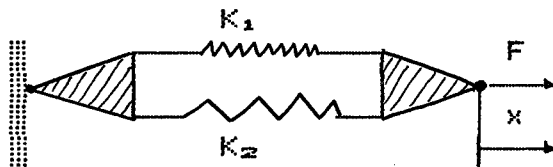
Vectorialmente puede expresarse:



$$\bar{F}_R = -K \cdot \bar{x}$$

poniendo signo (-) para señalar que la fuerza siempre tiene dirección contraria al desplazamiento.

-Si se tienen dos resortes en paralelo la rigidez equivalente será la suma de las rigideces.



El desplazamiento x será el mismo para ambos resortes, luego:

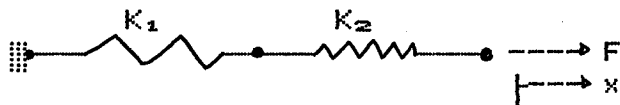
$$F_1 = K_1 \cdot x$$

$$F_2 = K_2 \cdot x$$

$$F = F_1 + F_2 = (K_1 + K_2) \cdot x$$

$$K_e = K_1 + K_2$$

-Si se tienen dos resortes en serie, la rigidez del conjunto equivalente será menor que la del menor de ellos. En efecto:



en este caso, la fuerza sobre cada resorte es la misma, F.

$$\left. \begin{aligned} F &= K_1 \cdot x_1 \\ F &= K_2 \cdot x_2 \end{aligned} \right\} x = x_1 + x_2$$

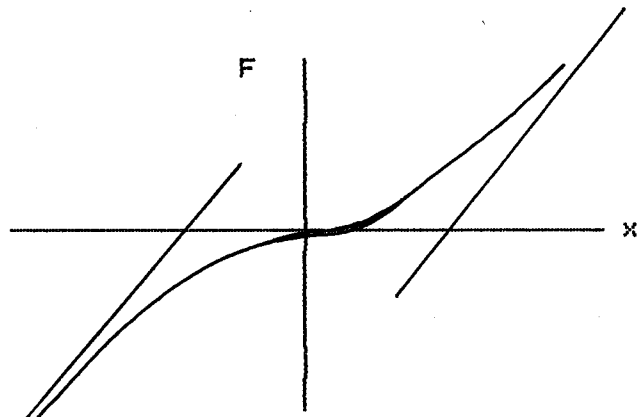
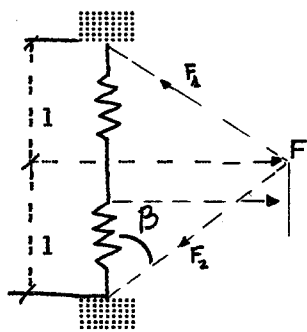
$$x = F \left[1/K_1 + 1/K_2 \right]$$

luego:

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \implies K_e = \frac{K_1 + K_2}{K_1 \cdot K_2}$$

NOTA: No siempre los resortes tienen características lineales, como son los casos de las figuras:

-Resortes cargados transversalmente

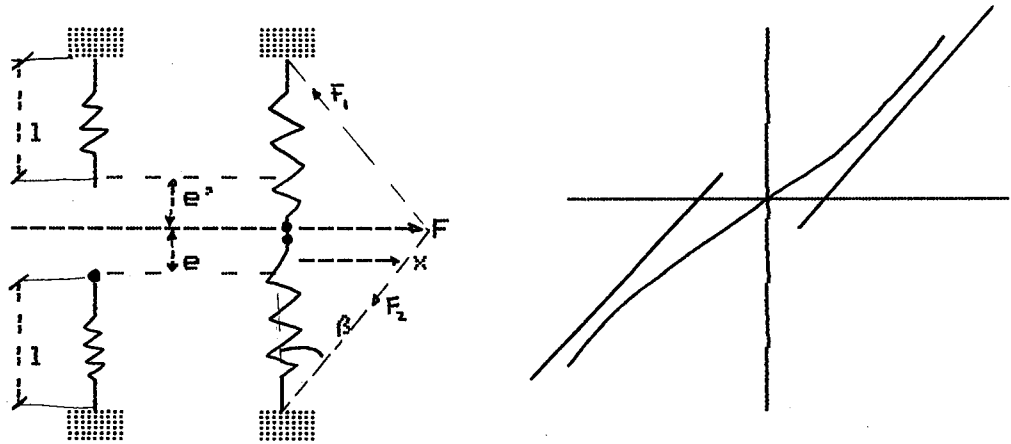


$$F_1 = F_2 = K \left[\frac{1}{\cos \beta} - 1 \right]$$

$$F_R = 2F_1 \cdot \text{Sen } \beta = 2K \cdot l \cdot (\text{Tag } \beta - \text{Sen } \beta)$$

$$F_R = 2K \cdot x \cdot \left[1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}} \right]$$

-Idem, pero los resortes pretensados



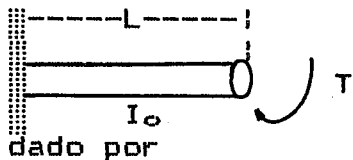
$$f_1 = f_2 = K \left[\frac{l + l^2}{\text{Cos } \beta} - l \right]$$

$$F_R = 2 \cdot F_2 \cdot \text{Sen } \beta = 2K \cdot \left[(l + l^2) \cdot \text{tag } \beta - l \cdot \text{Sen } \beta \right]$$

$$F_R = 2 \cdot K \cdot x \cdot \left[1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + (l + l^2)^2}} \right]$$

b.-Sistemas de torsión:

Como sabemos, al aplicarle a una barra de longitud \$L\$ y momento polar de inercia \$I_0\$ un par de torsión \$T\$, girará un ángulo \$\theta\$ dado por



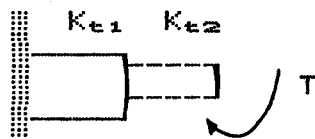
$$\theta = \frac{T \cdot L}{G \cdot I_0}$$

(Siendo G el módulo de rigidez a torsión) La relación entre el par aplicado T y el ángulo girado θ se denomina rigidez de torsión,

$$K_t = \frac{T}{\theta} = \frac{G \cdot I_o}{L}$$

que como se ve, es un valor cte. para cada material (G) y para unas dimensiones del cuerpo dadas (G, I_o, L).

-Si se tienen varios resortes de torsión en serie, como muestra la figura, con distintos valores de la rigidez,



la rigidez equivalente se obtendrá fácilmente, sabiendo que:

$$\theta_1 = \frac{T}{K_{t1}} \quad \theta_2 = \frac{T}{K_{t2}}$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{T}{K_{t1}} + \frac{T}{K_{t2}} = T \left[\frac{1}{K_{t1}} + \frac{1}{K_{t2}} \right]$$

Luego

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_{t1}} + \frac{1}{K_{t2}}$$

$$K_e = \frac{K_{t1} + K_{t2}}{K_{t1} \cdot K_{t2}}$$

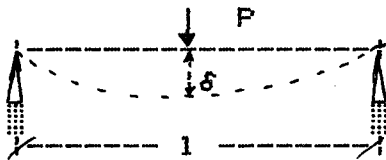
-Si se tienen varios resortes de torsión en paralelo, se obtendrá fácilmente

$$K_e = K_{t1} + K_{t2}$$

c.-Sistemas de flexión:

Como sabemos, al aplicar una carga P a una viga (sin masa) se produce una deflexión (dependiendo del tipo de apoyo), que conduce al cálculo del coeficiente de rigidez a flexión K_f .

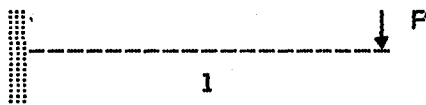
Si l es la luz e I el momento de inercia de la sección



respecto del eje transversal;

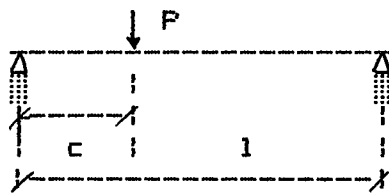
la flecha vale:

$$\delta = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot EI}$$

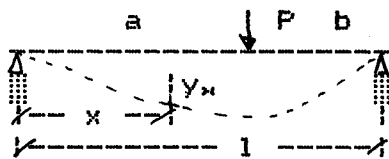


Con lo cual $K_f = \frac{P}{\delta} = \frac{48 \cdot EI}{l^3}$

$$\delta = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot EI} \implies K_f = \frac{P}{\delta} = \frac{3 \cdot EI}{l^3}$$



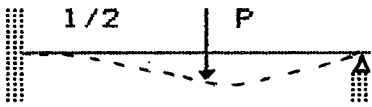
$$\delta = \frac{P \cdot c^2 (1 - c)^2}{31 \cdot EI} \implies K_f = \frac{31 \cdot EI}{c^2 (1 - c)^2}$$



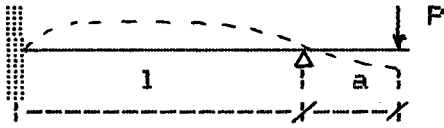
$$y_x = \frac{P \cdot b \cdot x}{6EI \cdot l} \cdot (l^2 - x^2 - b^2); \quad K_f = \frac{3EI \cdot l}{a^2 \cdot b^2}$$



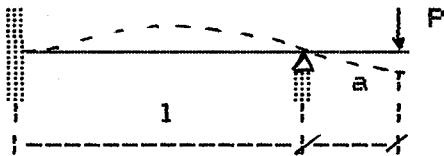
$$K_f = \frac{192 \cdot EI}{l^3}$$



$$K_r = \frac{768 \cdot EI}{7 \cdot l^3}$$



$$K_r = \frac{3 \cdot EI}{(1 + a) \cdot a^2}$$



$$K_r = \frac{24 \cdot EI}{(31 + 8a) \cdot a^2}$$

7.-Amortiguamiento de los sistemas vibrantes

-El proceso por el cual una vibración disminuye de amplitud con el tiempo se denomina amortiguamiento.

En este, la energía del sistema se disipa en forma de calor de fricción, o al medio circundante, en forma de sonido.

-Existen varios mecanismos de amortiguamiento, entre los que pueden considerarse:

-Amortiguamiento fluido $\left[\begin{array}{l} \text{-Viscoso} \\ \text{-Turbulento} \end{array} \right.$

-Amortiguamiento seco (de Coulomb)

-Amortiguamiento histerético o estructural.

-Amortiguamiento fluido viscoso: Es el que se establece al pasar un fluido por un orificio, en flujo laminar. En él, la resistencia F es proporcional a la velocidad, pudiendo ponerse

$$\bar{F} = -c \cdot \bar{v} = -c \cdot \dot{x}$$

siendo c el coeficiente de amortiguamiento.

-Amortiguamiento fluido turbulento: Es el que se produce en un fluido, un flujo turbulento. En él, la resistencia F es proporcional al cuadrado de la velocidad.

$$F = -c \cdot v^2$$

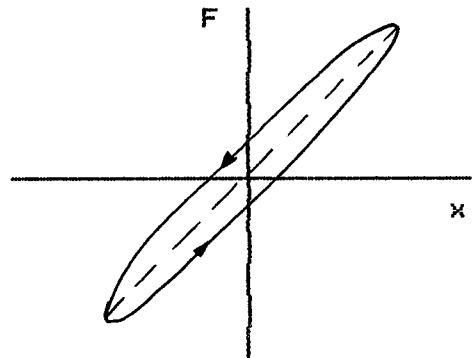
NOTA: Los amortiguamientos hidráulicos de automóviles, puertas, etc, se comportan como una mezcla de los anteriores.

NOTA: El único amortiguamiento que produce una ecuación lineal es el viscoso, por lo que es el más usado, a la hora de efectuar simplificaciones y analogías de sistemas mecánicos complejos, con amortiguamiento.

-Amortiguamiento de Culomb: Es el que se produce en el rozamiento seco entre dos sólidos. Para velocidades pequeñas, la fuerza puede suponerse constante en módulo, y de dirección opuesta siempre a la velocidad relativa.

$$F_R = \mu \cdot N$$

-Amortiguamiento histerético o estructural: Se debe al rozamiento interno entre moléculas y cristales, en el momento de la vibración. Ello hace que la relación fuerza-deformación no sea igual al encogerse el cuerpo que al estirarse, siguiendo un ciclo de histerésis.



El área encerrada por el ciclo es el trabajo perdido en calor. Tal trabajo es independiente de la velocidad con que se recorre el ciclo, es decir, de la frecuencia.

8-.Planteamiento general del problema de vibraciones mecánicas

-La resolución de un problema de vibraciones mecánicas se desarrolla, normalmente, en cuatro etapas.

Primera etapa: Definición del modelo matemático.

Tal como ya se ha visto, consiste esta etapa en definir el sistema vibrante que más se aproxime al modelo real.

Esta es una etapa en que la experiencia juega un papel decisivo, ya que esta reducción no obedece a leyes matemáticas definidas.

El modelo matemático será un conjunto, más o menos complejo, de masas, resortes y amortiguadores, con los GDL que sean precisos.

Segunda etapa: Definición de las ecuaciones diferenciales del sistema.

Partiendo del modelo matemático definido, se aplican las ecuaciones de Newton, el principio de D'Alembert, o el principio de conservación de la energía para calcular las ecuaciones diferenciales que definen el movimiento del sistema. Esta etapa es puramente objetiva.

Tercera etapa: Solución de las ecuaciones diferenciales del sistema.

El conjunto de ecuaciones anteriormente definidas se resolverán usando algunas de las técnicas matemáticas conocidas: solución general de ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace, métodos matriciales, métodos numéricos (Runge-Kutta, elementos finitos, etc.)

También es una etapa totalmente objetiva, que sólo depende de los conocimientos matemáticos precisos.

Cuarta etapa: Interpretación de los resultados.

Esta es quizás la etapa más decisiva, la que justifica la existencia de las tres anteriores.

Ha de conducir necesariamente a la interpretación del análisis efectuado, o a las consecuentes implicaciones para el diseño.

Al igual que la primera, es bastante subjetiva, y la experiencia juega un papel fundamental.

3.1.-ANÁLISIS GENERAL DE LOS SISTEMAS VIBRANTES DE 1 GDL

- 1.- Formulación general de la ecuación del movimiento.
- 2.- Vibraciones libres no amortiguadas.
 - 2-1.- Método general.
 - 2-2.- Método de la energía.
 - 2-3.- Método de Rayleigh.
- 3.- Vibraciones libres amortiguadas.
 - 3-1.- Amortiguamiento viscoso. Relación de amortiguamiento
 - 3-2.- Amortiguamiento seco (Coulomb)
 - 3-3.- Amortiguamiento histerético (estructural)
- 4.- Vibraciones forzadas, no amortiguadas.
 - 4-1.- Fuerza de excitación armónica. Resonancia.
- 5.- Vibraciones forzadas amortiguadas.
 - 5-1.- Fuerza de excitación armónica.
 - 5-1-1.- Método general. Cálculo del amortiguamiento.
 - 5-1-2.- Método de la impedancia mecánica.
 - 5-2.- Fuerza de excitación periódica.
 - 5-3.- Fuerzas de excitación " elementales ".
 - 5-3-1.- Introducción.
 - 5-3-2.- Función escalón.
 - 5-3-3.- Función rampa.
 - 5-3-4.- Función exponencial decreciente.
 - 5-3-5.- Función diferencia escalón-exponencial.
 - 5-3-6.- Función impulso.
 - 5-4.- Fuerzas de excitación cualesquiera. Integral de Duhamel.
- 6.- Cálculo de la respuesta por métodos numéricos.
 - 6-1.- Método de la diferencia central.
 - 6-2.- Método de Runge-Kutta.

1.-Formulación general de la ecuación del movimiento vibratorio en sistemas mecánicos de un grado de libertad

-La forma más sencilla de plantear la ecuación del movimiento de una masa vibrante m es aplicar la segunda ley de Newton.

$$P(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

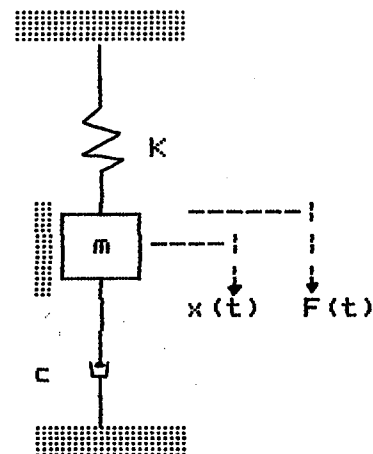
donde en $P(t)$ se incluyen las fuerzas exteriores aplicadas sobre la masa m , las fuerzas elásticas (fuerzas de deformación alrededor de la posición de equilibrio) y las fuerzas amortiguadoras.

-Este planteamiento es válido en sistemas vibrantes sencillos, como el masa-resorte-amortiguador, o cualquier otro que pueda asemejarsele.

En sistemas más complejos, donde tales simplificaciones no son posibles se recurre a otros métodos, basados en el equilibrio entre trabajo aportado y energía del sistema (métodos energéticos).

-A continuación vamos a obtener la ecuación general de equilibrio de un sistema ideal de 1 GDL, masa-resorte-amortiguador, sobre el cual se aplica una fuerza exterior $F(t)$, variable en el tiempo.

La figura esquematiza tal sistema. En él, toda la masa se encuentra concentrada en un punto m .



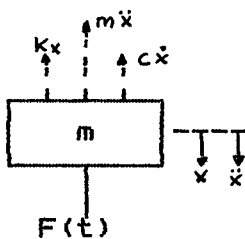
La elasticidad del conjunto se representa por la del resorte, K .

El amortiguamiento interno se supone del tipo viscoso, y se representa por un cilindro y pistón, lleno de aceite, y cuyo coeficiente de amortiguamiento es c .

Al aplicar la fuerza $F(t)$, se produce un desplazamiento de la masa $x(t)$. Con ello, el resorte se alarga, "tirando" de la masa con una fuerza $K \cdot x$, contraria a $F(t)$ (y a x).

Al mismo tiempo, el amortiguador "se encoge", generando una fuerza proporcional a la velocidad, de valor $c \cdot \dot{x}$, y contraria también a $F(t)$ (si $\dot{x}(t)$ tiene la misma dirección que $F(t)$).

El planteamiento de la ecuación de equilibrio nos lleva inmediatamente a la ecuación diferencial del movimiento:



$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t)$$

siendo:

$$m \cdot \ddot{x} = \text{Fuerza de inercia.}$$

$$c \cdot \dot{x} = \text{Fuerza de rozamiento viscoso.}$$

$$K \cdot x = \text{Fuerza elástica.}$$

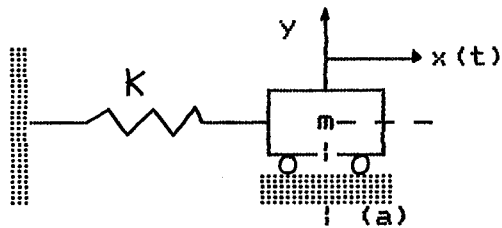
La resolución de esta ecuación nos permite hallar el desplazamiento de la masa, en función del tiempo.

$$x = x(t)$$

Tal cuestión, para diferentes supuestos, va a abordarse en los puntos posteriores.

2-1.-Vibraciones libres, sin amortiguamiento, en sistemas con 1

GDL : Método general



Al ser vibración libre:

$$F(t) = 0$$

Al no estar amortiguada:

$$c \cdot \dot{x} = 0$$

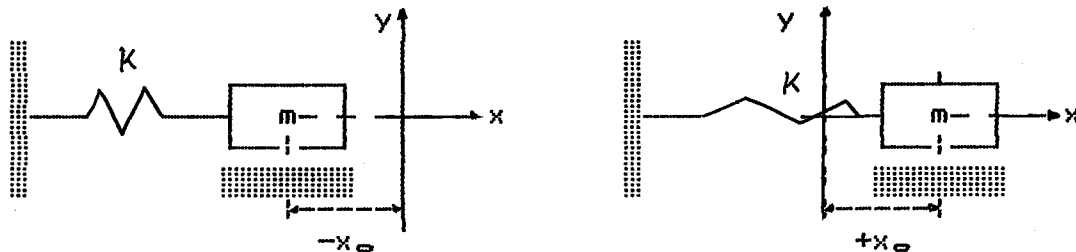
Por lo tanto, la ecuación general queda reducida, para este caso, a :

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0$$

(Ecuación diferencial lineal, homogénea, de 2º orden)

Intuitivamente, el fenómeno vibratorio se comprende fácilmente.

En efecto, imaginemos inicialmente la masa en reposo en la posición (a)



Si ahora desplazamos la masa una distancia x_0 , la mantenemos fija, en esa posición ($x = x_0$, $\dot{x} = 0$) y luego la soltamos, la masa se moverá, con movimiento de vaivén, alrededor del punto de equilibrio (posición a), indefinidamente, con movimiento armónico además. Las posiciones extremas serán $+x_0$ y $-x_0$.

Tampoco es difícil entrever que la frecuencia de este movimiento debe depender, exclusivamente, de las características del sistema vibrante, es decir, de m y de K . En efecto, si m es grande y K pequeña (resorte "blando", de mucho alargamiento), reconocemos intuitivamente que la vibración será "lenta", y de gran amplitud.

Veamos todas estas cuestiones, matemáticamente:

Para la resolución de la ecuación diferencial podemos ensayar una solución del tipo:

$$x = Q \cdot e^{\lambda t}$$

siendo Q una constante y λ un parámetro, ambos a determinar.

Entonces, derivando y sustituyendo queda:

$$\dot{x} = \lambda \cdot Q \cdot e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 \cdot Q \cdot e^{\lambda t}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$m \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + K \cdot Q \cdot e^{\lambda t} = 0$$

Con lo que se obtiene la ecuación característica:

$$m \cdot \lambda^2 + K = 0$$

que tiene dos soluciones:

$$\lambda_1 = +\sqrt{-K/m} \quad ; \quad \lambda_2 = -\sqrt{-K \cdot m}$$

La solución de la ecuación del movimiento puede entonces escribirse:

$$x = Q_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + Q_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Llamando $\sqrt{K/m} = \omega_n$ "frecuencia circular natural" o "frecuencia propia" del sistema (que como vemos, solo depende de las características K y m del sistema, y no de la amplitud de la vibración ni de las condiciones iniciales x_0 o \dot{x}_0), podemos escribir (más adelante veremos el por qué de esta nomenclatura):

$$x = Q_1 \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} + Q_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t}$$

(recuerdese que $\sqrt{-K/m} = i \sqrt{K/m}$)

Para pasarlo a la forma trigonométrica podemos poner:

$$x = Q_1 \cdot [\text{Cos}(\omega_n \cdot t) + i \cdot \text{Sen}(\omega_n \cdot t)] + \\ + Q_2 \cdot [\text{Cos}(-\omega_n \cdot t) + i \cdot \text{Sen}(-\omega_n \cdot t)]$$

$$x = (Q_1 + Q_2) \cdot \text{Cos} \omega_n t + i \cdot (Q_1 - Q_2) \cdot \text{Sen} \omega_n t$$

$$x = E \cdot \text{Cos} \omega_n t + G \cdot \text{Sen} \omega_n t \quad [4]$$

que representa la suma de dos movimientos armónicos de la misma frecuencia, desfasados $\pi/2$. Se trata, como sabemos, de otro movimiento armónico, de igual frecuencia.

NOTA: Obsérvese que si hacemos:

$$2Q_1 = E + G/i$$

$$2Q_2 = E - G/i$$

$$x = (E/2) \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} + (G/2i) \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} + (E/2) \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t} - (G/2i) \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t}$$

$$x = E \left[\frac{e^{i \cdot \omega_n \cdot t} + e^{-i \cdot \omega_n \cdot t}}{2} \right] + G \left[\frac{e^{i \cdot \omega_n \cdot t} - e^{-i \cdot \omega_n \cdot t}}{2 \cdot i} \right]$$

$$x = E \cdot \cos w_n t + G \cdot \sin w_n t$$

$$\text{siendo } E = (Q_1 + Q_2)$$

$$G = i \cdot (Q_1 - Q_2)$$

Las constantes E y G (o las Q_1 y Q_2) pueden ponerse en función de las condiciones iniciales

$$t = 0 \implies \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$x_0 = E$$

$$\dot{x} = -w_n \cdot E \cdot \sin w_n t + w_n \cdot G \cdot \cos w_n t$$

$$\dot{x}_0 = w_n \cdot G \implies G = \dot{x}_0 / w_n$$

Con lo que la ecuación del movimiento (desplazamiento en función del tiempo) es:

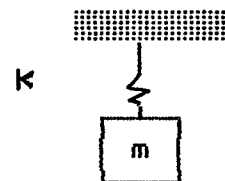
$$x = x_0 \cdot \cos w_n t + (\dot{x}_0 / w_n) \cdot \sin w_n t \quad [5]$$

La amplitud del movimiento es:

$$\sqrt{E^2 + G^2} = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0 / w_n)^2} = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0^2 \cdot m) / K}$$

que como se ve, sólo depende de las condiciones iniciales y de las magnitudes K y m , así que puede ser tan grande como se desee (si lo son x_0 o \dot{x}_0).

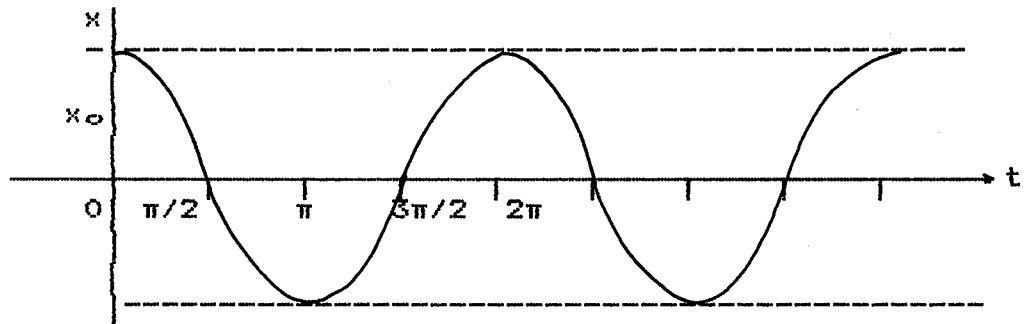
NOTA: Si al sistema masa-resorte se le da un desplazamiento inicial x_0 y se le suelta (sin darle ningún impulso inicial, es decir, con



$\dot{x}_0 = 0$) la respuesta del sistema será:

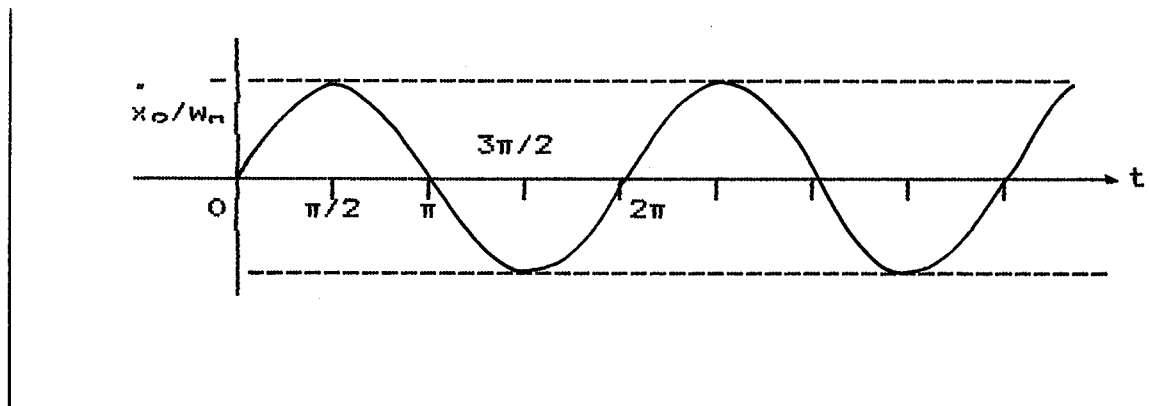
$$x = x_0 \cdot \cos \omega_n t$$

Es decir, una onda cosenoidal.



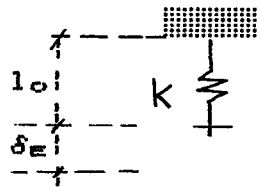
Sin embargo, si en la posición de equilibrio de la masa (sin desplazamiento inicial $x_0 = 0$) le damos un impulso (un golpe), tal que imprima una velocidad inicial \dot{x}_0 , la respuesta será una función senoidal (con diferente amplitud pero igual frecuencia)

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \cdot \text{Sen } \omega_n t$$



NOTA: La consideración eventual del peso de la masa vibrante no introduce ninguna variación en la frecuencia natural del sistema.

En efecto, si al resorte K de la figura se le cuelga

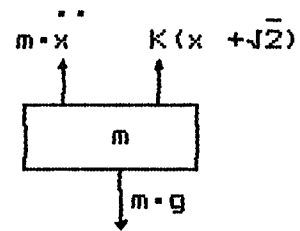


una masa m , se "estira" una longitud δ_e (flecha estática), de valor

$$\delta_e = \frac{m \cdot g}{K}$$

(g = Acel. de la gravedad)

Si ahora desplazamos la masa desde, esta nueva posición de equilibrio, y la liberamos, vibrará libremente, viniendo dada la ecuación del movimiento por:



$$m \cdot \ddot{x} + K(x + \delta_e) - m \cdot g = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot x + K \cdot \delta_e - m \cdot g = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0$$

que es la misma ecuación conocida

NOTA: Conocida la frecuencia circular natural puede hallarse la frecuencia natural de vibración del sistema por:

$$f = 1/T = (1/2\pi) \cdot \omega_n = (1/2\pi) \cdot \sqrt{K/m} \text{ Hertzios}$$

El periodo de la oscilación será:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{m/K} \text{ Segundos}$$

2-2.-Método de la energía

-Muchos sistemas en vibración libre con un grado de libertad no son tan simples como el masa-resorte.

De ahí que para definir la ecuación del sistema vibrante sea preferible emplear otro método, cual es el de la conservación de la energía.

Como sabemos, en un sistema en vibración libre (sobre el cual no se aporta ninguna energía exterior), la suma de las energías cinética y potencial es, en todo instante, constante

$T = \text{energía cinética}$

$U = \text{energía potencial}$

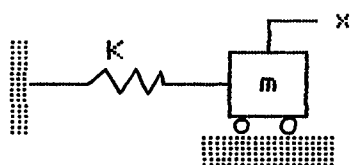
$$T + U = \text{cte.}$$

Por lo tanto, su variación con el tiempo es nula:

$$\frac{d}{dt} \cdot (T + U) = 0$$

Esta ecuación puede emplearse para hallar la E.D. del sistema vibrante.

Ejemplo 1.-



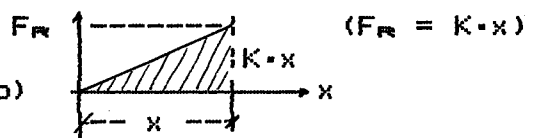
Energía cinética de la masa:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2$$

Energía potencial de la masa:

$$\frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

(área del triángulo)



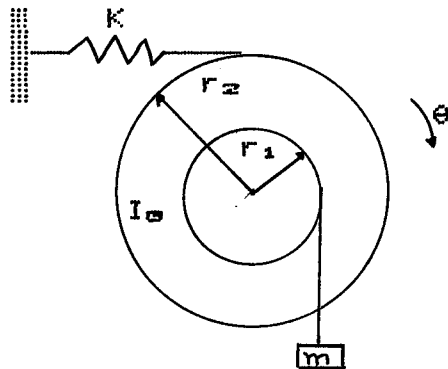
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 = \text{cte.}$$

Diferenciando: $(m \cdot \ddot{x} + K \cdot x) \cdot \dot{x} = 0$

de donde se obtiene:

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0$$

Ejemplo 2.-



Energía cinética del conjunto:

$$\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r_1 \cdot \dot{\theta})^2$$

Energía potencial del conjunto:

$$\frac{1}{2} \cdot K \cdot (r_2 \cdot \theta)^2$$

Sumando:

$$\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r_1 \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot (r_2 \cdot \theta)^2 = \text{cte}$$

Diferenciando:

$$2/2 \cdot I_0 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 2/2 \cdot r_1^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 2/2 \cdot K \cdot r_2 \cdot \theta \cdot \dot{\theta} = 0 \implies$$

de donde se obtiene E.D. del sistema:

$$\implies (I_0 + r_1^2) \cdot \ddot{\theta} + K \cdot r_2 \cdot \theta = 0$$

2-3.-Método de Rayleigh

En sistemas conservativos, y suponiendo la posición 1 aquella en que la energía cinética T es máxima y la posición 2 aquella en que la energía potencial U es máxima, podemos escribir:

$$U_1 + T_1 = U_2 + T_2$$

Como para

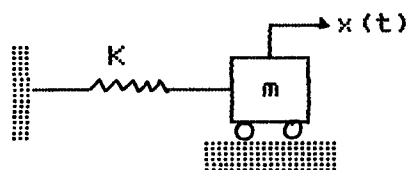
$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = T_{\max} \implies U_1 = 0 \\ U_2 = U_{\max} \implies T_2 = 0 \end{array} \right.$$

Queda, finalmente

$$U_{\max} = T_{\max} \quad [1]$$

Ecuación que nos permite calcular la frecuencia natural del sistema.

Aplicando al sistema masa-resorte



$$x = X \cdot \text{Sen } \omega_n t$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot X^2 \quad (\text{ya que } X \text{ es el valor máximo de } x)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_n^2 \cdot X^2$$

Igualando ambas:

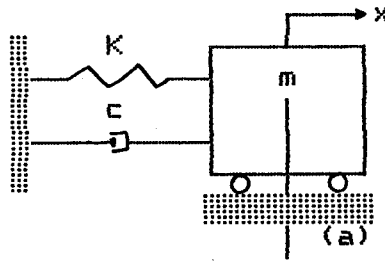
$$\frac{1}{2} \cdot K \cdot X^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_n^2 \cdot X^2$$

$$\omega_n = \sqrt{K/m}$$

El método de Rayleigh permite un cálculo rápido de la frecuencia natural de un sistema, siempre que se conozca el valor de $x(t)$

Cuando este no se conoce, se supone un valor para el desplazamiento x , compatible con los vínculos del sistema, y entonces, aplicando [1] se halla la "frecuencia natural aproximada".

3-1.-Vibraciones libres, con amortiguamiento viscoso, en sistemas de 1 GDL



Intuitivamente el fenómeno puede analizarse someramente.

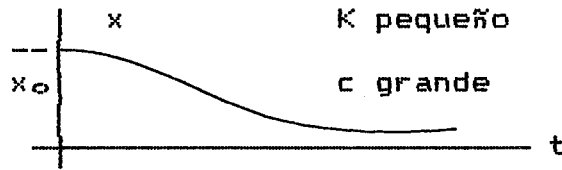
En efecto, imaginemos una pequeña masa m , como se ve en la figura, "unida" a la pared por medio del resorte de rigidez K y el amortiguador viscoso de coeficiente de amortiguamiento c . El conjunto se encuentra inicialmente en reposo en la posición (a) .

Si ahora desplazamos la masa una distancia x_0 (compatible con la deformación elástica del resorte), y la mantenemos fija en esa posición ($x = x_0$; $\dot{x}_0 = 0$), y luego la soltamos, puede, en un primer análisis, uno de los dos supuestos siguientes:

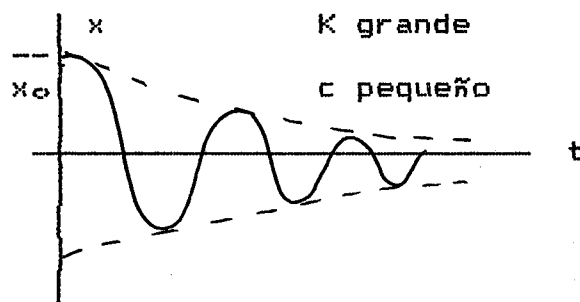
- En primer lugar, la existencia del amortiguador y la inexistencia de fuerzas de excitación exteriores sobre la masa hará que esta se mueva con movimiento amortiguado (amplitudes decrecientes).
- En segundo lugar, el tipo de movimiento dependerá de cuan "duro" sea el resorte, y cuan "resistente al movimiento" sea el amortiguador.

En efecto, si se dispone de un resorte "blando" y un amortiguador "duro" una vez desplazada la masa, cuando se le suelta tenderá a iniciar un movimiento vibratorio. El

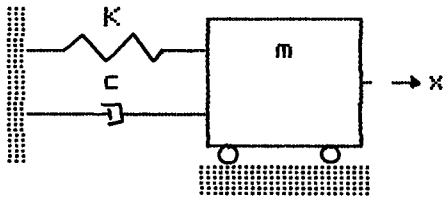
resorte "tirará" de la masa, y el movimiento de esta será fuertemente "impedido" por el amortiguador. El movimiento resultante será una vuelta más o menos rápida, a la posición de equilibrio.



Por el contrario, si el resorte es muy "duro" y el amortiguador muy "blando", "débil", es posible que la masa oscile al rededor de su posición de equilibrio, aunque con movimiento vibratorio amortiguado.



Tales comportamientos, con todo detalle, son fáciles de analizar matemáticamente



Como ya vimos, la ecuación del movimiento de un sistema vibrante de 1 GDL es:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t)$$

En este caso, al ser $F(t) = 0$, queda:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = 0 \quad [1]$$

que es una ecuación diferencial homogénea de 2º orden.

Su solución es del tipo:

$$x = Q \cdot e^{\lambda t}$$

Siendo Q una cte., y λ un parámetro a determinar.

Derivando:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Q \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} \\ \ddot{x} &= Q \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} m \cdot Q \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + c \cdot Q \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} + k \cdot Q \cdot e^{\lambda t} &= 0 \\ m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + K &= 0 \quad (\text{ecuación característica}) \end{aligned}$$

Sus raíces son:

$$\lambda = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4 \cdot \frac{K}{m}}}{2} = -\frac{c}{2 \cdot m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4 \cdot m^2} - \frac{K}{m}}$$

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2 \cdot m} + \sqrt{\frac{c^2}{4 \cdot m^2} - \frac{K}{m}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2 \cdot m} - \sqrt{\frac{c^2}{4 \cdot m^2} - \frac{K}{m}}$$

La solución general será del tipo:

$$x = Q_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + Q_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Naturalmente, las coluciones dependerán de los valores del radicando en λ_1 y λ_2 .

Pueden darse tres casos diferentes, según que:

$$\sqrt{\frac{c^2}{4 \cdot m^2} - \frac{K}{m}} \geq 0 \iff \frac{c^2}{4m^2} \geq \frac{K}{m} \iff c \geq \sqrt{4 \cdot K \cdot m}$$

Veamos cada uno de ellos por separado:

$$a.- \quad \sqrt{\frac{c^2}{4 \cdot m^2} - \frac{K}{m}} = 0 \implies c = \sqrt{4 \cdot K \cdot m}$$

En este caso, cuando el amortiguamiento del sistema es igual a la raíz de $4 \cdot K \cdot m$, las dos raíces λ_1 y λ_2 son iguales.

La solución sería:

$$x = Q_1 \cdot e^{-(c/2m)t} + Q_2 \cdot e^{-(c/2m)t} = (Q_1 + Q_2) \cdot e^{-(c/2m)t}$$

$$x = Q^2 \cdot e^{-(c/2m)t}$$

evidentemente, ésta no puede ser una solución, puesto que la misma debe contener dos constantes diferentes.

Ensayando una solución del tipo:

$$x = u \cdot e^{-(c/2m)t}$$

donde $u = u(t)$ a determinar, se obtendrá sustituyendo en [1]

$$e^{-(c/2m)t} \cdot \left[\ddot{u} - \frac{c \cdot \dot{u}}{m} + \frac{c^2 \cdot u}{4 \cdot m^2} + \frac{c \cdot \dot{u}}{m} - \frac{c^2 \cdot u}{2 \cdot m^2} + \frac{c^2 \cdot u}{4 \cdot m^2} \right] = 0$$

de donde se deduce:

$$\ddot{u} = 0 \implies u = P_1 + P_2 \cdot t$$

siendo P_1 y P_2 las dos constantes arbitrarias.

Por consiguiente, la solución será:

$$x = (P_1 + P_2 \cdot t) \cdot e^{-(c/2m)t}$$

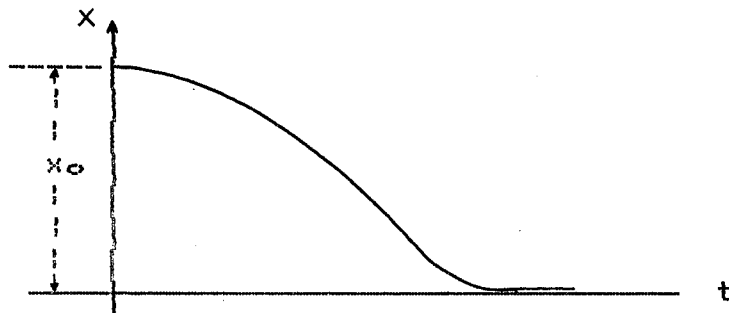
En esta expresión, el primer término $P_1 \cdot e^{-(c/2m)t}$ decrece exponencialmente con t .

El segundo término, puede transformarse:

$$P_2 \cdot t \cdot e^{-(c/2m)t} = \frac{P_2 \cdot t}{e^{+(c/2m)t}} = \frac{P_2 \cdot t}{1 + (c/2m) \cdot t + (c^2/8m^2) \cdot t^2 \dots}$$

que como se ve, también decrece con el tiempo.

Graficamente, la curva del movimiento es una exponencial que tiende, rápidamente, a la posición de equilibrio.



Tales constantes pueden determinarse en función de las condiciones iniciales:

$$t = 0 \implies \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ x = x_0 \end{cases}$$

$$\dot{x} = P_2 \cdot e^{-(c/2m)t} + (P_1 + P_2 \cdot t) \cdot (-c/2m) \cdot e^{-(c/2m)t}$$

$$x_0 = P_1 \implies P_1 = x_0$$

$$\dot{x}_0 = P_2 - (c/2m) \cdot P_1 \implies P_2 = \dot{x}_0 + (c \cdot x_0 / 2m)$$

De donde, finalmente:

$$x = [x_0 + (\dot{x}_0 + (c \cdot x_0 / 2m)) \cdot t] \cdot e^{-(c/2m)t}$$

-El valor de $c = \sqrt{4 \cdot K \cdot m}$ se denomina amortiguamiento crítico, y se representa por c_{cr}

$$c_{cr} = \sqrt{4 \cdot K \cdot m} = 2m \cdot \omega_n$$

y como se ve, sólo depende de las características del sistema.

NOTA: Para otro valor cualquiera de c , se define "relación de amortiguamiento" al parámetro adimensional.

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m \cdot \omega_n}$$

b.-

$$\sqrt{(c^2/4m^2) - (K/m)} > 0 \Rightarrow (c^2/4m^2) > (K/m) \Rightarrow c > \sqrt{4 \cdot K \cdot m}$$

$$c > c_{cr} \Rightarrow \xi > 1$$

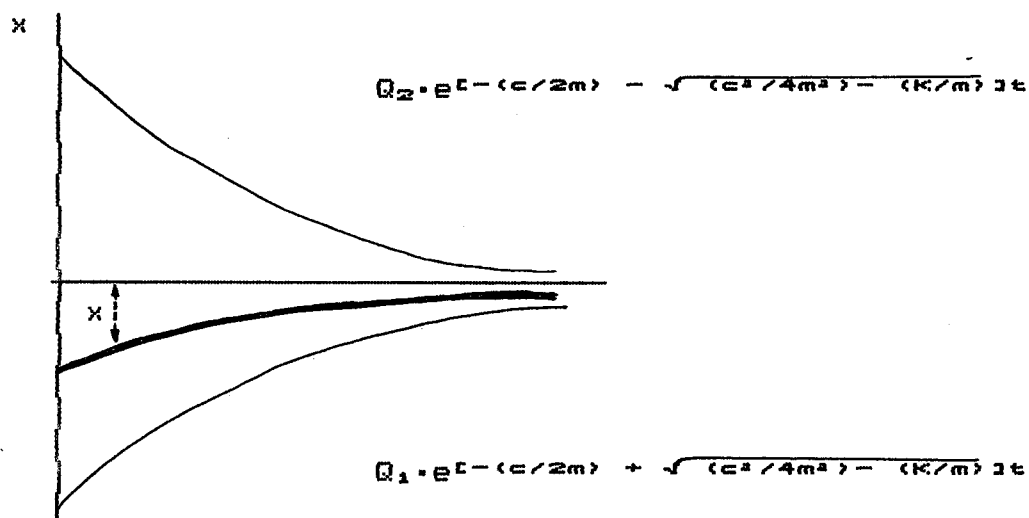
En este caso, λ_1 y λ_2 son reales y distintas y además enteras.

La solución será:

$$x = Q_1 \cdot e^{-(c/2m)t + \sqrt{(c^2/4m^2) - (K/m)}t} +$$

$$+ Q_2 \cdot e^{-(c/2m)t - \sqrt{(c^2/4m^2) - (K/m)}t} \quad [3]$$

Ambas exponenciales son negativas al ser en todo caso el radical menor que el primer sumando.



La suma de ambos términos es el marcado en línea gruesa en la figura.

Como se observa por [3], no se trata de un movimiento armónico sino de un movimiento fuertemente amortiguado, en que x disminuye con t , exponencialmente, aún cuando sin anularse nunca. Se dice que el sistema tiene un amortiguamiento supercrítico.

$$c.- \sqrt{(c^2/4m^2) - (K/m)} < 0 \Rightarrow c < \sqrt{4 \cdot K \cdot m}$$

En este caso, las dos raíces son distintas e imaginarias:

La solución general puede escribirse:

$$x = e^{-(c/2m) \cdot t} \cdot [Q_1 \cdot e^{i \cdot \sqrt{(K/m) - (c^2/4m^2)} \cdot t} + Q_2 \cdot e^{-i \cdot \sqrt{(K/m) - (c^2/4m^2)} \cdot t}]$$

Llamando $w_d = \sqrt{(K/m) - (c^2/4m^2)}$ "frecuencia natural amortiguada", y que sólo depende de las características del sistema, tenemos:

$$x = e^{-(c/2m) \cdot t} \cdot [Q_1 \cdot e^{i \cdot \omega_d \cdot t} + Q_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_d \cdot t}]$$

Pasando a la forma trigonométrica tenemos, al igual que antes:

$$x = e^{-(c/2m) \cdot t} [E \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + G \cdot \sin(\omega_d \cdot t)]$$

Las constantes E y G (o Q_1 y Q_2) pueden determinarse en función de las condiciones iniciales

$$t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{array} \right. \implies E = x_0$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(c/2m) \cdot e^{-(c/2m) \cdot t} [E \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + G \cdot \sin(\omega_d \cdot t)] + \\ &+ e^{-(c/2m) \cdot t} [-E \cdot \omega_d \cdot \sin(\omega_d \cdot t) + G \cdot \omega_d \cdot \cos(\omega_d \cdot t)] \end{aligned}$$

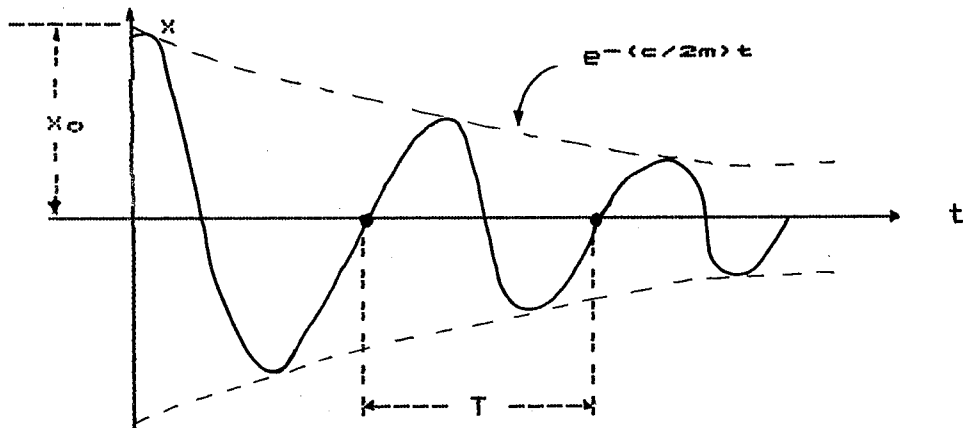
$$\dot{x}_0 = -(c/2m) \cdot E + G \cdot \omega_d \implies G = \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \frac{c \cdot x_0}{2m \cdot \omega_d} \right]$$

Con lo que tendremos finalmente:

$$x = e^{-(c/2m) \cdot t} \left[x_0 \cdot \cos \omega_d \cdot t + \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \frac{c \cdot x_0}{2m \cdot \omega_d} \right] \cdot \sin \omega_d \cdot t \right]$$

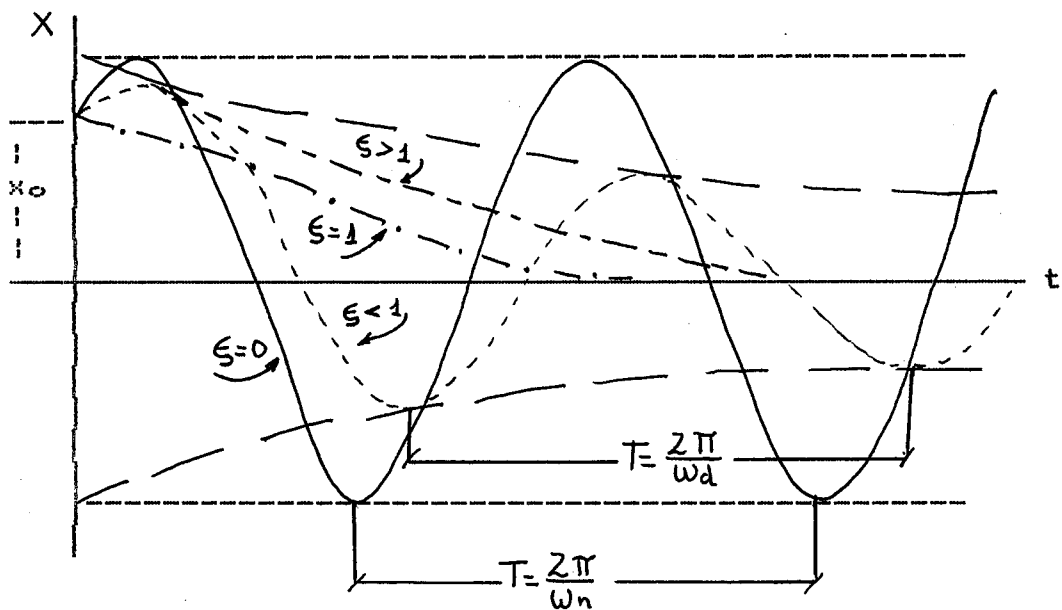
Como se ve, corresponde a un movimiento periódico amortiguado, de frecuencia circular ω_d , obtenido como suma de dos movimientos armónicos de igual frecuencia, diferente amplitud, y desfasados $\pi/2$.

Su representación gráfica es la mostrada en la figura:



El sistema se dice que está subamortiguado, o que su amortiguamiento es subcrítico.

NOTA: Comparación de respuestas según el tipo de amortiguamiento:



NOTA: La frecuencia circular natural amortiguada puede ponerse:

$$\begin{aligned} \omega_d &= \sqrt{(K/m) - (c^2/4m^2)} = \sqrt{K/m} \cdot \sqrt{1 - (c^2/4m^2 \cdot \omega_n^2)} = \\ &= \omega_n \cdot \sqrt{1 - (c/c_{cr})^2} \end{aligned}$$

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

Expresión que liga la frecuencia natural amortiguada con la frecuencia natural propia (libre) y la relación de amortiguamiento, en un sistema cualquiera de este tipo.

NOTA: Decremento logarítmico: Cálculo de ξ

En este movimiento armónico amortiguado, el decremento logarítmico vale:

<u>Tiempo</u>	<u>Amplitud</u>
$t_0 = 0$ =====>	$x = x_0$
$t_1 = t_0 + T$ =====>	$x = x_1$
$t_2 = t_1 + T = t_0 + 2T$ =====>	$x = x_2$
$t_3 = t_2 + T = t_0 + 3T$ =====>	$x = x_3$
.....	

Si A es una cte., que depende del valor x_0 para $t = 0$, se tendrá:

$$x_0 = A \cdot e^{-(c/2m)t_0}$$

$$x_1 = A \cdot e^{-(c/2m)(t_0 + T)} = x_0 \cdot e^{-(c/2m)T}$$

$$x_2 = A \cdot e^{-(c/2m)(t_0 + 2T)} = x_0 \cdot e^{-(c/2m)2T}$$

$$.....$$

$$x_n = A \cdot e^{-(c/2m)(t_0 + nT)} = x_0 \cdot e^{-(c/2m)nT}$$

El valor $(c/2m)T = \delta$ se le denomina "decremento logarítmico", y vale:

$$x_n = x_0 \cdot e^{-n\delta}$$

$$\delta = 1/n \cdot \ln(x_0/x_n) \quad (\text{cantidad adimensional})$$

Como $T = 2\pi/\omega_d$, queda:

$$\delta = (c/2m)T = (c/2m) \cdot (2\pi/\omega_d) = \frac{c}{2m} \cdot \frac{2\pi}{\omega_d \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \frac{c}{2m \cdot \omega_d}$$

$$\delta = \frac{2\pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Como puede observarse, también δ es un valor característico del sistema, que no depende de amplitudes, estados iniciales, etc.

NOTA: Como T , se puede, medir con bastante facilidad, la relación anterior nos permite calcular, experimentalmente, el amortiguamiento de un sistema.

Para amortiguamientos pequeños

$$\delta \approx 2\pi \cdot \xi$$

-Algunos valores de ξ , empleados en diferentes aplicaciones:

-Amortiguadores de automóviles	0,1 ÷ 0,5
-Goma	0,04
-Hormigón	0,02
-Madera	0,003
-Acero estirado en frío	0,0006

NOTA: Obsérvese que los sistemas libres amortiguados siempre implican un movimiento transitorio, vibratorio o no, pero limitado en el tiempo.

3-2.- Vibraciones libres, con amortiguamiento seco, en sistemas de 1 GDL

-El amortiguamiento seco o de Coulomb es el que se origina sobre la masa vibrante por estar en contacto directo con la superficie de deslizamiento.

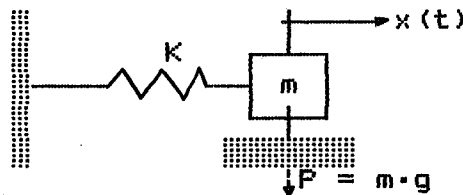
Como sabemos, la fuerza de rozamiento que se origina sobre la masa vale:

$$F_r = \mu \cdot N$$

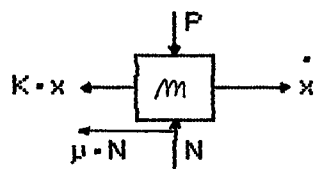
siendo μ el coeficiente de rozamiento y N la carga normal.

Dentro de ciertos límites, esta fuerza de rozamiento puede considerarse constante, por lo que a este tipo de amortiguamiento también se le llama "amortiguamiento constante".

-La ecuación diferencial del movimiento es fácil de definir, aunque como la F_r se opone siempre al movimiento (velocidad), han de expresarse dos ecuaciones diferentes, una para cada dirección.



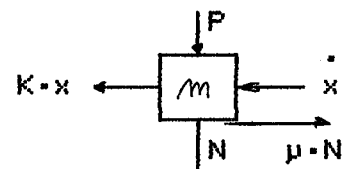
Movimiento a la derecha



$$m \cdot \ddot{x} = -Kx - \mu \cdot N$$

$$m \cdot \ddot{x} + Kx = -\mu \cdot N \quad [1]$$

Movimiento a la izquierda



$$m \cdot \ddot{x} = \mu \cdot N - Kx$$

$$m \cdot \ddot{x} + Kx = \mu \cdot N \quad [2]$$

-La solución de la ecuación [1] será:

$$x_1(t) = E_1 \cdot \text{Cos } w_n t + G_1 \cdot \text{Sen } w_n t - (\mu \cdot N/K) \quad [3]$$

(que puede comprobarse por simple sustitución de [3] en [1]).

Como sabemos $w_n = \sqrt{K/m}$ y E_1 y G_1 son constantes a determinar en función de las condiciones iniciales.

-La solución de la ecuación [2] será:

$$x_2(t) = E_2 \cdot \text{Cos } w_n t + G_2 \cdot \text{Sen } w_n t + (\mu \cdot N/K) \quad [4]$$

en donde E_2 y G_2 también son ctes. a determinar.

-Las ecuaciones [3] y [4] indican que en cada medio ciclo el movimiento es armónico (formado por la suma de dos movimientos armónicos de igual frecuencia w_n), y al cual se le suma el valor cte. $(\mu \cdot N/K)$ y $(-\mu \cdot N/K)$, respectivamente.

-Si las condiciones iniciales son:

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

es decir, si se aparta la masa una distancia x_0 de la posición de equilibrio y se le "suelta" (sin comunicarle ningún impulso, es decir, $\dot{x}_0 = 0$), podremos calcular las ctes. E y G .

Si nos referimos al dibujo, si damos a x un desplazamiento positivo x_0 , el movimiento se iniciará de derecha a izquierda, luego en este primer medio ciclo ha de usarse la ecuación [4].

Sustituyendo las condiciones iniciales queda:

$$x_2(0) = E_2 + (\mu \cdot N/K) \quad \implies \quad E_2 = x_0 - (\mu \cdot N/K)$$

$$\dot{x}_2(t) = -E_2 \cdot \omega_n \cdot \text{Sen } \omega_n t + G_2 \cdot \omega_n \cdot \text{Cos } \omega_n t$$

$$\dot{x}_2(0) = 0 = G_2 \cdot \omega_n \quad \implies \quad G_2 = 0$$

La ecuación [4] queda entonces:

$$x(t) = (x_0 - \mu \cdot N/K) \cdot \text{Cos } \omega_n t + (\mu \cdot N/K) \quad [5]$$

Como se ve es una cosenoide desplazada la distancia $(\mu \cdot N/K)$. Esta expresión [5] sólo es válida en el medio ciclo, es decir, en el intervalo:

$$0 \leq t \leq T/2$$

que también puede expresarse:

$$0 \leq t \leq \pi/\omega_n$$

Para $t = \pi/\omega_n$, la masa está en el extremo opuesto del intervalo, y el valor de la amplitud será:

$$x(t = \pi/2) = (x_0 - \mu \cdot N/K) \cdot \text{Cos } \pi + (\mu \cdot N/K) = -(x_0 - 2\mu \cdot N/K)$$

Como la masa partió de la amplitud x_0 y en medio intervalo llega a la amplitud $-(x_0 - 2\mu \cdot N/K)$, la reducción sufrida en la amplitud vale:

$$2\mu \cdot N/K$$

-En el segundo medio ciclo se parte de las siguientes condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = -(x_0 - 3\mu \cdot N/K) \\ \dot{x} = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \text{valores de } x \text{ y } \dot{x} \\ \text{para } t = \pi/\omega_n \end{array} \right.$$

sustituyendo en la ecuación [3] y en su derivada:

$$E_1 = -x_0 + (3\mu \cdot N/K)$$

$$G_2 = 0$$

Con lo cual la ecuación [3] puede escribirse:

$$x(t) = (+x_0 + 3\mu \cdot N/K) \cdot \cos w_n t - (\mu \cdot N/k) \quad [6]$$

Esta ecuación es válida solamente en el intervalo:

$$\pi/w_n \leq t \leq 2\pi/w_n$$

Al final de este ciclo la amplitud será:

$$x(t = 2\pi/w_n) = x_0 - 4\mu \cdot N/K$$

y la velocidad (derivando [6])

$$\dot{x}(t = 2\pi/w_n) = 0$$

que son las condiciones iniciales para el inicio del segundo ciclo.

-El movimiento continuará hasta el ciclo en que la amplitud de $x(t)$ sea más pequeña que $\mu \cdot N/K$

En tal situación, la acción del resorte $K \cdot x$ será menor que la fricción $\mu \cdot N$, y entonces el movimiento cesa.

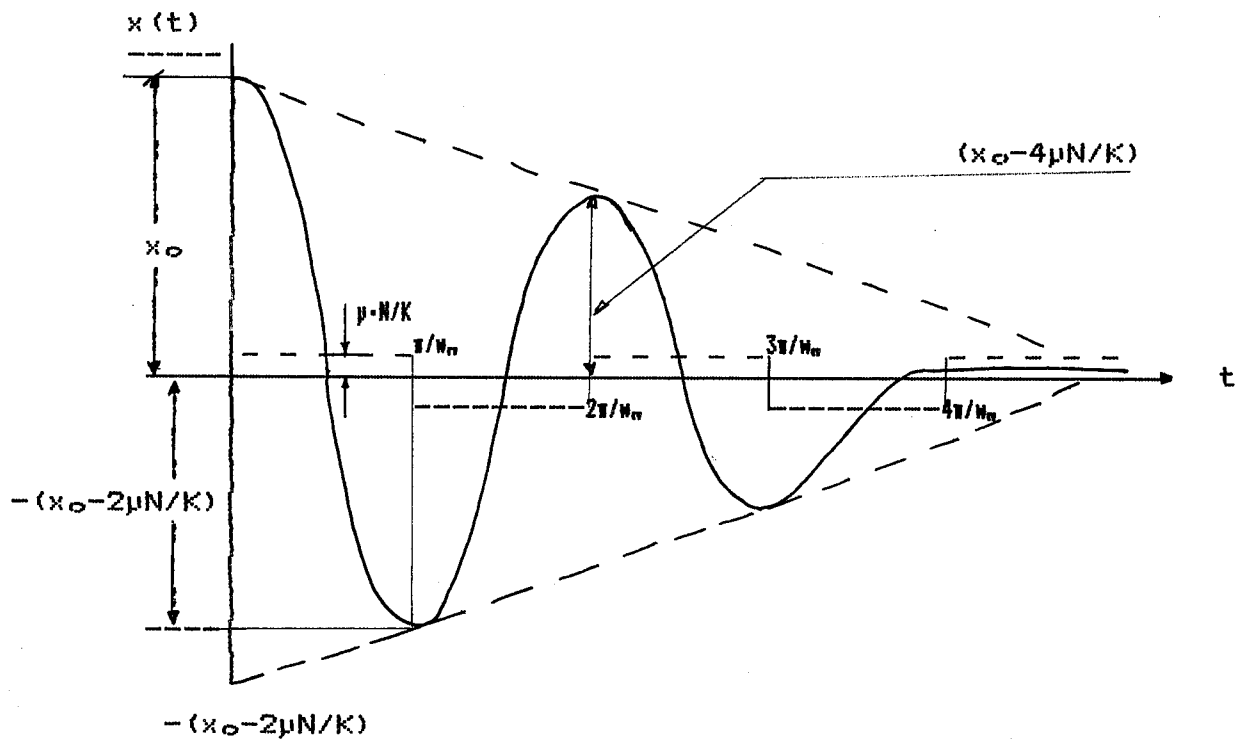
(En la figura, esto ocurre al final del 4º medio ciclo)

Como en cada ciclo la amplitud del movimiento se reduce en $4\mu \cdot N/K$, podremos poner (llamando X a la amplitud):

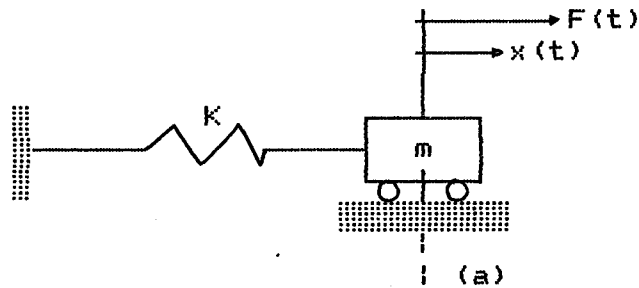
$$X_m = X_{m-1} - (4\mu \cdot N/K)$$

en consecuencia, el decremento por amortiguamiento cte. no es logarítmico, sino lineal.

Por otro lado, el movimiento amortiguado no se prolonga indefinidamente, como en el caso de amortiguamiento viscoso, sino que cesa repentinamente, tan pronto se alcanza el valor $x \leq \mu \cdot N/K$ (Obsérvese también que a diferencia del amortiguamiento viscoso, en el seco la frecuencia es la misma que si el sistema no estuviera amortiguado)



4.-Vibración forzada, sin amortiguamiento, en sistemas de 1GDL



(Suponemos que la fuerza de excitación varía en forma armónica, con frecuencia circular ω_E)

$$F(t) = F \cdot \text{Sen } \omega_E t$$

-Como en los casos anteriores, este fenómeno también puede analizarse intuitivamente, en forma somera.

Ya hemos visto que una masa m , unida por un resorte de rigidez K , oscila libremente con movimiento armónico de frecuencia circular $\omega_n = \sqrt{K/m}$

Si sobre esa masa se aplica una pequeña fuerza $F(t)$, de tipo armónico, de frecuencia circular ω_E está claro que con independencia del movimiento libre tal fuerza tenderá a comunicar a la masa otro movimiento de tipo armónico y de que en el supuesto de que el resorte no interviniera sería de la misma frecuencia que la de la fuerza.

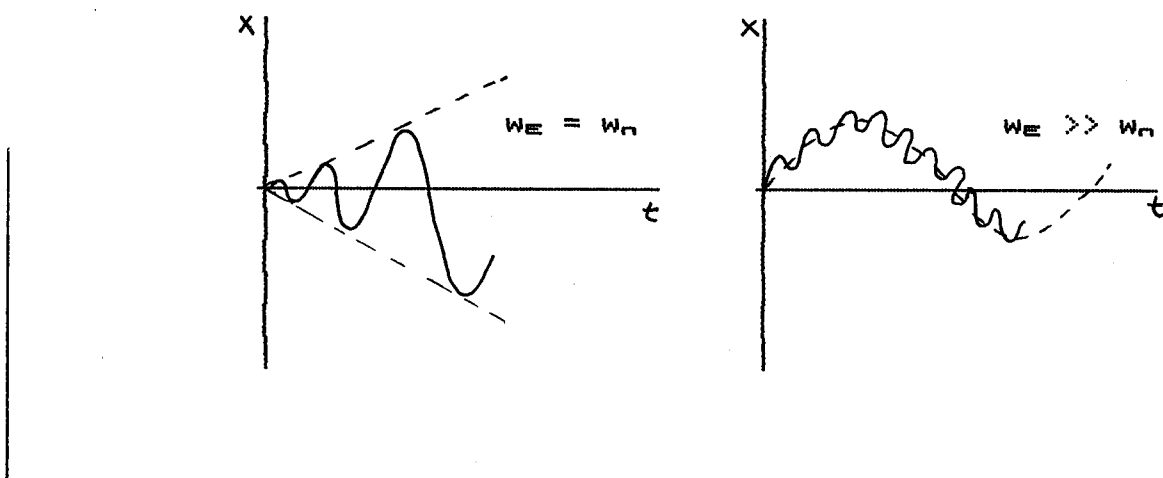
Evidentemente, como $F(t)$ puede tener cualquier valor, las frecuencias ω_n y ω_E son totalmente independientes entre sí.

El movimiento resultante para la masa debe ser la suma del movimiento libre (de frecuencia ω_n) y del movimiento producido por la excitación. Por consiguiente, no se tratará,

en general, de un movimiento armónico, aunque si periódico. Parece lógico suponer también que el movimiento resultante dependerá, de alguna manera, de la relación entre ω_e y ω_n , así como de los valores de K y m .

NOTA: Este es el caso de un columpio, que oscila con una frecuencia circular propia ω_n . Si le aplicamos una fuerza periódica, con frecuencia circular ω_e pueden ocurrir dos cosas:

- a) Que $\omega_e = \omega_n$, es decir, que (por ejemplo) al final de cada oscilación del columpio apliquemos una fuerza F_0 . En este caso, el columpio seguirá oscilando con la misma frecuencia, pero la amplitud irá aumentando. Se dice que existe resonancia. Teóricamente, la amplitud puede hacerse infinita (en un tiempo infinito)
- b) Que $\omega_e \gg \omega_n$, es decir, que el columpio reciba "muchos impulsos" durante una oscilación (de frecuencia ω_n). El resultado será un movimiento periódico, formado por pequeñas oscilaciones superpuestas al lento vaivén general.



-Como se comprende facilmente, la ecuación del movimiento para este caso será:

$$m \cdot \ddot{x}_0 + K \cdot x = F_0 \cdot \text{Sen } w_{\text{et}}$$

La solución de esta ecuación diferencial, sera la suma de la solución general de la ecuación homogénea ($m \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0$) más una solución particular de la completa.

-La solución de la ecuación homogénea es la conocida

$$x_1 = E \cdot \text{Cos } w_{\text{nt}} + G \cdot \text{Sen } w_{\text{nt}}$$

-Para la solución particular podemos ensayar una del tipo:

$$x_2 = X \cdot \text{Sen } (w_{\text{et}} - \delta)$$

siendo X y δ valores a determinar (δ es el ángulo de desfase entre $F(t)$ y $x_2(t)$)

$$\dot{x}_2 = w_{\text{e}} \cdot X \cdot \text{Cos } (w_{\text{et}} - \delta)$$

$$\ddot{x}_2 = -w_{\text{e}}^2 \cdot X \cdot \text{Sen } (w_{\text{et}} - \delta)$$

Sustituyendo en la ecuación general:

$$-m \cdot w_{\text{e}}^2 \cdot X \cdot \text{Sen } (w_{\text{et}} - \delta) + K \cdot X \cdot \text{Sen } (w_{\text{et}} - \delta) = F_0 \cdot \text{Sen } w_{\text{et}}$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} & -m \cdot w_{\text{e}}^2 \cdot X \cdot \text{Sen } w_{\text{et}} \cdot \text{Cos } \delta - m \cdot w_{\text{e}}^2 \cdot X \cdot \text{Cos } w_{\text{et}} \cdot \text{Sen } \delta + \\ & + K \cdot X \cdot \text{Sen } w_{\text{et}} \cdot \text{Cos } \delta + K \cdot X \cdot \text{Cos } w_{\text{et}} \cdot \text{Sen } \delta = F_0 \cdot \text{Sen } w_{\text{et}} \end{aligned}$$

Igualando los términos en $\text{Sen } w_{\text{et}}$ y $\text{Cos } w_{\text{et}}$:

$$-m \cdot \omega_E^2 \cdot X \cdot \cos \delta + K \cdot X \cdot \cos \delta = F_0 \quad [1]$$

$$-m \cdot \omega_E^2 \cdot X \cdot \sin \delta + K \cdot X \cdot \sin \delta = 0 \quad [2]$$

De la expresión [2]

$$\sin \delta = 0 \quad \implies \delta = 0$$

De la ecuación [1]

$$\delta = 0 \quad \implies \cos \delta = 1 \quad \implies -m \cdot \omega_E^2 \cdot X + K \cdot X = F_0$$

$$X = \frac{F_0}{K - m \cdot \omega_E^2}$$

-Con lo cual, la ecuación del movimiento será:

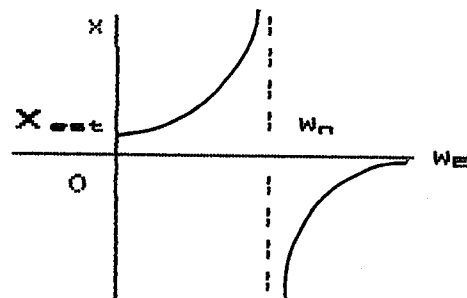
$$x = x_1 + x_2 = (E \cdot \cos \omega_n t + G \cdot \sin \omega_n t) + \frac{F_0}{K - m \cdot \omega_E^2} \cdot \sin \omega_E t$$

Como se vé, es la suma de tres movimientos armónicos: Dos de ellos, de frecuencia circular ω_n , y amplitudes E y G, representan la respuesta del sistema libre. El tercero, de frecuencia circular ω_E , y de amplitud $F_0/(K - m \cdot \omega_E^2)$ representa la respuesta del sistema a la sola fuerza de excitación (Obsérvese que la amplitud de esta respuesta forzada "pura" depende de ω_E).

NOTA: En la ecuación de este movimiento se aprecian dos importantes cuestiones:

- 1ª.- La amplitud del término correspondiente a la vibración forzada depende de los valores de la frecuencia de la fuerza de excitación ω_E , así como de m y K.

$$X = \frac{F_0}{K - m \cdot \omega_E^2} = \frac{F_0/K}{1 - (\omega_E/\omega_n)^2} = \frac{X_{est}}{1 - (\omega_E/\omega_n)^2}$$



Para $\omega_E = 0 \implies X = X_{est}$

Para $\omega_E = \infty \implies X = 0$

Lo que significa que el sistema es insensible a las variaciones de $F(t)$ demasiado rápidas.

Para $\omega_E = \omega_n \implies X = \infty$ fenómeno de resonancia.

29.- En la expresión general de la amplitud del movimiento forzado se observa una cuestión anómala.

$$X = \frac{X_{est}}{1 - (\omega_E/\omega_n)^2}$$

se hace negativa para $\omega_E/\omega_n > 1$

Evidentemente, amplitudes "negativas" es algo que no tiene sentido.

Sin embargo, podemos escribir la solución particular por:

$$x_2 = + X \cdot \text{Sen}(\omega_E t + \pi)$$

lo que quiere decir que una amplitud "negativa" equivale a otra "positiva" en una onda desplazada 180° respecto de la onda original.

Esto significa que cuando $\omega_E/\omega_n < 1$, ambas ondas (desplazamiento y fuerza) están en fase, y que cuando $\omega_E/\omega_n > 1$, ambas están en oposición.

(Es decir, cuando la masa, en su movimiento resultante se mueva hacia la derecha, la fuerza aplicada va hacia la izquierda, y viceversa)

La "inversión" ocurre justo cuando $w_E = w_n$.

-Para estudiar gráficamente la combinación de los dos movimientos, forzado y libre, vamos a estudiar un caso particular, en que:

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{array} \right.$$

Es decir, cuando no existe movimiento libre por "separación inicial" de la masa de su posición de equilibrio. En este caso, el movimiento de la masa es originado por la sola aplicación de la fuerza $F(t)$. Naturalmente, tan pronto $F(t)$ desplace la masa de su posición de equilibrio, el resorte originará sobre ella una vibración libre. La superposición de esta, y la forzada, dará lugar al movimiento total.

$$x = E \cdot \cos w_n t + G \cdot \sin w_n t + \frac{F_0}{K - m \cdot w_E^2} \cdot \sin w_E t$$

$$\dot{x} = -E \cdot w_n \cdot \sin w_n t + G \cdot w_n \cdot \cos w_n t + \frac{F_0 \cdot w_E}{K - m \cdot w_E^2} \cdot \cos w_E t$$

$$0 = E$$

$$0 = \frac{F_0 \cdot w_E}{K - m \cdot w_E^2} + G \cdot w_n \implies G = - \frac{F_0 \cdot (w_E / w_n)}{k - m \cdot w_E^2}$$

Sustituyendo:

$$x = \frac{F_0 \cdot (w_E/w_n)}{K - m \cdot w_E^2} \cdot \text{Sen } w_n t + \frac{F_0}{K - m \cdot w_E^2} \cdot \text{Sen } w_E t$$

Llamando $w_E/w_n = r$

$$x = \frac{x_0/w_n^2}{m \cdot (1 - r^2)} \cdot (\text{Sen } w_E t - r \cdot \text{Sen } w_n t)$$

$$x = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - r^2} \cdot (\text{Sen } w_E t - r \cdot \text{Sen } w_n t)$$

Como $F_0/K = X_{est}$ (flecha estática)

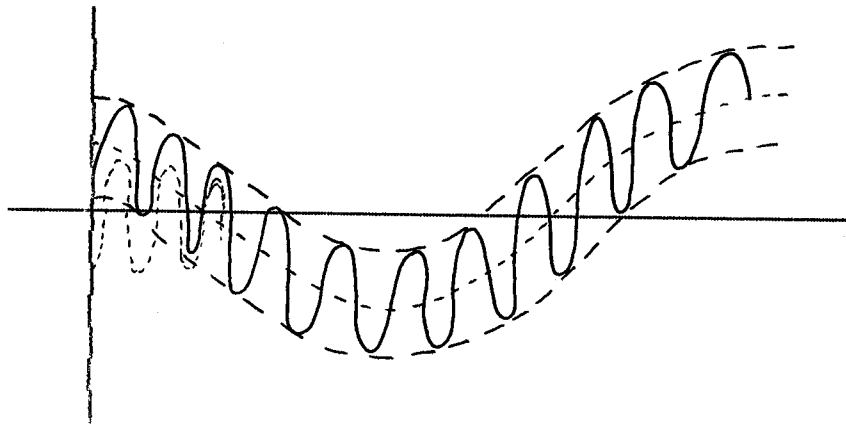
$$x = X_{est} \cdot \frac{1}{1 - r^2} \cdot (\text{Sen } w_E t - r \cdot \text{Sen } w_n t)$$

Este movimiento tiene aspectos muy diferentes, según sea la relación entre w_E y w_n , ya que en definitiva se trata de dos movimientos armónicos, de diferentes frecuencias y amplitudes.

a) Si w_E y w_n son muy diferentes (por ejemplo, $w_E \gg w_n$), los dos movimientos se reconocen claramente.

Al ser $w_E \gg w_n$, la fuerza cambia tan rápidamente que la masa no puede seguirla.

En este supuesto de vibración libre, y $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ para $t = 0$, la deflexión estática inicial F_0/K origina una vibración libre, a la cual se superpone la forzada:



b) Si w_E y w_n son muy parecidos $w_E \approx w_n$, podríamos hacer la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \text{Sen } w_E t &= (w_E/w_n) \cdot \text{Sen } w_n t = \\ &= \frac{1}{w_n} \cdot (w_n - w_E) \cdot \text{Cos} \left[\frac{w_E - w_n}{2} \cdot t \right] \cdot \text{Sen} \left[\frac{w_E + w_n}{2} \cdot t \right] + \\ &+ \frac{1}{w_n} \cdot (w_E - w_n) \cdot \text{Sen} \left[\frac{w_E - w_n}{2} \cdot t \right] \cdot \text{Cos} \left[\frac{w_E + w_n}{2} \cdot t \right] \end{aligned}$$

llamando $w_E - w_n = \Delta w$

$$\text{Sen} \left[\frac{w_E - w_n}{2} \cdot t \right] \approx (\Delta w/2) \cdot t$$

$$\text{Cos} \left[\frac{w_E - w_n}{2} \cdot t \right] \approx 1$$

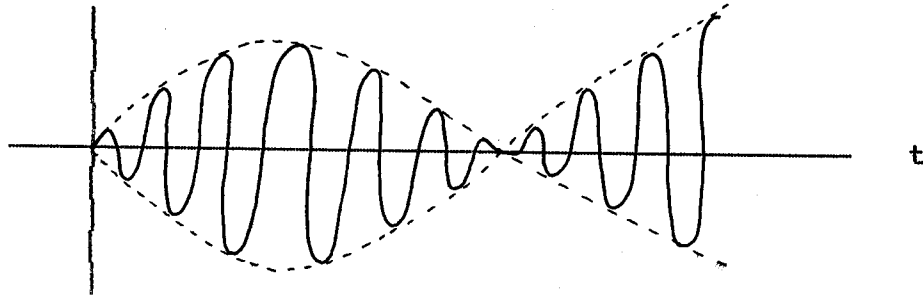
$$w_E + w_n \approx 2w_E$$

Queda la ecuación en la forma:

$$x = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - r^2} \cdot \left[-\frac{1}{w_n} \cdot (\Delta w) \cdot \text{Sen } w_E t + (\Delta w) \cdot t \cdot \text{Cos } w_E t \right]$$

que representa el fenómeno de pulsación o batimiento.

La amplitud comienza a aumentar con t , y se está próximo al fenómeno de resonancia.



c) Cuando $\omega_E = \omega_n$, la frecuencia forzada coincide con la natural. La fuerza puede empujar la masa en el momento "oportuno" y se produce el fenómeno de resonancia.

En este caso, el primer término de la ecuación anterior tiende a anularse ($\Delta\omega \rightarrow 0$), mientras que el 2º término aumenta su valor con t .

Queda por tanto:

$$x = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - r^2} \cdot (\Delta\omega) \cdot t \cdot \cos \omega_n t$$

$$x = \frac{F_0 \cdot (\omega_E - \omega_n)}{(K/\omega_n^2) \cdot (\omega_n^2 - \omega_E^2)} \cdot t \cdot \cos \omega_n t$$

$$x = \frac{F_0 \cdot t \cdot (\omega_E - \omega_n)}{m \cdot (\omega_n - \omega_E) \cdot (\omega_n + \omega_E)} \cdot \cos \omega_n t$$

$$x = \frac{F_0 \cdot t}{2m \cdot \omega_n} \cdot \cos \omega_n t$$

$$\omega = \omega_n \implies \omega + \omega_n = 2 \cdot \omega_n$$

que puede interpretarse como un movimiento armónico de frecuencia ω_n , cuya amplitud crece con t

