

VIBRACIONES MECÁNICAS

Roque Calero Pérez

VIBRACIONES EN MAQUINAS
=====

INDICE GENERAL
=====

0.- Preámbulo

1.- Bases previas

2.- Introducción al estudio de vibraciones mecánicas

3.- Sistemas vibrantes de 1 GDL

3-1.- Análisis general

3-2.- Aplicaciones prácticas

4.- Sistemas vibrantes de 2 GDL

4-1.- Análisis general

4-2.- Aplicaciones prácticas

5.- Sistemas vibrantes de n GDL

5-1.- Análisis general

5-2.- Aplicaciones prácticas

0-.PREAMBULO

=====

-El conocimiento de las vibraciones en sistemas mecánicos constituye un paso decisivo para el diseño de máquinas, de cimentaciones y estructuras soporte de las mismas y para el desarrollo de sistemas de control y mantenimiento.

-Especialmente de interés es el estudio de vibraciones para el diseño de máquinas cuando se considera que estas producen esfuerzos sobre sus miembros, variables en el tiempo, que son la causa principal del conocido fenómeno de "fatiga de los materiales", origen del fallo de los mismos en muchos casos.

La vibración, así mismo, también es causa del fallo de los elementos de máquinas por aumento rápido del desgaste de las piezas de contacto.

-En ingeniería mecánica, la vibración casi siempre se origina por elementos desequilibrados en movimiento, originados por diseños incorrectos, por defectos de manufactura, o por deterioros en servicio. En otros casos la vibración sobre una máquina puede causarse por movimientos de su propio soporte, o por otras causas ajenas a la misma (por ejemplo, un automóvil se verá sometido a vibración por efecto de un camino irregular sobre el que circula. En el caso de estructuras como puentes, etc, las acciones del viento, terremotos u otras causas son el origen de las vibraciones de los mismos).

-Las vibraciones mecánicas también pueden ser causa de funcionamientos incorrectos que aunque no conduzcan a la rotura de las piezas, pueden ser causa de graves peligros para la seguridad del sistema. (Por ejemplo, las ruedas de algunas

locomotoras pueden levantarse más de 1 cm. de los raíles cuando no están bien equilibradas y giran a elevada velocidad).

-En la medida que el hombre está integrado muchas veces en un sistema mecánico (automóvil, avión, etc.), o desempeña su trabajo en las proximidades de una fuente de vibración (por ejemplo, en las proximidades de un gran motor diesel, no bien equilibrado), la vibración puede ser causa de pérdida de confort, pérdidas de eficiencia (por ejemplo, la vibración en un panel de instrumentos puede impedir totalmente su lectura), e incluso, peligros para la salud.

-En todos los casos mencionados, la vibración se convierte en un efecto indeseable, de manera que en los casos en que esta no pueda ser eliminada o aminorada, el ingeniero ha de considerarla para lograr un diseño correcto, tanto desde el punto de vista resistente, como desde el de un correcto funcionamiento.

-Sin embargo, existen muchos casos en que la vibración tiene una connotación positiva, y el ingeniero ha de buscar su existencia, dentro de unos límites previstos. Tal es el caso de transportadores vibratorios, compactadores, procesos de acabado por vibración, etc.

-Finalmente, el análisis de vibraciones en los sistemas mecánicos ha alcanzado un gran desarrollo en el área del mantenimiento, ensayos, control y vigilancia del estado de las máquinas.

En concreto, el registro de las vibraciones en sistemas mecánicos, y su análisis posterior, permite un conocimiento bastante exacto del estado de las mismas, permitiendo la

previsión de fallos catastróficos (humanos -avión-, económicos -equipos de fabricación-, ecológicos -central nuclear-, etc.), así como la consecución de un mantenimiento predictivo de máxima rentabilidad.

1-.BASES PREVIAS AL ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES MECANICAS
=====

- 1.- Movimiento armónico: Definición
- 2.- Velocidad y aceleración en el movimiento armónico
- 3.- Composición de movimientos armónicos
 - 3-1.- Igual dirección. Pulsación
 - 3-2.- Direcciones perpendiculares
- 4.- Movimientos periódicos
- 5.- Trabajo realizado por fuerzas de variación armónica

1.-Movimiento armónico. Introducción

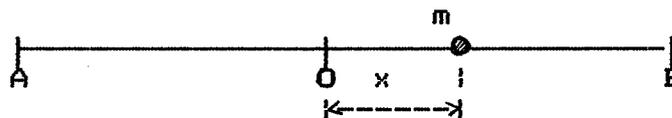
-Gran cantidad de las vibraciones que se producen en los elementos de máquinas son de tipo armónico. Incluso, en el caso de vibraciones periódicas no armónicas, mediante el análisis de Fourier puede realizarse su descomposición en suma de armónicos, y estudiarla como tales.

En consecuencia, es importante recordar algunos aspectos relativos al movimiento armónico.

-Como sabemos de mecánica general, una partícula se dice que está dotada de movimiento armónico cuando:

1º.- Su movimiento es rectilíneo

2º.- La aceleración de este movimiento es siempre proporcional a la distancia a un punto fijo de la trayectoria, y su dirección va dirigida siempre hacia ese punto.



En la figura, AB es la trayectoria del punto de masa m , y O el punto medio fijo, hacia el cual es atraída la masa.

La masa m se mueve entre los puntos A y B con un movimiento de vaivén. Si se parte de una posición de reposo en A, la aceleración irá decreciendo a medida que se acerca a O, hasta anularse en dicho punto.

La velocidad será entonces máxima en A.

A continuación, la masa sigue desplazándose hacia B, disminuyendo su velocidad y aumentando su aceleración.

En B la velocidad es cero y la aceleración máxima.

(un movimiento de este tipo es el que adquirirá la masa si estuviese unida a O por un resorte)

Con estas condiciones, la ecuación del movimiento puede representarse por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 \cdot x$$

siendo w^2 la constante de proporcionalidad (llamada así por simple conveniencia, en este momento. Más tarde se verá la razón.)

La solución de esta ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 \cdot x = 0 \quad [1]$$

es del tipo:

$$x = X \cdot \text{Cos} (w \cdot t + \varphi) \quad [2]$$

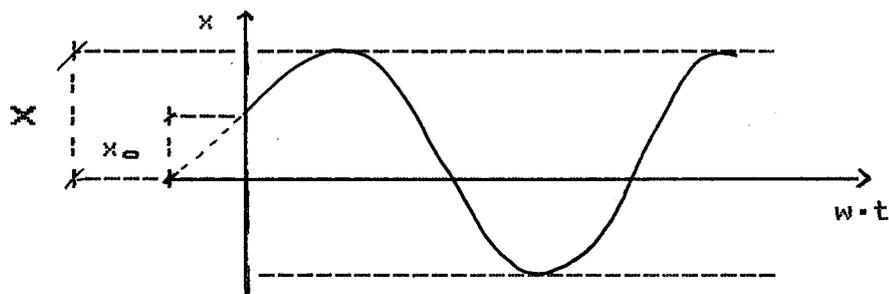
siendo X y φ constantes a determinar en función de las condiciones iniciales establecidas para [1]

La ecuación [2] es la ecuación de desplazamiento del movimiento armónico.

Como se vé, es una función senoidal (cosenoidal, en este caso), en la que X representa la amplitud del movimiento (desplazamiento máximo del punto) y φ el ángulo de fase inicial (que da la posición de x para $t = 0$)

La figura muestra la representación gráfica de la ecuación [2]

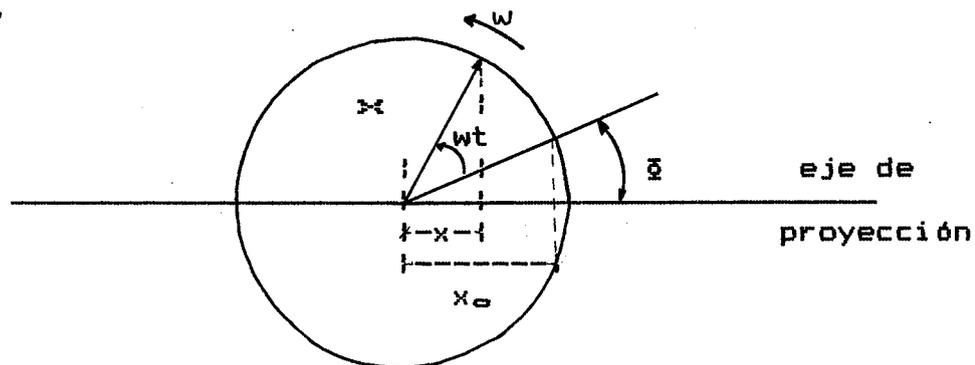
Para $t = 0 \implies x = x_0 = X \cdot \text{Cos} \varphi$



-La ecuación de un movimiento armónico se genera fácilmente mediante la proyección de un vector rotatorio de magnitud X , que gira a izquierdas con velocidad angular w (rd/s). La posición del vector rotatorio en función del tiempo viene dada por el producto $w \cdot t$

$$w \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}} \right] \cdot t(\text{s}) = w \cdot t \text{ (rd.)}$$

El origen de tiempos puede ser el propio eje de proyección u otro cualquiera. En este último caso, el ángulo de desfase será el formado entre el eje de proyección y el origen de tiempos.



(Obsérvese que para $t = 0 \implies x = x_0 = X \cdot \cos \phi$)

A la velocidad angular constante de este vector rotatorio se le denomina "frecuencia circular"

-El período (tiempo transcurrido entre dos posiciones homólogas consecutivas del punto vibrante -de x -, medido en segundos) de un movimiento armónico es fácil de calcular en función de la frecuencia circular w rd/s

$$\begin{array}{l} w \text{ rd} \implies 1 \text{ s.} \\ 1 \text{ ciclo} = 2\pi \text{ rd} \implies T \text{ s.} \end{array} \quad T = \frac{2\pi}{w} \text{ s.}$$

Se define la "frecuencia" del movimiento armónico como el número de ciclos en la unidad de tiempo. Es decir:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi} \cdot \frac{\text{ciclos}}{s} = \frac{w}{2\pi} \text{ Hertzios}$$

-La ecuación [2] también puede representarse en forma binómica:

$$\begin{aligned} x &= X \cdot \cos (w \cdot t + \varphi) \\ &= X \cdot (\cos wt \cdot \cos \varphi - \text{Sen } wt \cdot \text{Sen } \varphi) \\ &= (X \cdot \cos \varphi) \cdot \cos wt - (X \cdot \text{Sen } \varphi) \cdot \text{Sen } wt \\ x &= A \cdot \cos wt + B \cdot \text{Sen } wt \end{aligned} \quad [3]$$

siendo $A = X \cdot \cos \varphi$ y $B = -X \cdot \text{Sen } \varphi$ de donde:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ \varphi &= \text{arccotag } \frac{B}{A} \end{aligned}$$

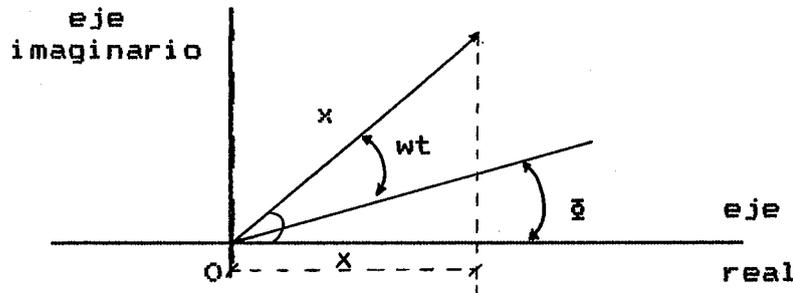
-En lugar de los parámetros X y φ , o A y B , también puede emplearse, para definir el movimiento armónico, las condiciones iniciales x_0 y \dot{x}_0 . En efecto:

$$\begin{aligned} x &= A \cdot \cos wt + B \cdot \text{Sen } wt \\ \dot{x} &= -A \cdot w \cdot \text{Sen } wt + B \cdot w \cdot \cos wt \\ \text{para } t = 0 &====> x_0 = A \\ & \dot{x}_0 = w \cdot B \\ \text{de donde } &====> A = x_0 \\ & B = \dot{x}_0 / w \end{aligned}$$

con lo que la ecuación [2] puede escribirse:

$$x = x_0 \cdot \cos wt + \frac{\dot{x}_0}{w} \cdot \text{Sen } wt \quad [4]$$

-Finalmente, el movimiento armónico también puede representarse en forma compleja



Como sabemos

$$\vec{x} = |X| \left[\cos (wt + \varphi) + i \cdot \text{Sen} (wt + \varphi) \right] = |X| \cdot e^{i(wt + \varphi)}$$

De donde puede escribirse:

$$x = \text{Re} \{ \vec{x} \} = \text{Re} \{ |X| \cdot e^{i(wt + \varphi)} \}$$

(representando $\text{Re} \{ \vec{x} \}$ la parte real del número complejo \vec{x})

El valor de x también se puede escribir:

$$x = \text{Re} \{ |X| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{iwt} \} = \text{Re} \{ \tilde{X} \cdot e^{iwt} \}$$

siendo \tilde{X} un número complejo, independiente del tiempo, al que se denomina "fasor", por representar el desfase inicial respecto del eje real de referencia

$$\tilde{X} = |X| \cdot e^{i\varphi} = |X| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \text{Sen} \varphi)$$

$$\text{Re} \{ \tilde{X} \} = |X| \cdot \cos \varphi$$

luego

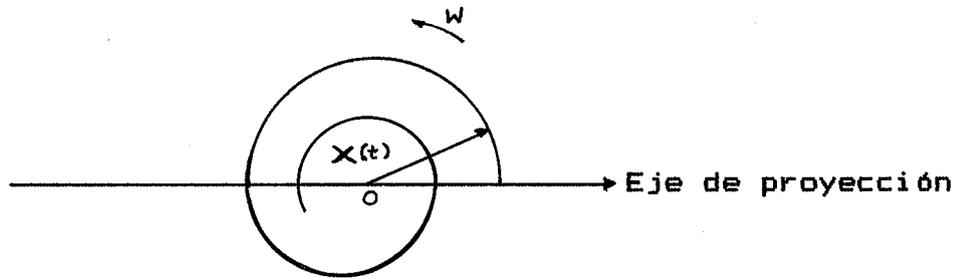
$$\frac{x(t_1)}{x(t_1 + T)} = e^{-\alpha T}$$

El decremento logarítmico es el exponente de esta expresión:

$$\alpha T = \text{Ln} \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T)} = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$$

Igual que sucede con el desplazamiento, la velocidad (\dot{x}) y la aceleración (\ddot{x}) también varían de un ciclo a otro en $e^{-\alpha T}$

Lógicamente el movimiento armónico amortiguado puede representarse por la proyección de un vector rotatorio, cuyo módulo disminuye con el tiempo.



2.-Velocidad y aceleración en el movimiento armónico

Conocida la ecuación del desplazamiento es fácil hallar la de velocidad y aceleración. En efecto

$$x = X \cdot \text{Cos} (wt + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d^2x}{dt} = -X \cdot w \cdot \text{Sen} (wt + \varphi) = \\ &= X \cdot w \cdot \text{Cos} (wt + \varphi + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad [3]$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d^2x}{dt^2} = -X \cdot w^2 \cdot \text{Sen} (wt + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ &= X \cdot w^2 \cdot \text{Cos} (wt + \varphi + \pi) \end{aligned} \quad [4]$$

Como se ve, la velocidad es también armónica, de amplitud $X \cdot w$, y desfasada $\pi/2$ respecto del desplazamiento.

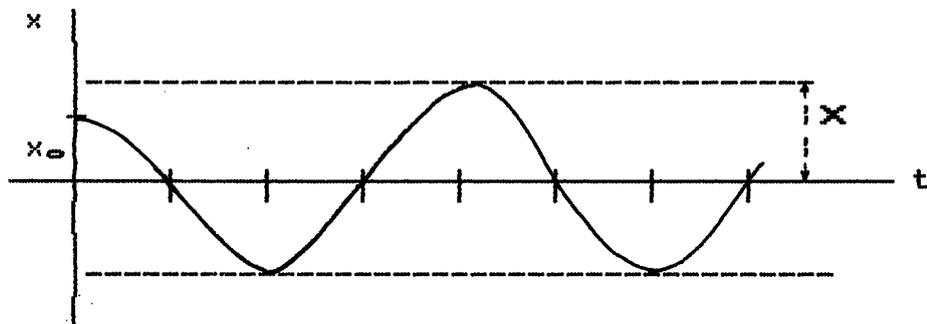
En cuanto a la aceleración, su amplitud es $w^2 \cdot X$, y se encuentra desfasada 180° respecto del desplazamiento.

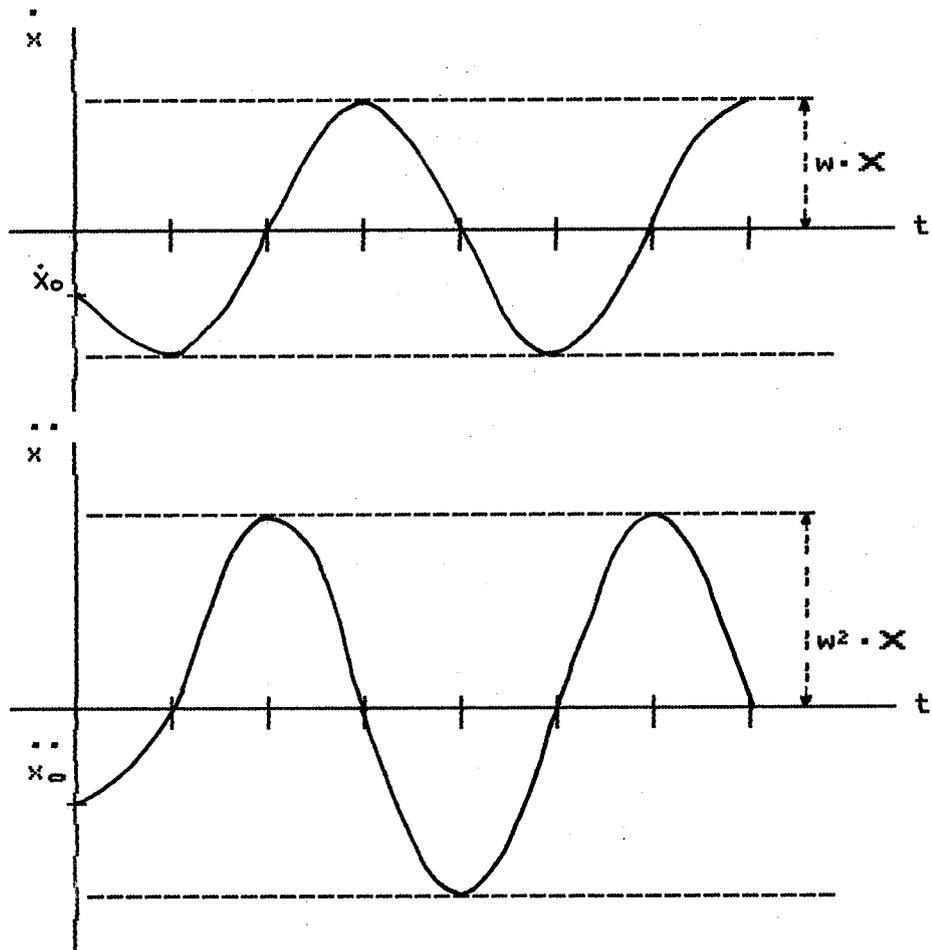
En las figuras se han representado gráficamente estas tres funciones, sabiendo que las condiciones para $t = 0$ serán:

$$x_0 = X \cdot \text{Cos} \varphi$$

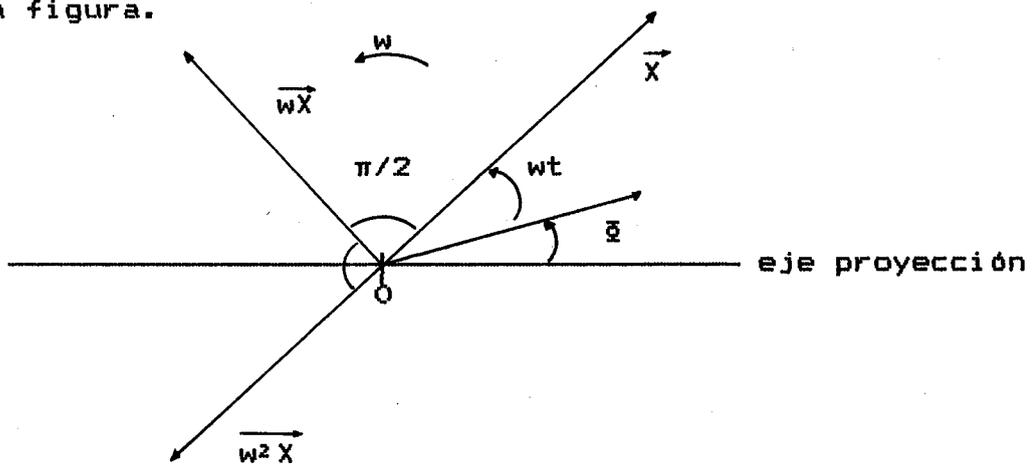
$$\dot{x}_0 = X \cdot w \cdot \text{Cos} (\varphi + \frac{\pi}{2}) = -X \cdot w \cdot \text{Sen} \varphi$$

$$\ddot{x}_0 = X \cdot w^2 \cdot \text{Cos} (\varphi + \pi) = -X \cdot w^2 \cdot \text{Cos} \varphi$$





-Según esto, los vectores velocidad y aceleración también pueden representarse como vectores rotatorios de frecuencia circular w , con los módulos y posiciones relativas que se ven en la figura.



-En forma compleja puede ponerse

$$x = \operatorname{Re} \left[|X| \cdot e^{i(\omega t + \phi)} \right]$$

$$\dot{x} = \operatorname{Re} \left[|X| \cdot i\omega \cdot e^{i(\omega t + \phi)} \right] = \operatorname{Re} \left[|X| \cdot \omega \cdot e^{i(\omega t + \phi + \pi/2)} \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[\tilde{X} \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t} \right]$$

$$\ddot{x} = \operatorname{Re} \left[|X| \cdot \omega \cdot i\omega \cdot e^{i(\omega t + \phi + \pi/2)} \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[|X| \cdot \omega^2 \cdot e^{i(\omega t + \phi + \pi)} \right] = \operatorname{Re} \left[\tilde{X} \cdot (i\omega)^2 \cdot e^{i\omega t} \right]$$

3.- Composición de movimientos armónicos

3-1.- Composición de movimientos armónicos de igual dirección.

Pulsación.-

Al sumar dos movimientos armónicos, en la misma dirección, el resultado puede ser otro movimiento armónico, o no serlo (aunque en este caso, será un movimiento periódico)

$$x_1 = A_1 \cdot \text{Cos } w_1 \cdot t + B_1 \cdot \text{Sen } w_1 \cdot t$$

$$x_2 = A_2 \cdot \text{Cos } w_2 \cdot t + B_2 \cdot \text{Sen } w_2 \cdot t$$

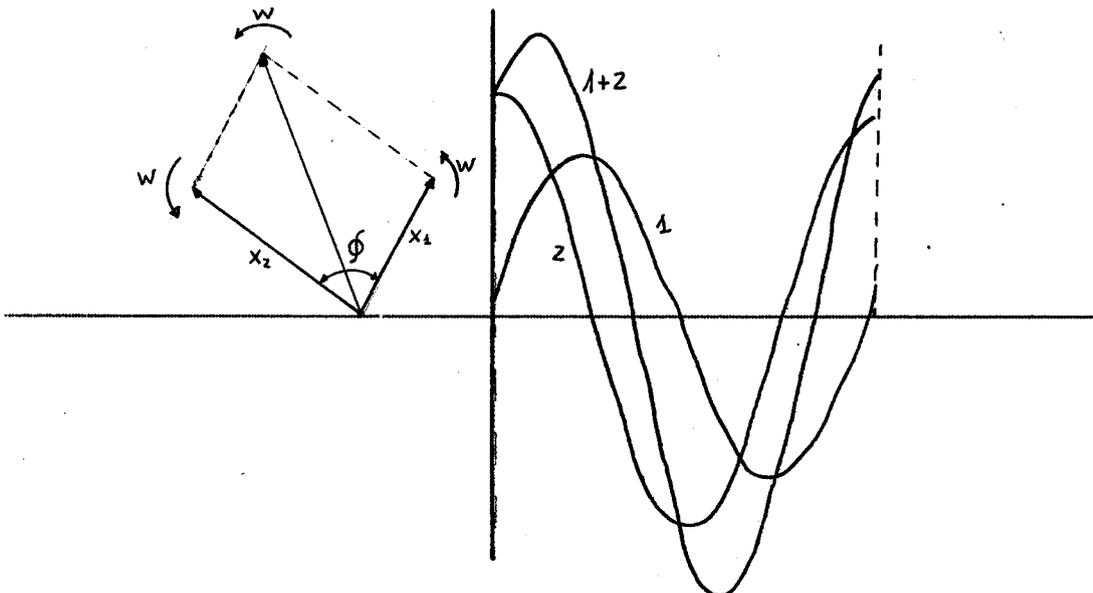
a.- Frecuencias circulares iguales:

$$w_1 = w_2 = w$$

En este caso, el movimiento resultante es también armónico, de amplitud la suma de ambas

$$x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2) \cdot \text{Cos } wt + (B_1 + B_2) \cdot \text{Sen } wt$$

La composición de los vectores rotatorios justifica y aclara, rápidamente, la formación de este movimiento resultante.

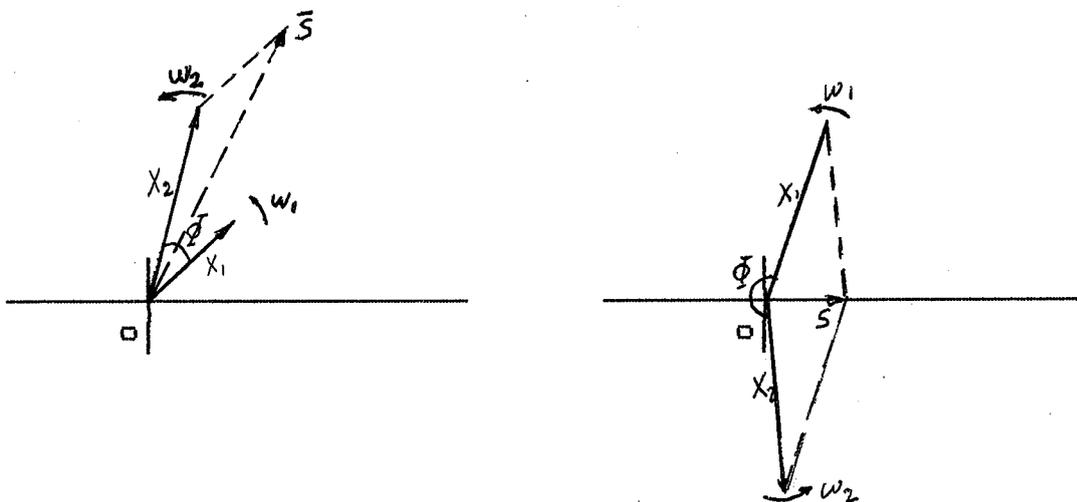


b.- Frecuencias circulares casi idénticas:

$$\omega_1 \approx \omega_2$$

En este caso aparece el fenómeno de pulsación. El movimiento resultante no es armónico. La justificación se deduce fácilmente a partir de la observación de los vectores rotatorios.

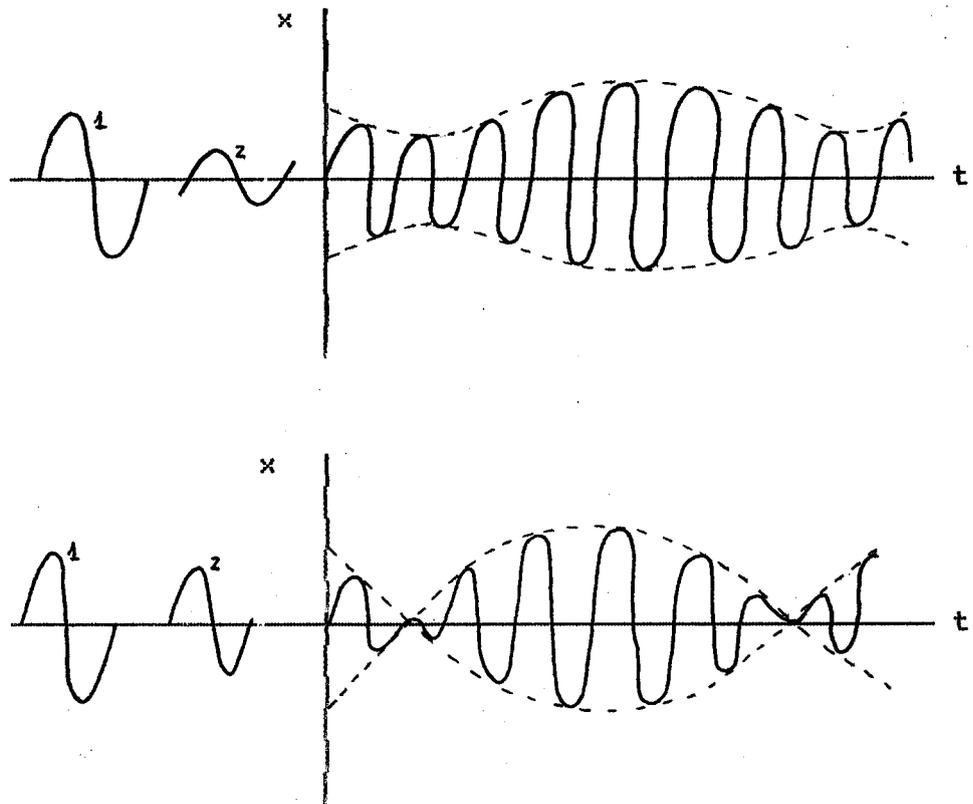
$$\vec{s} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$



Si ω_1 , es aproximadamente igual a ω_2 , los dos vectores mantendrán durante un cierto tiempo sus posiciones relativas parecidas ($\phi \approx \text{cte.}$), período durante el cual el movimiento resultante será la suma de ambos, (como si tuvieran frecuencias iguales).

Con el paso del tiempo el ángulo ϕ irá variando por lo que las "senoides suma" no tendrán la misma amplitud.

El movimiento resultante es el mostrado en las figuras, en las que se han dibujado dos casos diferentes, según que las amplitudes de los vectores x_1 y x_2 sean iguales o diferentes (sólo en el caso de que $x_1 = x_2$, el movimiento resultante tendrá amplitudes nulas)



(Obsérvese que las amplitudes resultantes máximas se darán cuando los dos vectores \bar{x}_1 y \bar{x}_2 , tienen sentidos parecidos, las mínimas, (o nulas), cuando tienen sentidos contrarios). En este caso, lo que puede definirse en el movimiento periódico resultante es la "frecuencia de la pulsación" (f_p)

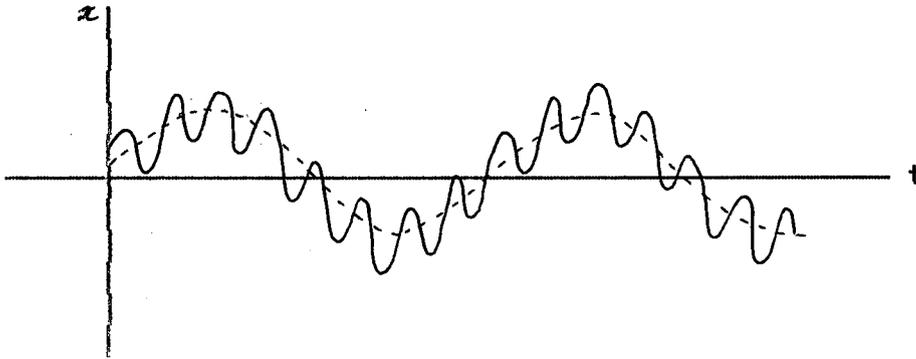
$$f_p = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

Con lo cual, el período de la pulsación será:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

c.- Frecuencias circulares muy diferentes:

Si $\omega_2 \gg \omega_1$, los dos movimientos se reconocen fácilmente, por separado, como se ve en la figura:



3-2.-Suma de movimientos armónicos en direcciones perpendiculares

Un punto puede estar sometido a dos movimientos vibratorios simultáneos, en direcciones perpendiculares

$$x = X \cdot \cos (\omega_1 t + \delta_1)$$

$$y = Y \cdot \cos (\omega_2 t + \delta_2)$$

En estos casos, la trayectoria resultante (que será una función de x e y del tipo $f(x,y) = 0$) se conoce con el nombre de curva de Lissajous.

También conviene separar dos casos según las frecuencias seán iguales o diferentes.

a.- Frecuencias circulares iguales:

$$x = X \cdot \cos (\omega t + \delta_1)$$

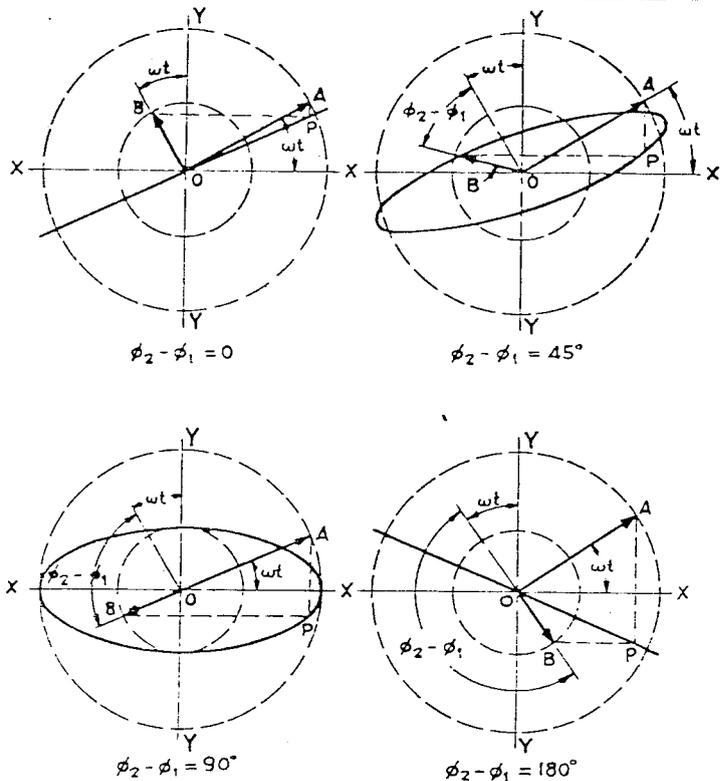
$$y = Y \cdot \cos (\omega t + \delta_2)$$

eliminando t entre ellas se obtiene la ecuación de la trayectoria:

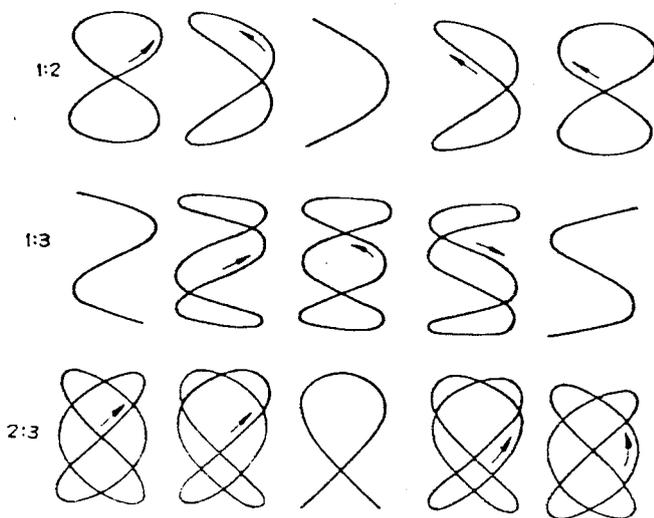
$$\left[\frac{Y}{X} \right]^2 \cdot x^2 - \frac{2 \cdot Y}{X} \cdot \cos (\delta_1 - \delta_2) \cdot xy + y^2 - Y^2 \cdot \text{Sen}^2 (\delta_1 - \delta_2) = 0$$

NOTA: En el caso particular de $X = Y$ y $\delta_1 = \delta_2$, la trayectoria es un círculo de radio $X = Y = R$.

Las figuras muestran diferentes curvas para distintos valores de $\phi_1 - \phi_2$.



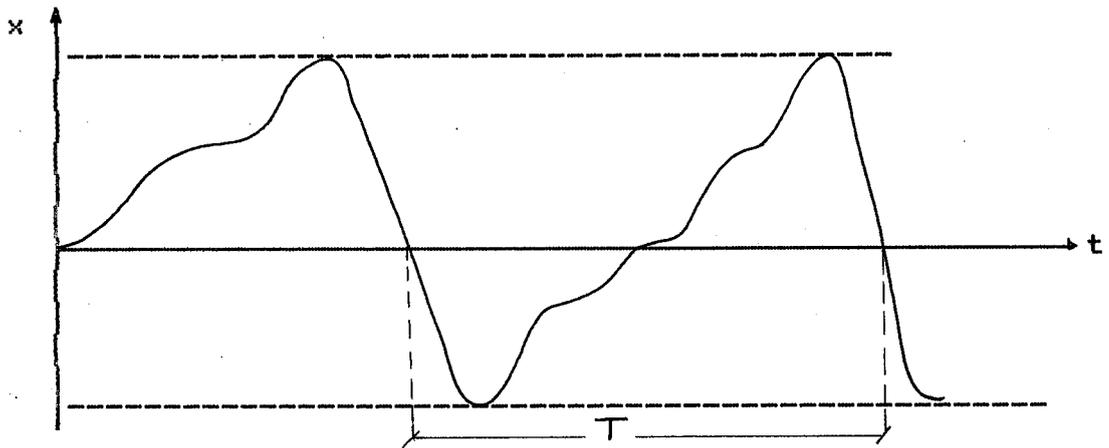
b.-Si las frecuencias no son iguales (pero su relación es un número entero) se tienen las curvas de la figura.



Igual que antes, la forma de la trayectoria depende de la relación de frecuencias y del ángulo de desfase entre los vectores (además de su amplitud), por lo que si no se conocen las frecuencias, pero si la curva resultante, se pueden hallar aquellas.

4.-MOVIMIENTOS PERIODICOS

-Es el movimiento que se repite con un periodo determinado, como se ve en la figura.



-Según demostró Fourier, el movimiento periódico puede considerarse la suma de un número infinito de movimientos armónicos, según la expresión:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \text{Cos } \omega t + a_2 \cdot \text{Cos } 2\omega t + \dots \\ + b_1 \cdot \text{Sen } \omega t + b_2 \cdot \text{Sen } 2\omega t + \dots$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \text{Cos } n\omega t + b_n \cdot \text{Sen } n\omega t) \quad [1]$$

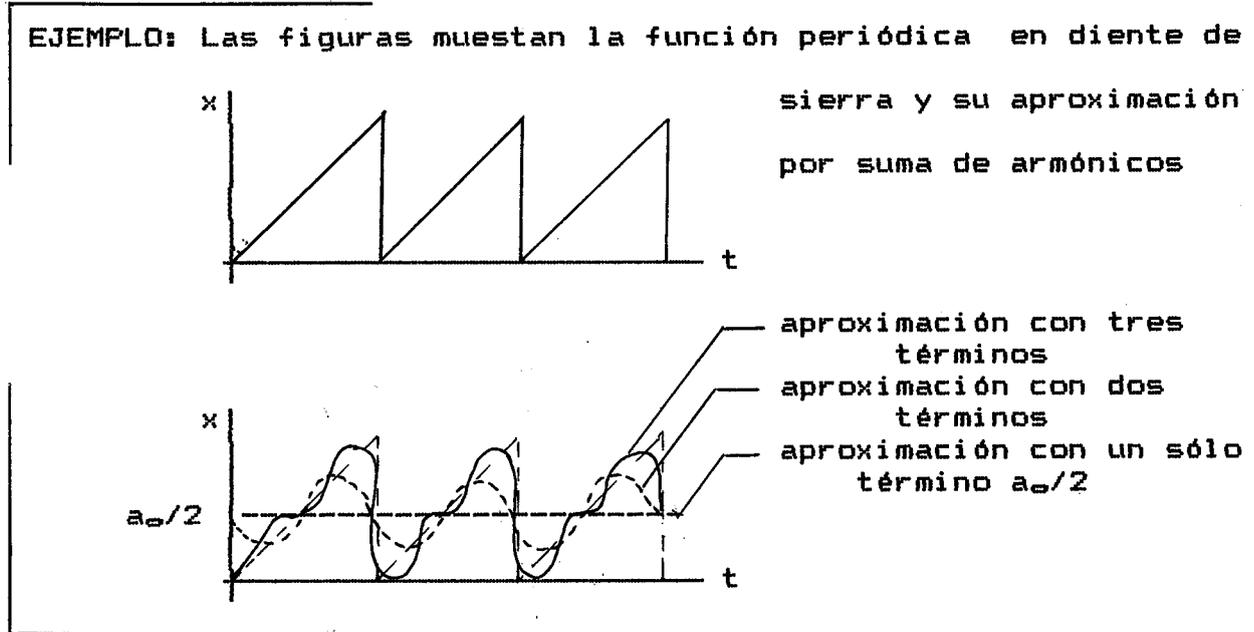
en donde $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental y $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ unos coeficientes constantes de valor:

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cdot dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot dt$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cdot \text{Cos } n\omega t \cdot dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \text{Cos } n\omega t \cdot dt$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cdot \text{Sen } n\omega t \cdot dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \text{Sen } n\omega t \cdot dt$$

Naturalmente, la aproximación de la función [1] a la función real depende de los términos que se desprecien en la serie (error de truncamiento)



-Las series de Fourier también pueden ser representadas por una suma de términos cosenos, solamente. En efecto:

$$x(t) = c_0 + c_1 \cdot \cos(\omega t - \varphi_1) + c_2 \cdot \cos(2\omega t - \varphi_2) + \dots$$

siendo:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$$

$$\varphi_n = \text{Tag}^{-1} \cdot \left[\frac{b_n}{a_n} \right]$$

-También puede representarse la serie de Fourier en forma de números complejos. Recordando que:

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} \cdot (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2} \cdot (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

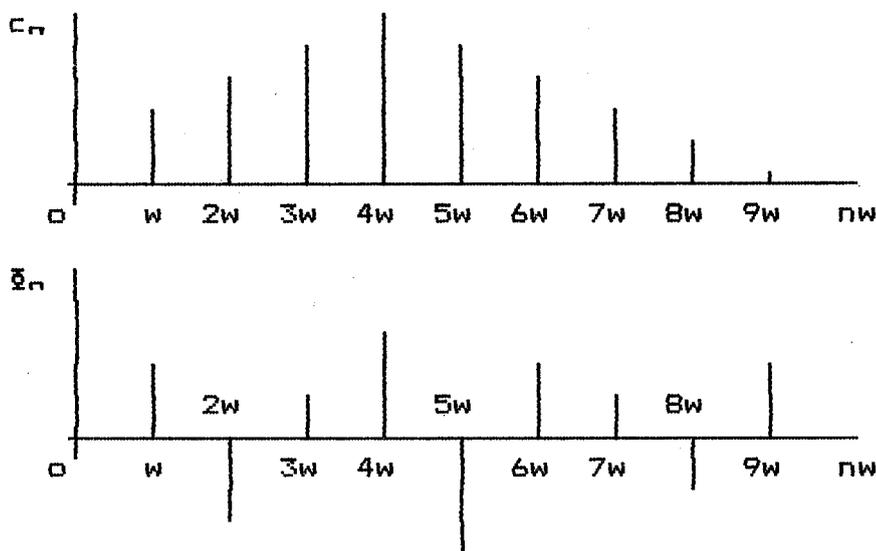
Podemos escribir:

$$a(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n [e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}] + b_n [e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}] \right]$$

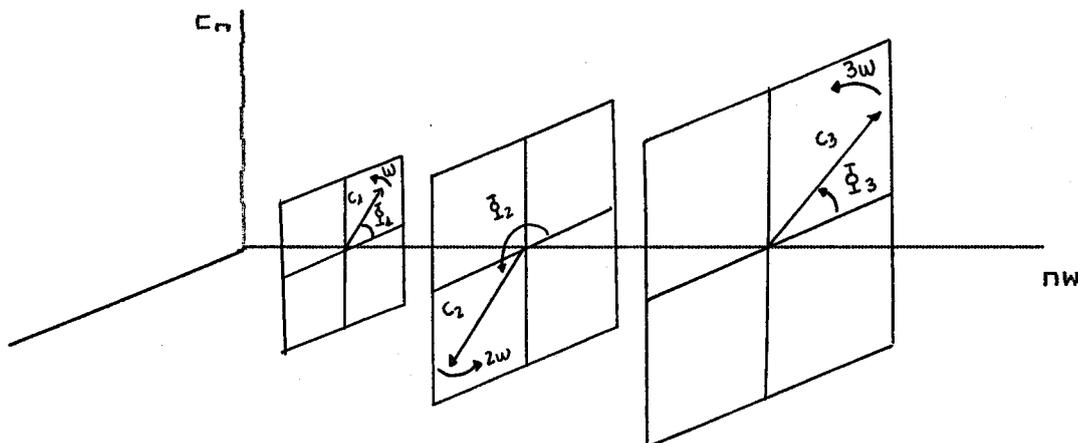
-La función armónica $a_n \cdot \cos n\omega t$ o $b_n \cdot \sin n\omega t$ se conocen como "armónico de orden n" de la función periódica $x(t)$. El periodo de este armónico será T/n

Cuando las amplitudes de los armónicos se representan en un diagrama frente a las frecuencias, se obtiene el conocido "espectro de frecuencias" o "diagrama espectral".

En la misma forma también puede trazarse el "diagrama de fases".



Un gráfico combinado de ambos puede verse en la figura

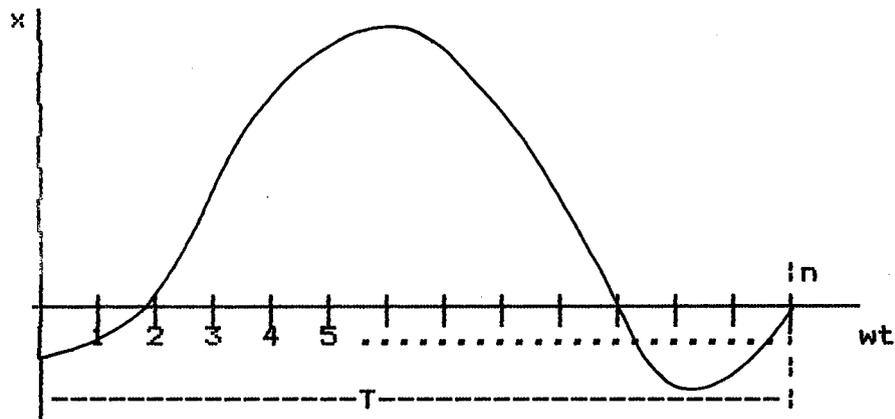


NOTA: Obviamente, cuando alguno de los coeficientes son nulos, es evidente que los armónicos correspondientes "no estarán presentes" en el diagrama espectral

NOTA: En muchas aplicaciones prácticas se desconoce la ecuación matemática de $x(t)$.

En este caso puede seguirse un método aproximado para calcular a_0 , a_n y b_n .

Para ello se divide el periodo T en un número n de partes iguales, y se numeran. Se mide $x(t)$ para cada división, y se obtienen así los valores $x_i(t)$



Los coeficientes pueden calcularse mediante las expresiones

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t)$$

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t) \cdot \cos(k \cdot i \cdot \theta)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t) \cdot \text{Sen}(k \cdot i \cdot \theta)$$

Siendo θ el ángulo correspondiente a cada división

5.-Trabajo realizado por una fuerza de variación armónica (o par), sobre un punto que se mueve armónicamente

a.- Caso en que la fuerza y el movimiento tienen la misma frecuencia circular

$$F = F_0 \cdot \text{Sen} (wt + \varphi)$$

$$x = X \cdot \text{Sen} (wt)$$

φ es el desfase entre la fuerza aplicada y el movimiento del punto.

Para $\varphi = 0$, la fuerza crece y decrece al mismo ritmo y dirección que lo hace el movimiento del punto.

Para $\varphi = \pi$, el punto se mueve en un sentido, mientras la fuerza lo "empuja" en sentido contrario.

El trabajo elemental de la fuerza aplicada será:

$$F \cdot dx = F \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

Durante un periodo:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T F \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \frac{1}{w} \int_0^{2\pi} F \cdot \frac{dx}{dt} (dwt) = \\ &= F_0 \cdot X \int_0^{2\pi} \text{Sen} (wt + \varphi) \cdot \text{Cos} wt \cdot d(wt) = \\ &= F_0 \cdot X \int_0^{2\pi} \text{Cos} wt \cdot (\text{Sen} wt \cdot \text{Cos} \varphi + \text{Cos} wt \cdot \text{Sen} \varphi) \cdot d(wt) = \end{aligned}$$

$$= F_0 \cdot X \cdot \cos \varphi \int_0^{2\pi} (\sin \omega t \cdot \cos \omega t \cdot d(\omega t)) + F_0 \cdot X \cdot \sin \varphi \int_0^{\pi} (\cos^2 \omega t \cdot d(\omega t))$$

$$W = \pi \cdot F_0 \cdot X \cdot \sin \varphi$$

(la primera integral es cero y la segunda, π)

Como se observa, para un desfase nulo entre la fuerza y el desplazamiento, ($\varphi = 0$), $W = 0$. Cuando $\varphi = \pi/2$, W es máximo, o lo que es igual, el trabajo es máximo cuando la fuerza aplicada esta en fase con la velocidad del punto.

b.- En el caso de que la fuerza y el movimiento no tengan la misma frecuencia (lo que sucederá cuando se aplican fuerzas armónicas en puntos con movimiento periódico), vamos a ver que no producen trabajo, salvo en casos particulares.

Por ejemplo, en un movimiento periódico no armónico, sobre el que actúa una fuerza armónica, esta efectuará trabajo solamente sobre la componente armónica del movimiento de igual frecuencia, pero no sobre las demas.

En efecto:

$$F = F_0 \cdot \sin n\omega t$$

$$x = X \cdot \sin (m \cdot \omega t + \varphi)$$

$$W = \int_0^T F \cdot dx = \int_0^T F \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int_0^T F_0 \cdot \sin n\omega t \cdot X \cdot m\omega \cdot \cos (n\omega t + \varphi) \cdot dt =$$

$$= \int_0^T F_0 \cdot \sin n\omega t \cdot X \cdot m \cdot \omega \cdot (\cos m\omega t \cdot \cos \varphi - \sin m\omega t \cdot \sin \varphi) \cdot dt =$$

$$\begin{aligned}
&= X \cdot m \cdot w \cdot \cos \vartheta \cdot F_0 \cdot \int_0^T \sin nwt \cdot \cos m \cdot wt \cdot dt + \\
&+ X \cdot m \cdot w \cdot \sin \vartheta \cdot F_0 \cdot \int_0^T \sin nwt \cdot \sin m \cdot wt \cdot dt = \\
&= X \cdot F_0 \cdot m \cdot w \cdot \cos \vartheta \cdot \int_0^T \left[\frac{1}{2} \sin (n+m) \cdot wt + \frac{1}{2} \sin (n-m) \cdot wt \right] \cdot dt + \\
&+ X \cdot F_0 \cdot m \cdot w \cdot \sin \vartheta \cdot \int_0^T \left[\frac{1}{2} \cos (n-m) \cdot wt + \frac{1}{2} \cos (n+m) \cdot wt \right] \cdot dt
\end{aligned}$$

$$W = 0 \text{ para } n \neq m$$

$$W = F_0 \cdot X \cdot m \cdot w \cdot \sin \vartheta \quad \text{para } n = m$$

Ya que para $T = 2\pi/w$, las dos integrales se anulan para valores de m y n enteros y distintos.

Para $n = m$, la primera integral es nula, y la segunda vale π/w .

2.-INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES MECANICAS
=====

- 1.- Concepto y origen de las vibraciones mecánicas.
- 2.- Clasificación de los movimientos vibratorios mecánicos.
- 3.- Parámetros fundamentales que definen los movimientos vibratorios.
- 4.- Sistema vibrante. Clasificación.
- 5.- Grados de libertad de los sistemas vibrantes.
- 6.- Rigidez de los sistemas vibrantes.
- 7.- Amortiguamiento de los sistemas vibrantes.
- 8.- Planteamiento general del problema de vibraciones mecánicas.

1.-Concepto y origen de las vibraciones mecánicas.

-Se entiende por movimiento vibratorio la variación de la configuración de un sistema mecánico elástico, con el tiempo, alrededor de una posición de equilibrio estable.

(Normalmente se supone que tales desplazamientos son relativamente pequeños, y compatibles con las deformaciones de tipo elástico -dentro del límite elástico-).

-El fenómeno vibratorio mecánico tiene su origen en las dos siguientes circunstancias:

a.-La existencia de sistemas másicos (cuerpos, elementos de máquinas) elásticos, capaces de almacenar energía e intercambiarla (de deformación e inercial), entre las diferentes partes componentes, y de disiparla por la inevitable presencia de elementos disipadores de naturaleza muy diversa (disipación en forma de calor, de ruido, etc.).

b.-La existencia de acciones perturbadoras de las posibles posiciones de equilibrio estático, puntuales unas veces (choques e impactos, etc.) o persistentes en el tiempo.

-Como ejemplo de vibraciones pueden considerarse las que se producen en motores en movimiento (producidas por las fuerzas y movimientos de trepidación), sacudidas en martillos pilones, automóvil sobre calzada defectuosa, terremotos, etc.

2.-Clasificación de los movimientos vibratorios mecánicos.

a.-En función de la forma del movimiento:

Pueden dividirse en "periódicos" (en los que la configuración del sistema se repite en intervalos de tiempo iguales) y "aperiódicos". Estos últimos pueden dividirse en "deterministas" y "aleatorios". En los primeros puede conocerse una evolución en el tiempo (de forma que en cada instante puede conocerse la posición, velocidad y aceleración de todos y cada una de los puntos del sistema vibrante), mientras que en los segundos ello no es posible, y sólo pueden conocerse los parámetros desde un punto de vista probabilístico.

b.-En función de la magnitud del desplazamiento:

Movimientos vibratorio "constantes", en los que la amplitud tiene siempre el mismo valor.

Movimiento vibratorio "amortiguado", cuando en cada ciclo las amplitudes van decreciendo.

Movimiento vibratorio "amplificado", en el caso contrario.

c.-En función del tipo de excitación:

Movimientos vibratorios "libres", cuando no existen fuerzas exteriores aplicadas durante la vibración.

Movimientos vibratorios "forzados", cuando existe una fuerza exterior aplicada durante la vibración (que puede ser constante o variable).

(Naturalmente, tanto las vibraciones libres como las forzadas, pueden estar amortiguadas).

d.-En función de su comportamiento durante la vibración:

Vibraciones "lineales", cuando la ecuación del desplazamiento es lineal, y por tanto admite el principio de superposición.

Vibraciones "no lineales", en caso contrario.

e.-En función de su duración temporal:

Vibraciones "permanentes"

Vibraciones "transitorias"

CUADRO RESUMEN

- 1.- Vibraciones deterministas.
 - 1-1.- Sistemas lineales.
 - 1-1-1.- Sistemas discretos.
 - 1-1-1-1.- Sistemas de 1 GDL.
 - 1-1-1-1-1.- Vibraciones libres.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-1-2.- Vibraciones forzadas permanentes: excitación armónica.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-1-3.- Vibraciones forzadas permanentes: excitación periódica.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-1-4.- Vibraciones forzadas transitorias.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-1-4.- Vibraciones forzadas por funciones cualesquiera: Integral de Duhamel.
 - 1-1-1-2.- Sistemas de 2 GDL.
 - 1-1-1-2-1.- Vibraciones libres.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-2-2.- Vibraciones forzadas.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-3.- Sistemas de n GDL.
 - 1-1-1-3-1.- Vibraciones libres.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-1-3-2.- Vibraciones forzadas.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-2.- Sistemas continuos.
 - 1-1-2-1.- Vibraciones libres.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-1-2-2.- Vibraciones forzadas.
 - Sin amortiguamiento.
 - Con amortiguamiento.
 - 1-2.- Sistemas no lineales.
- 2.- Vibraciones aleatorias.

3.-Parámetros fundamentales que definen los movimientos vibratorios.

-Ciclo: Evolución del sistema entre un instante y el siguiente en que vuelven a repetirse las mismas características del sistema (x, \dot{x}, \ddot{x})

-Periodo: Tiempo en que transcurre un ciclo. Se designa por T .

-Frecuencia: Número de ciclos en la unidad de tiempo. Se designa por f ($f = 1/T$)

-Valor pico: Es el máximo valor del desplazamiento x_{max} .

En un movimiento armónico coincide con la amplitud.

-Valor medio: Se define por

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot dt$$

Para una onda senoidal, $x = A \cdot \text{Sen } \omega t$; $\bar{x} = 0$

Para media onda:

$$\bar{x} = \frac{A}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \text{Sen } \omega t \cdot dt = \frac{2A}{\pi} = 0,637 \cdot A$$

-Valor cuadrático medio: Se define por

$$\bar{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x^2(t) \cdot dt$$

Para una onda senoidal $x = A \cdot \text{Sen } \omega t$

$$\bar{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \cdot \int_0^T \text{Sen}^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2} A^2$$

-Raíz cuadrática media (r.m.s): Se define por

$$r.m.s. = \sqrt{\frac{x^2}{T}}$$

Para ondas senoidales $x = A \cdot \text{Sen } \omega t$

$$r.m.s. = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot A$$

-Decibel: Se define por

$$Db = 10 \cdot \log_{10}(x_1/x_2)^2 \quad \text{ó} \quad Db = 20 \cdot \log_{10}(x_1/x_2)$$

(En realidad, es una medida de la relación entre amplitudes)

Un amplificador de ganancia de amplitud 5 ($X_2 = 5X_1$) tiene una ganancia de 14 decibelios ($20 \cdot \log_{10}5 = 14$)

-Octava: Cuando el límite superior del rango de frecuencias es el doble del límite inferior, se dice que la frecuencia cubre una octava

<u>banda</u>	<u>rango frecuencias</u>	<u>ancho banda</u>
1	10 - 20 Hz	10
2	20 - 40 "	20
3	40 - 80 "	40
4	200 - 400 "	200

4.-Sistema vibrante. Clasificación

-Se entiende por "sistema vibrante" el modelo idealizado de cualquier cuerpo (elemento de máquina, en nuestro caso) que por las causas que sean pueda entrar en vibración.

-En general las vibraciones mecánicas (de los elementos de máquinas) pueden incluirse en una de estas tres categorías:

- a.- Vibraciones de extensión (tracción-compresión).
- b.- Vibraciones de torsión.
- c.- Vibraciones de flexión.
- d.- Cualquier combinación de las anteriores.

-Evidentemente, los sistemas vibrantes han de reproducir con la máxima exactitud el elemento real en vibración, lo que significa que han de "reflejar" las cuatro propiedades físicas que caracterizan a un sólido en vibración:

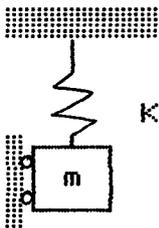
- a.- Su masa, que en forma idealizada se supone puntual e indeformable.
- b.- Su elasticidad (o mejor, su rigidez) la cual, puede ser idealizada por un resorte (sin masa), o por una barra de torsión (también sin masa) en sistemas con vibraciones de torsión o por una viga (sin masa), en sistema vibrante en flexión.
- c.- El amortiguamiento, interno o externo, de varios tipos, según sea el mecanismo de amortiguación preponderante en el cuerpo en vibración, y que se suele representar por un pequeño "cilindro amortiguador" (como se ve en las figuras)

d.- Las coordenadas o parámetros que definen el movimiento de todas y cada una de las masas del sistema, o mejor, los grados de libertad del sistema.

-Según todo lo dicho, los sistemas vibrantes pueden clasificarse en alguna de estas categorías:

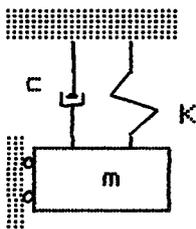
- a.- Sistemas masa-resorte.
- b.- Sistemas de torsión.
- c.- Sistemas de flexión.
- d.- Cualquier combinación de las anteriores.

-El sistema vibrante masa-resorte más sencillo es el representado en la figura.



Está formado por un "resorte ideal", sin masa, de rigidez K , y una masa ideal, indeformable (rigidez infinita) de valor m_1 .

El movimiento de la masa es vertical.



Si este sistema masa-resorte estuviera amortiguado, su representación sería la que se ve en la figura, siendo c la constante de amortiguamiento.

-El sistema vibrante de torsión más sencillo es el mostrado en la figura.

Está formado por un disco indeformable unido al apoyo por una barra sin masa de rigidez a la torsión K_t . El amortiguamiento de la vibración a torsión se representa como se ve en la

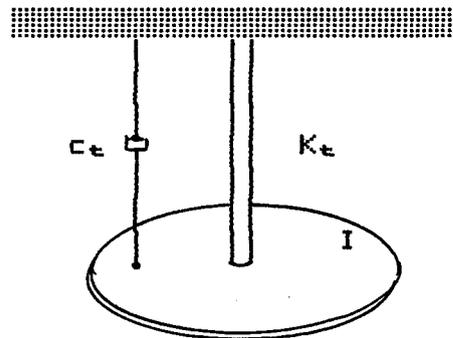
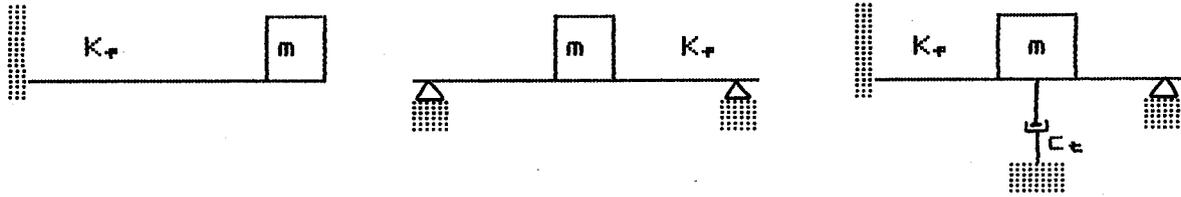


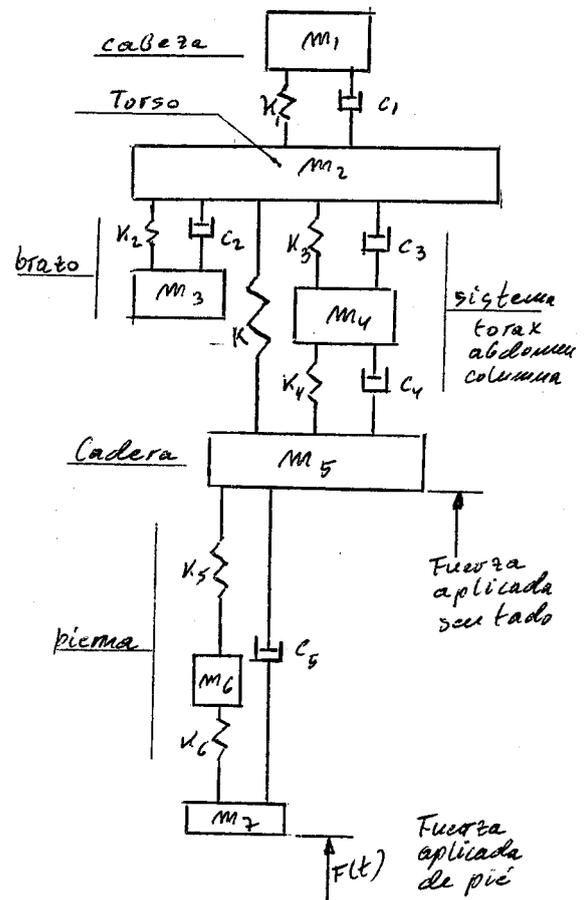
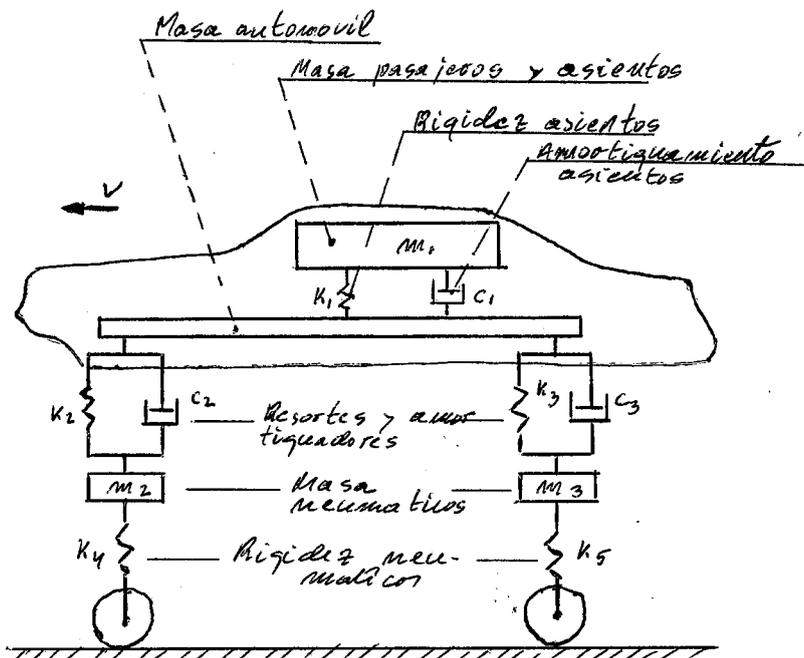
figura (en lugar de la masa m ha de considerarse el momento polar de inercia I del disco, respecto al eje de giro)

-Los sistemas vibrantes en flexión pueden adquirir variadas configuraciones, según sean las condiciones de los apoyos. Las figuras muestran algunos casos.



-Naturalmente, los sistemas vibrantes pueden alcanzar una gran complejidad, según lo sea el sistema físico (máquina) al que pretendan simular.

En las figuras se han representado los sistemas vibrantes que idealizan el comportamiento de un esqueleto humano, y el de un automóvil.



5.-Grados de libertad de los sistemas vibrantes

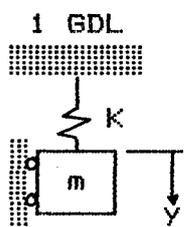
-Se define como grados de libertad de un sistema vibrante el número de parámetros independientes necesarios para definir su configuración, en cualquier instante.

-Un sistema que puede definirse por un número finito de grados de libertad se dice que es "discreto". En caso contrario se denomina "continuo".

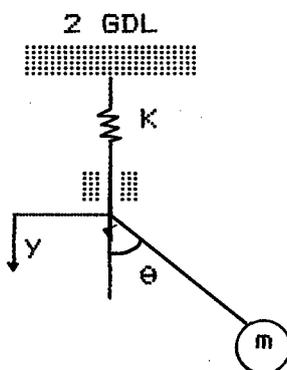
(En la práctica, todos los sistemas mecánicos vibrantes son continuos pero aplicándole diversas hipótesis simplificativas pueden convertirse, con mayor o menor exactitud, en sistemas discretos, siempre más sencillos de estudiar).

-Los sistemas discretos, atendiendo al número de grados de libertad precisos para definirlos, se clasifican en 1, 2, 3, ... n GDL.

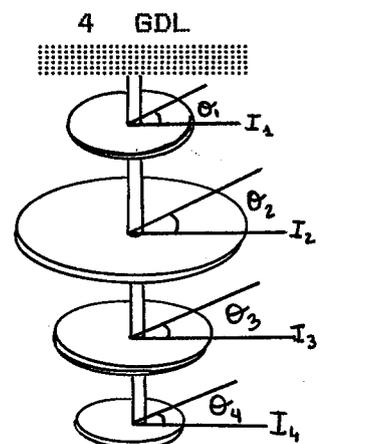
-Ejemplos:



(la coordenada y define la configuración del sistema)



(y y θ definen la configuración del sistema)



(θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 definen la configuración del sistema)

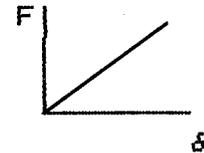
-En el ejemplo anterior del esqueleto humano, se tiene un sistema de 7 GDL.

6.-Rigidez de los sistemas vibrantes

a.-Sistemas masa-resorte:

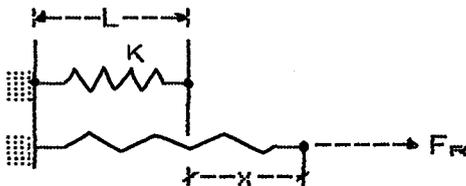
Como sabemos, al aplicarle a un resorte dado una fuerza F se produce un alargamiento δ , y mientras el material se mantenga dentro de su límite elástico, la relación entre F y δ es constante.

$$K = \frac{F_1}{\delta_1} = \frac{F_2}{\delta_2} = \dots$$



El resorte se dice que es lineal y K es una constante llamada rigidez.

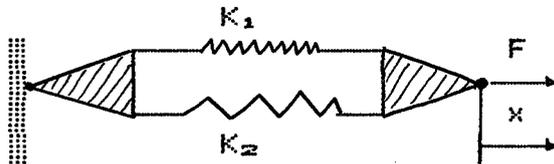
Vectorialmente puede expresarse:



$$\vec{F}_R = -K \cdot \vec{x}$$

poniendo signo (-) para señalar que la fuerza siempre tiene dirección contraria al desplazamiento.

-Si se tienen dos resortes en paralelo la rigidez equivalente será la suma de las rigideces.



El desplazamiento x será el mismo para ambos resortes, luego:

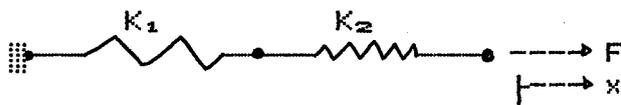
$$F_1 = K_1 \cdot x$$

$$F_2 = K_2 \cdot x$$

$$F = F_1 + F_2 = (K_1 + K_2) \cdot x$$

$$K_e = K_1 + K_2$$

-Si se tienen dos resortes en serie, la rigidez del conjunto equivalente será menor que la del menor de ellos. En efecto:



en este caso, la fuerza sobre cada resorte es la misma, F.

$$F = K_1 \cdot x_1$$

$$F = K_2 \cdot x_2$$

$$x = x_1 + x_2$$

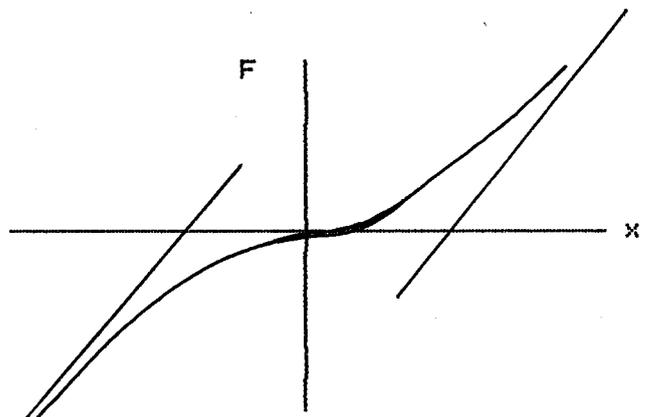
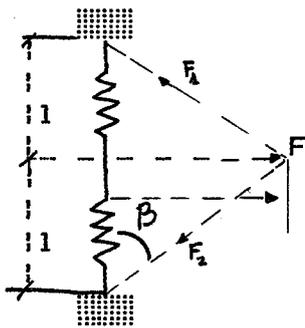
$$x = F \left[1/K_1 + 1/K_2 \right]$$

luego:

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \quad \implies \quad K_e = \frac{K_1 + K_2}{K_1 \cdot K_2}$$

NOTA: No siempre los resortes tienen características lineales, como son los casos de las figuras:

-Resortes cargados transversalmente

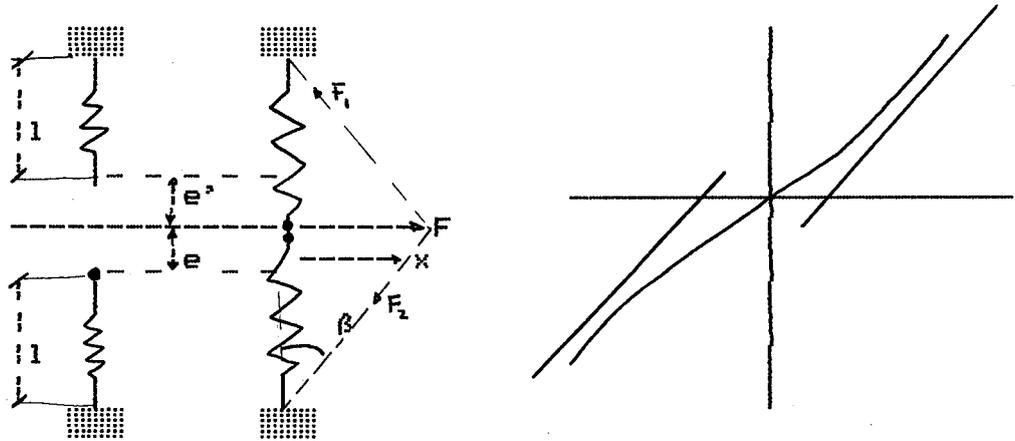


$$F_1 = F_2 = K \left[\frac{1}{\cos \beta} - 1 \right]$$

$$F_R = 2F_1 \cdot \text{Sen } \beta = 2K \cdot l \cdot (\text{Tag } \beta - \text{Sen } \beta)$$

$$F_R = 2K \cdot x \cdot \left[1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}} \right]$$

-Idem, pero los resortes pretensados



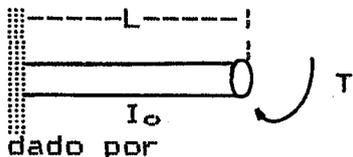
$$f_1 = f_2 = K \left[\frac{l + l^2}{\text{Cos } \beta} - l \right]$$

$$F_R = 2 \cdot F_2 \cdot \text{Sen } \beta = 2K \cdot \left[(l + l^2) \cdot \text{tag } \beta - l \cdot \text{Sen } \beta \right]$$

$$F_R = 2 \cdot K \cdot x \cdot \left[1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + (l + l^2)^2}} \right]$$

b.-Sistemas de torsión:

Como sabemos, al aplicarle a una barra de longitud \$L\$ y momento polar de inercia \$I_0\$ un par de torsión \$T\$, girará un ángulo \$\theta\$ dado por



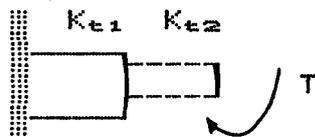
$$\theta = \frac{T \cdot L}{G \cdot I_0}$$

(Siendo G el módulo de rigidez a torsión) La relación entre el par aplicado T y el ángulo girado θ se denomina rigidez de torsión,

$$K_t = \frac{T}{\theta} = \frac{G \cdot I_o}{L}$$

que como se ve, es un valor cte. para cada material (G) y para unas dimensiones del cuerpo dadas (G, I_o, L).

-Si se tienen varios resortes de torsión en serie, como muestra la figura, con distintos valores de la rigidez,



la rigidez equivalente se obtendrá fácilmente, sabiendo que:

$$\theta_1 = \frac{T}{K_{t1}} \quad \theta_2 = \frac{T}{K_{t2}}$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{T}{K_{t1}} + \frac{T}{K_{t2}} = T \left[\frac{1}{K_{t1}} + \frac{1}{K_{t2}} \right]$$

Luego

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_{t1}} + \frac{1}{K_{t2}}$$

$$K_e = \frac{K_{t1} + K_{t2}}{K_{t1} \cdot K_{t2}}$$

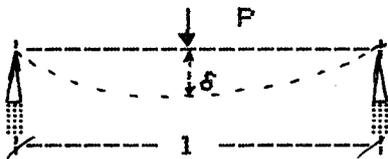
-Si se tienen varios resortes de torsión en paralelo, se obtendrá fácilmente

$$K_e = K_{t1} + K_{t2}$$

c.-Sintemas de flexión:

Como sabemos, al aplicar una carga P a una viga (sin masa) se produce una deflexión (dependiendo del tipo de apoyo), que conduce al cálculo del coeficiente de rigidez a flexión K_f .

Si l es la luz e I el momento de inercia de la sección

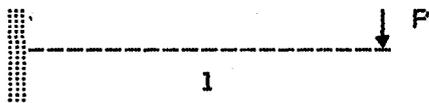


respecto del eje transversal;

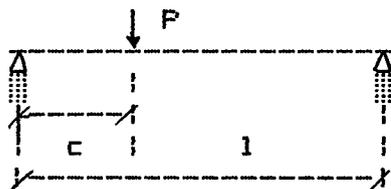
la flecha vale:

$$\delta = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot EI}$$

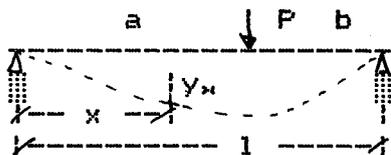
Con lo cual $K_f = \frac{P}{\delta} = \frac{48 \cdot EI}{l^3}$



$$\delta = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot EI} \implies K_f = \frac{P}{\delta} = \frac{3 \cdot EI}{l^3}$$



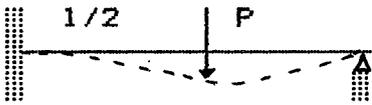
$$\delta = \frac{P \cdot c^2 (1 - c)^2}{31 \cdot EI} \implies K_f = \frac{31 \cdot EI}{c^2 (1 - c)^2}$$



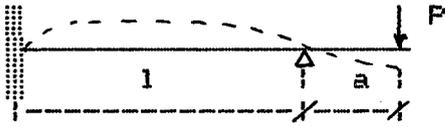
$$y_x = \frac{P \cdot b \cdot x}{6EI \cdot l} \cdot (l^2 - x^2 - b^2); \quad K_f = \frac{3EI \cdot l}{a^2 \cdot b^2}$$



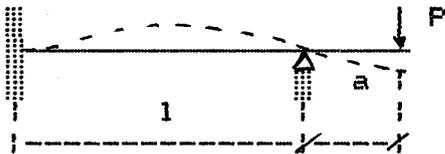
$$K_f = \frac{192 \cdot EI}{l^3}$$



$$K_r = \frac{768 \cdot EI}{7 \cdot l^3}$$



$$K_r = \frac{3 \cdot EI}{(1 + a) \cdot a^2}$$



$$K_r = \frac{24 \cdot EI}{(31 + 8a) \cdot a^2}$$

7.-Amortiguamiento de los sistemas vibrantes

-El proceso por el cual una vibración disminuye de amplitud con el tiempo se denomina amortiguamiento.

En este, la energía del sistema se disipa en forma de calor de fricción, o al medio circundante, en forma de sonido.

-Existen varios mecanismos de amortiguamiento, entre los que pueden considerarse:

-Amortiguamiento fluido $\left[\begin{array}{l} \text{-Viscoso} \\ \text{-Turbulento} \end{array} \right.$

-Amortiguamiento seco (de Coulomb)

-Amortiguamiento histerético o estructural.

-Amortiguamiento fluido viscoso: Es el que se establece al pasar un fluido por un orificio, en flujo laminar. En él, la resistencia F es proporcional a la velocidad, pudiendo ponerse

$$\bar{F} = -c \cdot \bar{v} = -c \cdot \dot{x}$$

siendo c el coeficiente de amortiguamiento.

-Amortiguamiento fluido turbulento: Es el que se produce en un fluido, un flujo turbulento. En él, la resistencia F es proporcional al cuadrado de la velocidad.

$$F = -c \cdot v^2$$

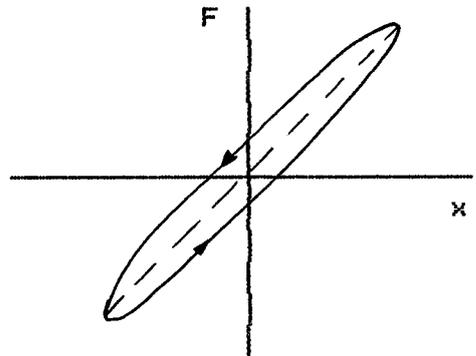
NOTA: Los amortiguamientos hidráulicos de automóviles, puertas, etc, se comportan como una mezcla de los anteriores.

NOTA: El único amortiguamiento que produce una ecuación lineal es el viscoso, por lo que es el más usado, a la hora de efectuar simplificaciones y analogías de sistemas mecánicos complejos, con amortiguamiento.

-Amortiguamiento de Culomb: Es el que se produce en el rozamiento seco entre dos sólidos. Para velocidades pequeñas, la fuerza puede suponerse constante en módulo, y de dirección opuesta siempre a la velocidad relativa.

$$F_R = \mu \cdot N$$

-Amortiguamiento histerético o estructural: Se debe al rozamiento interno entre moléculas y cristales, en el momento de la vibración. Ello hace que la relación fuerza-deformación no sea igual al encogerse el cuerpo que al estirarse, siguiendo un ciclo de histerésis.



El área encerrada por el ciclo es el trabajo perdido en calor. Tal trabajo es independiente de la velocidad con que se recorre el ciclo, es decir, de la frecuencia.

8-.Planteamiento general del problema de vibraciones mecánicas

-La resolución de un problema de vibraciones mecánicas se desarrolla, normalmente, en cuatro etapas.

Primera etapa: Definición del modelo matemático.

Tal como ya se ha visto, consiste esta etapa en definir el sistema vibrante que más se aproxime al modelo real.

Esta es una etapa en que la experiencia juega un papel decisivo, ya que esta reducción no obedece a leyes matemáticas definidas.

El modelo matemático será un conjunto, más o menos complejo, de masas, resortes y amortiguadores, con los GDL que sean precisos.

Segunda etapa: Definición de las ecuaciones diferenciales del sistema.

Partiendo del modelo matemático definido, se aplican las ecuaciones de Newton, el principio de D'Alembert, o el principio de conservación de la energía para calcular las ecuaciones diferenciales que definen el movimiento del sistema. Esta etapa es puramente objetiva.

Tercera etapa: Solución de las ecuaciones diferenciales del sistema.

El conjunto de ecuaciones anteriormente definidas se resolverán usando algunas de las técnicas matemáticas conocidas: solución general de ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace, métodos matriciales, métodos numéricos (Runge-Kutta, elementos finitos, etc.)

También es una etapa totalmente objetiva, que sólo depende de los conocimientos matemáticos precisos.

Cuarta etapa: Interpretación de los resultados.

Esta es quizás la etapa más decisiva, la que justifica la existencia de las tres anteriores.

Ha de conducir necesariamente a la interpretación del análisis efectuado, o a las consecuentes implicaciones para el diseño.

Al igual que la primera, es bastante subjetiva, y la experiencia juega un papel fundamental.

3.1.-ANÁLISIS GENERAL DE LOS SISTEMAS VIBRANTES DE 1 GDL

- 1.- Formulación general de la ecuación del movimiento.
- 2.- Vibraciones libres no amortiguadas.
 - 2-1.- Método general.
 - 2-2.- Método de la energía.
 - 2-3.- Método de Rayleigh.
- 3.- Vibraciones libres amortiguadas.
 - 3-1.- Amortiguamiento viscoso. Relación de amortiguamiento
 - 3-2.- Amortiguamiento seco (Coulomb)
 - 3-3.- Amortiguamiento histerético (estructural)
- 4.- Vibraciones forzadas, no amortiguadas.
 - 4-1.- Fuerza de excitación armónica. Resonancia.
- 5.- Vibraciones forzadas amortiguadas.
 - 5-1.- Fuerza de excitación armónica.
 - 5-1-1.- Método general. Cálculo del amortiguamiento.
 - 5-1-2.- Método de la impedancia mecánica.
 - 5-2.- Fuerza de excitación periódica.
 - 5-3.- Fuerzas de excitación " elementales ".
 - 5-3-1.- Introducción.
 - 5-3-2.- Función escalón.
 - 5-3-3.- Función rampa.
 - 5-3-4.- Función exponencial decreciente.
 - 5-3-5.- Función diferencia escalón-exponencial.
 - 5-3-6.- Función impulso.
 - 5-4.- Fuerzas de excitación cualesquiera. Integral de Duhamel.
- 6.- Cálculo de la respuesta por métodos numéricos.
 - 6-1.- Método de la diferencia central.
 - 6-2.- Método de Runge-Kutta.

1.-Formulación general de la ecuación del movimiento vibratorio en sistemas mecánicos de un grado de libertad

-La forma más sencilla de plantear la ecuación del movimiento de una masa vibrante m es aplicar la segunda ley de Newton.

$$P(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

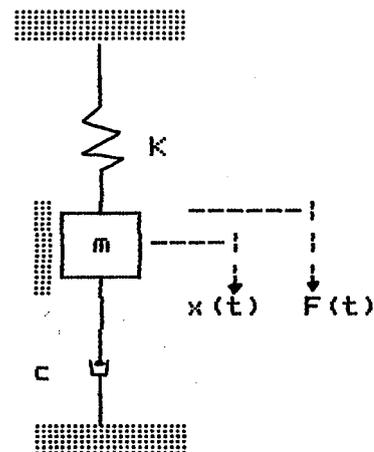
donde en $P(t)$ se incluyen las fuerzas exteriores aplicadas sobre la masa m , las fuerzas elásticas (fuerzas de deformación alrededor de la posición de equilibrio) y las fuerzas amortiguadoras.

-Este planteamiento es válido en sistemas vibrantes sencillos, como el masa-resorte-amortiguador, o cualquier otro que pueda asemejarsele.

En sistemas más complejos, donde tales simplificaciones no son posibles se recurre a otros métodos, basados en el equilibrio entre trabajo aportado y energía del sistema (métodos energéticos).

-A continuación vamos a obtener la ecuación general de equilibrio de un sistema ideal de 1 GDL, masa-resorte-amortiguador, sobre el cual se aplica una fuerza exterior $F(t)$, variable en el tiempo.

La figura esquematiza tal sistema. En él, toda la masa se encuentra concentrada en un punto m .



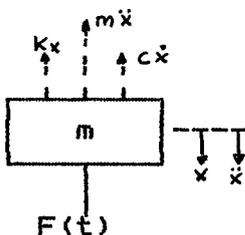
La elasticidad del conjunto se representa por la del resorte, K .

El amortiguamiento interno se supone del tipo viscoso, y se representa por un cilindro y pistón, lleno de aceite, y cuyo coeficiente de amortiguamiento es c .

Al aplicar la fuerza $F(t)$, se produce un desplazamiento de la masa $x(t)$. Con ello, el resorte se alarga, "tirando" de la masa con una fuerza $K \cdot x$, contraria a $F(t)$ (y a x).

Al mismo tiempo, el amortiguador "se encoge", generando una fuerza proporcional a la velocidad, de valor $c \cdot \dot{x}$, y contraria también a $F(t)$ (si $\dot{x}(t)$ tiene la misma dirección que $F(t)$).

El planteamiento de la ecuación de equilibrio nos lleva inmediatamente a la ecuación diferencial del movimiento:



$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t)$$

siendo:

$$m \cdot \ddot{x} = \text{Fuerza de inercia.}$$

$$c \cdot \dot{x} = \text{Fuerza de rozamiento viscoso.}$$

$$K \cdot x = \text{Fuerza elástica.}$$

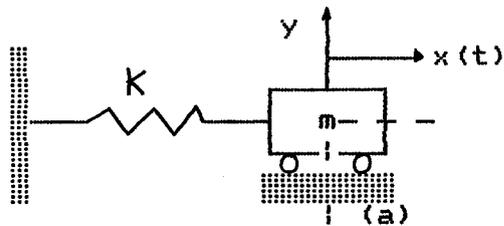
La resolución de esta ecuación nos permite hallar el desplazamiento de la masa, en función del tiempo.

$$x = x(t)$$

Tal cuestión, para diferentes supuestos, va a abordarse en los puntos posteriores.

2-1.-Vibraciones libres, sin amortiguamiento, en sistemas con 1

GDL : Método general



Al ser vibración libre:

$$F(t) = 0$$

Al no estar amortiguada:

$$c \cdot \dot{x} = 0$$

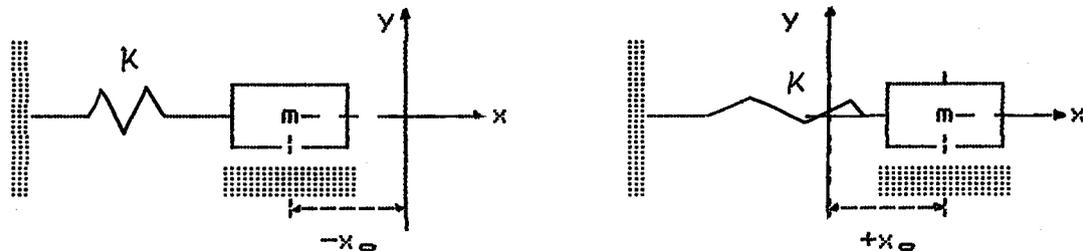
Por lo tanto, la ecuación general queda reducida, para este caso, a :

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0$$

(Ecuación diferencial lineal, homogénea, de 2º orden)

Intuitivamente, el fenómeno vibratorio se comprende fácilmente.

En efecto, imaginemos inicialmente la masa en reposo en la posición (a)



Si ahora desplazamos la masa una distancia x_0 , la mantenemos fija, en esa posición ($x = x_0$, $\dot{x} = 0$) y luego la soltamos, la masa se moverá, con movimiento de vaivén, alrededor del punto de equilibrio (posición a), indefinidamente, con movimiento armónico además. Las posiciones extremas serán $+x_0$ y $-x_0$.

Tampoco es difícil entrever que la frecuencia de este movimiento debe depender, exclusivamente, de las características del sistema vibrante, es decir, de m y de K . En efecto, si m es grande y K pequeña (resorte "blando", de mucho alargamiento), reconocemos intuitivamente que la vibración será "lenta", y de gran amplitud.

Veamos todas estas cuestiones, matemáticamente:

Para la resolución de la ecuación diferencial podemos ensayar una solución del tipo:

$$x = Q \cdot e^{\lambda t}$$

siendo Q una constante y λ un parámetro, ambos a determinar.

Entonces, derivando y sustituyendo queda:

$$\dot{x} = \lambda \cdot Q \cdot e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 \cdot Q \cdot e^{\lambda t}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$m \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + K \cdot Q \cdot e^{\lambda t} = 0$$

Con lo que se obtiene la ecuación característica:

$$m \cdot \lambda^2 + K = 0$$

que tiene dos soluciones:

$$\lambda_1 = +\sqrt{-K/m} \quad ; \quad \lambda_2 = -\sqrt{-K/m}$$

La solución de la ecuación del movimiento puede entonces escribirse:

$$x = Q_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + Q_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Llamando $\sqrt{K/m} = \omega_n$ "frecuencia circular natural" o "frecuencia propia" del sistema (que como vemos, solo depende de las características K y m del sistema, y no de la amplitud de la vibración ni de las condiciones iniciales x_0 o \dot{x}_0), podemos escribir (más adelante veremos el por qué de esta nomenclatura):

$$x = Q_1 \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} + Q_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t}$$

(recuerdese que $\sqrt{-K/m} = i \sqrt{K/m}$)

Para pasarlo a la forma trigonométrica podemos poner:

$$x = Q_1 \cdot [\text{Cos}(\omega_n \cdot t) + i \cdot \text{Sen}(\omega_n \cdot t)] + \\ + Q_2 \cdot [\text{Cos}(-\omega_n \cdot t) + i \cdot \text{Sen}(-\omega_n \cdot t)]$$

$$x = (Q_1 + Q_2) \cdot \text{Cos} \omega_n t + i \cdot (Q_1 - Q_2) \cdot \text{Sen} \omega_n t$$

$$x = E \cdot \text{Cos} \omega_n t + G \cdot \text{Sen} \omega_n t \quad [4]$$

que representa la suma de dos movimientos armónicos de la misma frecuencia, desfasados $\pi/2$. Se trata, como sabemos, de otro movimiento armónico, de igual frecuencia.

NOTA: Obsérvese que si hacemos:

$$2Q_1 = E + G/i$$

$$2Q_2 = E - G/i$$

$$x = (E/2) \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} + (G/2i) \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} + (E/2) \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t} - (G/2i) \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t}$$

$$x = E \left[\frac{e^{i \cdot \omega_n \cdot t} + e^{-i \cdot \omega_n \cdot t}}{2} \right] + G \left[\frac{e^{i \cdot \omega_n \cdot t} - e^{-i \cdot \omega_n \cdot t}}{2 \cdot i} \right]$$

$$x = E \cdot \cos w_n t + G \cdot \sin w_n t$$

$$\text{siendo } E = (Q_1 + Q_2)$$

$$G = i \cdot (Q_1 - Q_2)$$

Las constantes E y G (o las Q_1 y Q_2) pueden ponerse en función de las condiciones iniciales

$$t = 0 \implies \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$x_0 = E$$

$$\dot{x} = -w_n \cdot E \cdot \sin w_n t + w_n \cdot G \cdot \cos w_n t$$

$$\dot{x}_0 = w_n \cdot G \implies G = \dot{x}_0 / w_n$$

Con lo que la ecuación del movimiento (desplazamiento en función del tiempo) es:

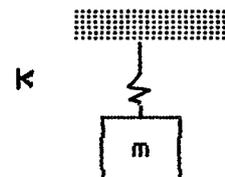
$$x = x_0 \cdot \cos w_n t + (\dot{x}_0 / w_n) \cdot \sin w_n t \quad [5]$$

La amplitud del movimiento es:

$$\sqrt{E^2 + G^2} = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0 / w_n)^2} = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0^2 \cdot m) / K}$$

que como se ve, sólo depende de las condiciones iniciales y de las magnitudes K y m , así que puede ser tan grande como se desee (si lo son x_0 o \dot{x}_0).

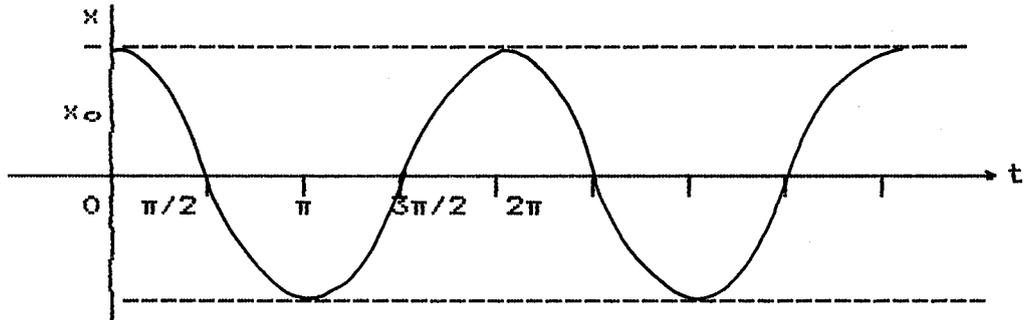
NOTA: Si al sistema masa-resorte se le da un desplazamiento inicial x_0 y se le suelta (sin darle ningún impulso inicial, es decir, con



$\dot{x}_0 = 0$) la respuesta del sistema será:

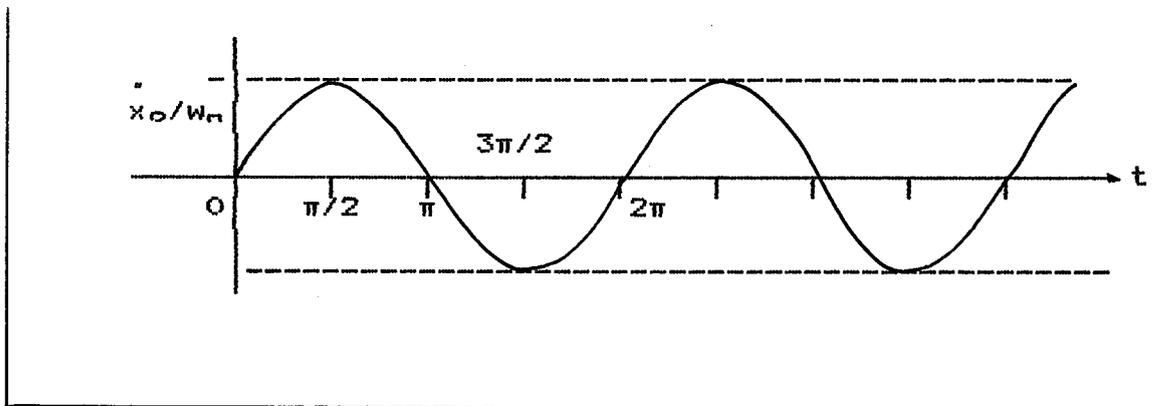
$$x = x_0 \cdot \cos \omega_n t$$

Es decir, una onda cosenoidal.



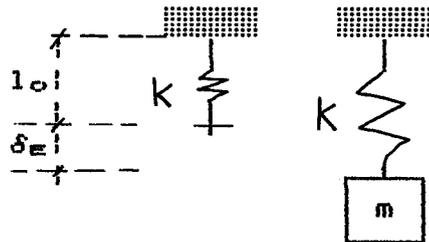
Sin embargo, si en la posición de equilibrio de la masa (sin desplazamiento inicial $x_0 = 0$) le damos un impulso (un golpe), tal que imprima una velocidad inicial \dot{x}_0 , la respuesta será una función senoidal (con diferente amplitud pero igual frecuencia)

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \cdot \text{Sen } \omega_n t$$



NOTA: La consideración eventual del peso de la masa vibrante no introduce ninguna variación en la frecuencia natural del sistema.

En efecto, si al resorte K de la figura se le cuelga

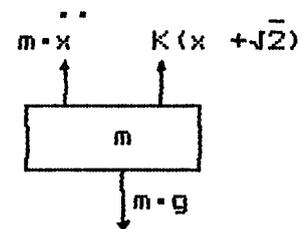


una masa m , se "estira" una longitud δ_e (flecha estática), de valor

$$\delta_e = \frac{m \cdot g}{K}$$

(g = Acel. de la gravedad)

Si ahora desplazamos la masa desde, esta nueva posición de equilibrio, y la liberamos, vibrará libremente, viniendo dada la ecuación del movimiento por:



$$m \cdot \ddot{x} + K(x + \delta_e) - m \cdot g = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot x + K \cdot \delta_e - m \cdot g = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0$$

que es la misma ecuación conocida

NOTA: Conocida la frecuencia circular natural puede hallarse la frecuencia natural de vibración del sistema por:

$$f = 1/T = (1/2\pi) \cdot \omega_n = (1/2\pi) \cdot \sqrt{K/m} \text{ Hertzios}$$

El periodo de la oscilación será:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{m/K} \text{ Segundos}$$

2-2.-Método de la energía

-Muchos sistemas en vibración libre con un grado de libertad no son tan simples como el masa-resorte.

De ahí que para definir la ecuación del sistema vibrante sea preferible emplear otro método, cual es el de la conservación de la energía.

Como sabemos, en un sistema en vibración libre (sobre el cual no se aporta ninguna energía exterior), la suma de las energías cinética y potencial es, en todo instante, constante

$T =$ energía cinética

$U =$ energía potencial

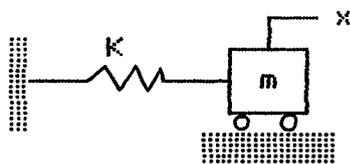
$$T + U = \text{cte.}$$

Por lo tanto, su variación con el tiempo es nula:

$$\frac{d}{dt} \cdot (T + U) = 0$$

Esta ecuación puede emplearse para hallar la E.D. del sistema vibrante.

Ejemplo 1.-



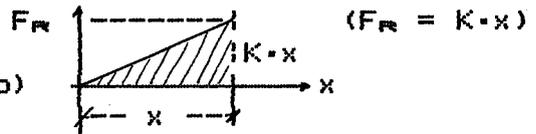
Energía cinética de la masa:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2$$

Energía potencial de la masa:

$$\frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

(área del triángulo)



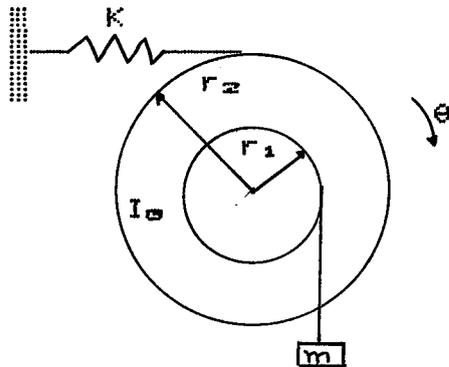
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 = \text{cte.}$$

Diferenciando: $(m \cdot \ddot{x} + K \cdot x) \cdot \dot{x} = 0$

de donde se obtiene:

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0$$

Ejemplo 2.-



Energía cinética del conjunto:

$$\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r_1 \cdot \dot{\theta})^2$$

Energía potencial del conjunto:

$$\frac{1}{2} \cdot K \cdot (r_2 \cdot \theta)^2$$

Sumando:

$$\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r_1 \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot (r_2 \cdot \theta)^2 = \text{cte}$$

Diferenciando:

$$2/2 \cdot I_0 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 2/2 \cdot r_1^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 2/2 \cdot K \cdot r_2 \cdot \theta \cdot \dot{\theta} = 0 \implies$$

de donde se obtiene E.D. del sistema:

$$\implies (I_0 + r_1^2) \cdot \ddot{\theta} + K \cdot r_2 \cdot \theta = 0$$

2-3.-Método de Rayleigh

En sistemas conservativos, y suponiendo la posición 1 aquella en que la energía cinética T es máxima y la posición 2 aquella en que la energía potencial U es máxima, podemos escribir:

$$U_1 + T_1 = U_2 + T_2$$

Como para

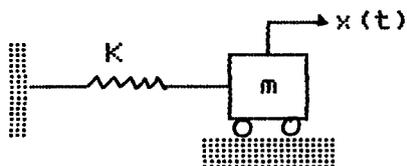
$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = T_{\max} \implies U_1 = 0 \\ U_2 = U_{\max} \implies T_2 = 0 \end{array} \right.$$

Queda, finalmente

$$U_{\max} = T_{\max} \quad [1]$$

Ecuación que nos permite calcular la frecuencia natural del sistema.

Aplicando al sistema masa-resorte



$$x = X \cdot \text{Sen } \omega_n t$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot X^2 \quad (\text{ya que } X \text{ es el valor máximo de } x)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_n^2 \cdot X^2$$

Iguando ambas:

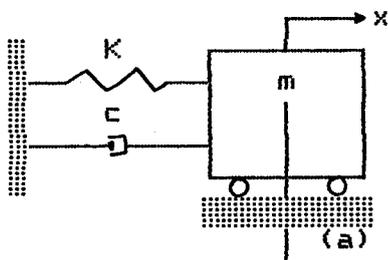
$$\frac{1}{2} \cdot K \cdot X^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_n^2 \cdot X^2$$

$$\omega_n = \sqrt{K/m}$$

El método de Rayleigh permite un cálculo rápido de la frecuencia natural de un sistema, siempre que se conozca el valor de $x(t)$

Cuando este no se conoce, se supone un valor para el desplazamiento x , compatible con los vínculos del sistema, y entonces, aplicando [1] se halla la "frecuencia natural aproximada".

3-1.-Vibraciones libres, con amortiguamiento viscoso, en sistemas de 1 GDL



Intuitivamente el fenómeno puede analizarse someramente.

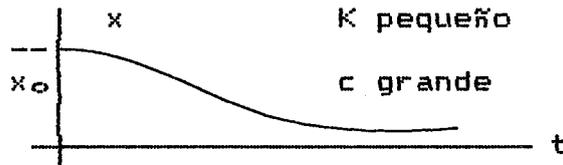
En efecto, imaginemos una pequeña masa m , como se ve en la figura, "unida" a la pared por medio del resorte de rigidez K y el amortiguador viscoso de coeficiente de amortiguamiento c . El conjunto se encuentra inicialmente en reposo en la posición (a) .

Si ahora desplazamos la masa una distancia x_0 (compatible con la deformación elástica del resorte), y la mantenemos fija en esa posición ($x = x_0; \dot{x}_0 = 0$), y luego la soltamos, puede, en un primer análisis, uno de los dos supuestos siguientes:

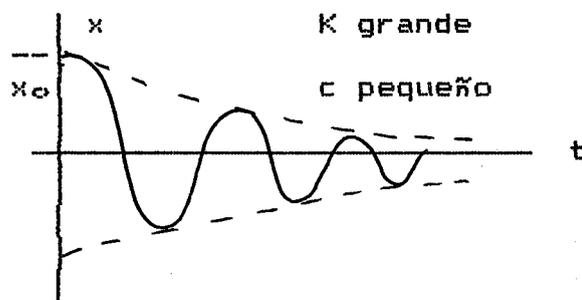
- En primer lugar, la existencia del amortiguador y la inexistencia de fuerzas de excitación exteriores sobre la masa hará que esta se mueva con movimiento amortiguado (amplitudes decrecientes).
- En segundo lugar, el tipo de movimiento dependerá de cuan "duro" sea el resorte, y cuan "resistente al movimiento" sea el amortiguador.

En efecto, si se dispone de un resorte "blando" y un amortiguador "duro" una vez desplazada la masa, cuando se le suelta tenderá a iniciar un movimiento vibratorio. El

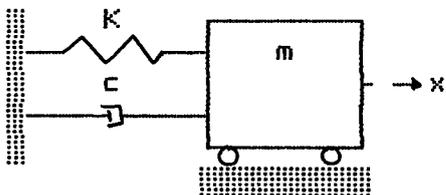
resorte "tirará" de la masa, y el movimiento de esta será fuertemente "impedido" por el amortiguador. El movimiento resultante será una vuelta más o menos rápida, a la posición de equilibrio.



Por el contrario, si el resorte es muy "duro" y el amortiguador muy "blando", "débil", es posible que la masa oscile al rededor de su posición de equilibrio, aunque con movimiento vibratorio amortiguado.



Tales comportamientos, con todo detalle, son fáciles de analizar matemáticamente



Como ya vimos, la ecuación del movimiento de un sistema vibrante de 1 GDL es:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t)$$

En este caso, al ser $F(t) = 0$, queda:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = 0 \quad [1]$$

que es una ecuación diferencial homogénea de 2° orden.

Su solución es del tipo:

$$x = Q \cdot e^{\lambda t}$$

Siendo Q una cte., y λ un parámetro a determinar.

Derivando:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Q \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} \\ \ddot{x} &= Q \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} m \cdot Q \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + c \cdot Q \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} + k \cdot Q \cdot e^{\lambda t} &= 0 \\ m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + K &= 0 \quad (\text{ecuación característica}) \end{aligned}$$

Sus raíces son:

$$\lambda = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4 \cdot \frac{K}{m}}}{2} = -\frac{c}{2 \cdot m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4 \cdot m^2} - \frac{K}{m}}$$

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2 \cdot m} + \sqrt{\frac{c^2}{4 \cdot m^2} - \frac{K}{m}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2 \cdot m} - \sqrt{\frac{c^2}{4 \cdot m^2} - \frac{K}{m}}$$

La solución general será del tipo:

$$x = Q_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + Q_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Naturalmente, las coluciones dependerán de los valores del radicando en λ_1 y λ_2 .

Pueden darse tres casos diferentes, según que:

$$\sqrt{\frac{c^2}{4 \cdot m^2} - \frac{K}{m}} \geq 0 \iff \frac{c^2}{4m^2} \geq \frac{K}{m} \iff c \geq \sqrt{4 \cdot K \cdot m}$$

Veamos cada uno de ellos por separado:

$$a.- \quad \sqrt{\frac{c^2}{4 \cdot m^2} - \frac{K}{m}} = 0 \implies c = \sqrt{4 \cdot K \cdot m}$$

En este caso, cuando el amortiguamiento del sistema es igual a la raíz de $4 \cdot K \cdot m$, las dos raíces λ_1 y λ_2 son iguales.

La solución sería:

$$x = Q_1 \cdot e^{-(c/2m)t} + Q_2 \cdot e^{-(c/2m)t} = (Q_1 + Q_2) \cdot e^{-(c/2m)t}$$

$$x = Q^2 \cdot e^{-(c/2m)t}$$

evidentemente, ésta no puede ser una solución, puesto que la misma debe contener dos constantes diferentes.

Ensayando una solución del tipo:

$$x = u \cdot e^{-(c/2m)t}$$

donde $u = u(t)$ a determinar, se obtendrá sustituyendo en [1]

$$e^{-(c/2m)t} \cdot \left[\ddot{u} - \frac{c \cdot \dot{u}}{m} + \frac{c^2 \cdot u}{4 \cdot m^2} + \frac{c \cdot \dot{u}}{m} - \frac{c^2 \cdot u}{2 \cdot m^2} + \frac{c^2 \cdot u}{4 \cdot m^2} \right] = 0$$

de donde se deduce:

$$\ddot{u} = 0 \implies u = P_1 + P_2 \cdot t$$

siendo P_1 y P_2 las dos constantes arbitrarias.

Por consiguiente, la solución será:

$$x = (P_1 + P_2 \cdot t) \cdot e^{-(c/2m)t}$$

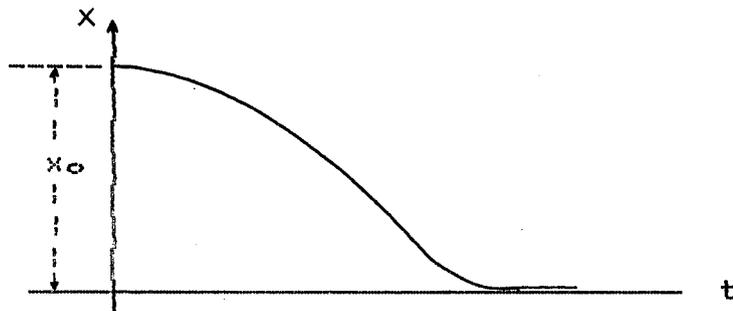
En esta expresión, el primer término $P_1 \cdot e^{-(c/2m)t}$ decrece exponencialmente con t .

El segundo término, puede transformarse:

$$P_2 \cdot t \cdot e^{-(c/2m)t} = \frac{P_2 \cdot t}{e^{+(c/2m)t}} = \frac{P_2 \cdot t}{1 + (c/2m) \cdot t + (c^2/8m^2) \cdot t^2 \dots}$$

que como se ve, también decrece con el tiempo.

Graficamente, la curva del movimiento es una exponencial que tiende, rápidamente, a la posición de equilibrio.



Tales constantes pueden determinarse en función de las condiciones iniciales:

$$t = 0 \implies \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ x = x_0 \end{cases}$$

$$\dot{x} = P_2 \cdot e^{-(c/2m)t} + (P_1 + P_2 \cdot t) \cdot (-c/2m) \cdot e^{-(c/2m)t}$$

$$x_0 = P_1 \implies P_1 = x_0$$

$$\dot{x}_0 = P_2 - (c/2m) \cdot P_1 \implies P_2 = \dot{x}_0 + (c \cdot x_0 / 2m)$$

De donde, finalmente:

$$x = [x_0 + (\dot{x}_0 + (c \cdot x_0 / 2m)) \cdot t] \cdot e^{-(c/2m)t}$$

-El valor de $c = \sqrt{4 \cdot K \cdot m}$ se denomina amortiguamiento crítico, y se representa por c_{cr}

$$c_{cr} = \sqrt{4 \cdot K \cdot m} = 2m \cdot \omega_n$$

y como se ve, sólo depende de las características del sistema.

NOTA: Para otro valor cualquiera de c , se define "relación de amortiguamiento" al parámetro adimensional.

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m \cdot \omega_n}$$

b.-

$$\sqrt{(c^2/4m^2) - (K/m)} > 0 \Rightarrow (c^2/4m^2) > (K/m) \Rightarrow c > \sqrt{4 \cdot K \cdot m}$$

$$c > c_{cr} \Rightarrow \xi > 1$$

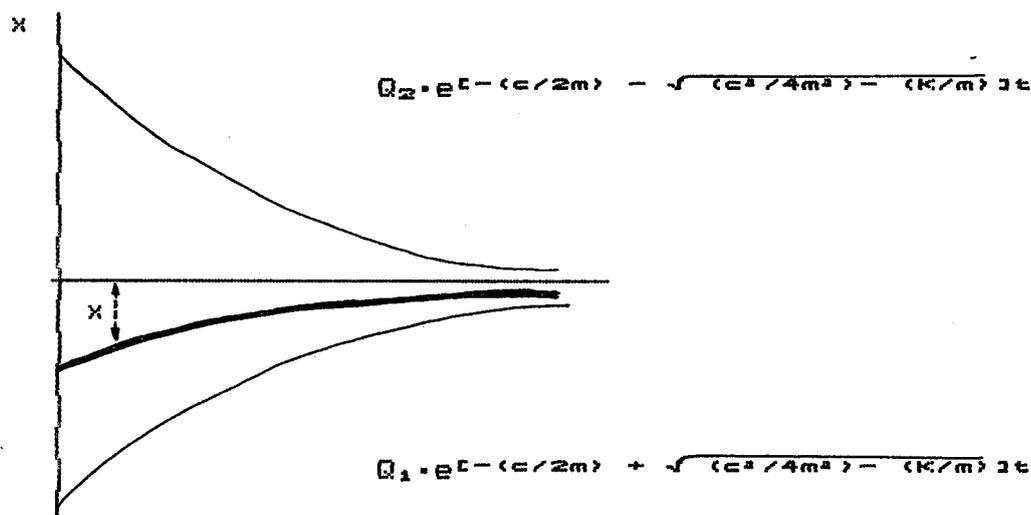
En este caso, λ_1 y λ_2 son reales y distintas y además enteras.

La solución será:

$$x = Q_1 \cdot e^{-(c/2m)t + \sqrt{(c^2/4m^2) - (K/m)}t} +$$

$$+ Q_2 \cdot e^{-(c/2m)t - \sqrt{(c^2/4m^2) - (K/m)}t} \quad [3]$$

Ambas exponenciales son negativas al ser en todo caso el radical menor que el primer sumando.



La suma de ambos términos es el marcado en línea gruesa en la figura.

Como se observa por [3], no se trata de un movimiento armónico sino de un movimiento fuertemente amortiguado, en que x disminuye con t , exponencialmente, aún cuando sin anularse nunca. Se dice que el sistema tiene un amortiguamiento supercrítico.

$$c.- \sqrt{(c^2/4m^2) - (K/m)} < 0 \Rightarrow c < \sqrt{4 \cdot K \cdot m}$$

En este caso, las dos raíces son distintas e imaginarias:

La solución general puede escribirse:

$$x = e^{-(c/2m) \cdot t} \cdot [Q_1 \cdot e^{i \cdot \sqrt{(K/m) - (c^2/4m^2)} \cdot t} + Q_2 \cdot e^{-i \cdot \sqrt{(K/m) - (c^2/4m^2)} \cdot t}]$$

Llamando $w_d = \sqrt{(K/m) - (c^2/4m^2)}$ "frecuencia natural amortiguada", y que sólo depende de las características del sistema, tenemos:

$$x = e^{-(c/2m) \cdot t} \cdot [Q_1 \cdot e^{i \cdot \omega_d \cdot t} + Q_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_d \cdot t}]$$

Pasando a la forma trigonométrica tenemos, al igual que antes:

$$x = e^{-(c/2m) \cdot t} [E \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + G \cdot \sin(\omega_d \cdot t)]$$

Las constantes E y G (o Q_1 y Q_2) pueden determinarse en función de las condiciones iniciales

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{array} \right. \implies E = x_0$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(c/2m) \cdot e^{-(c/2m) \cdot t} [E \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + G \cdot \sin(\omega_d \cdot t)] + \\ &+ e^{-(c/2m) \cdot t} [-E \cdot \omega_d \cdot \sin(\omega_d \cdot t) + G \cdot \omega_d \cdot \cos(\omega_d \cdot t)] \end{aligned}$$

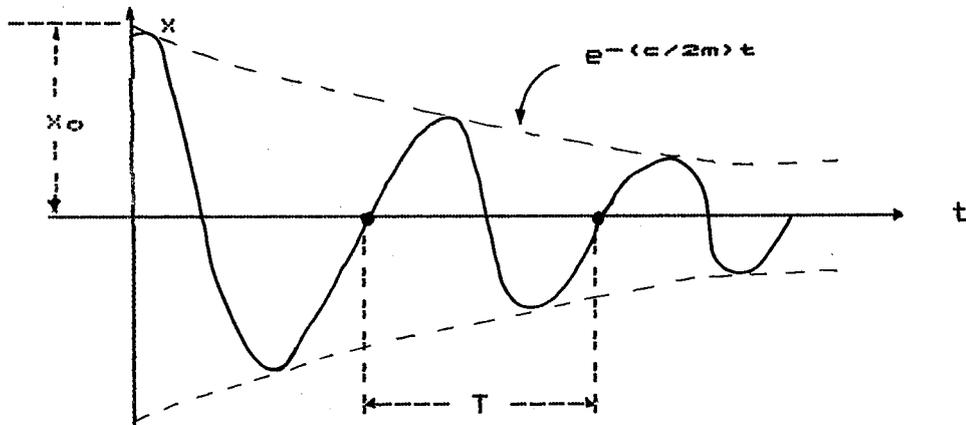
$$\dot{x}_0 = -(c/2m) \cdot E + G \cdot \omega_d \implies G = \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \frac{c \cdot x_0}{2m \cdot \omega_d} \right]$$

Con lo que tendremos finalmente:

$$x = e^{-(c/2m) \cdot t} \left[x_0 \cdot \cos \omega_d \cdot t + \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \frac{c \cdot x_0}{2m \cdot \omega_d} \right] \cdot \sin \omega_d \cdot t \right]$$

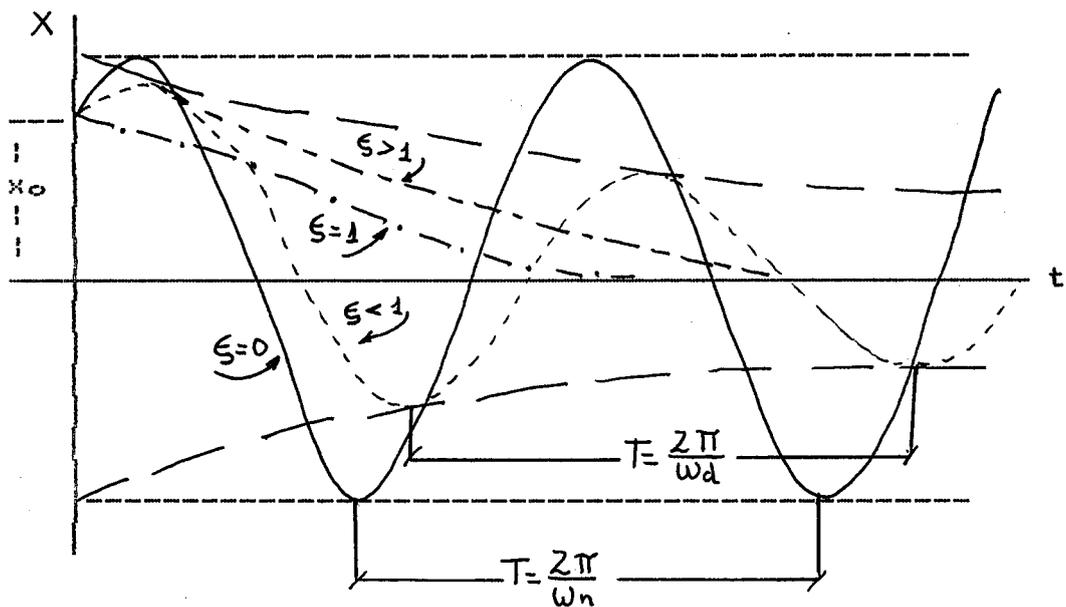
Como se ve, corresponde a un movimiento periódico amortiguado, de frecuencia circular ω_d , obtenido como suma de dos movimientos armónicos de igual frecuencia, diferente amplitud, y desfasados $\pi/2$.

Su representación gráfica es la mostrada en la figura:



El sistema se dice que está subamortiguado, o que su amortiguamiento es subcrítico.

NOTA: Comparación de respuestas según el tipo de amortiguamiento:



NOTA: La frecuencia circular natural amortiguada puede ponerse:

$$\begin{aligned} \omega_d &= \sqrt{(K/m) - (c^2/4m^2)} = \sqrt{K/m} \cdot \sqrt{1 - (c^2/4m^2 \cdot \omega_n^2)} = \\ &= \omega_n \cdot \sqrt{1 - (c/c_{cr})^2} \end{aligned}$$

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

Expresión que liga la frecuencia natural amortiguada con la frecuencia natural propia (libre) y la relación de amortiguamiento, en un sistema cualquiera de este tipo.

NOTA: Decremento logarítmico: Cálculo de ξ

En este movimiento armónico amortiguado, el decremento logarítmico vale:

<u>Tiempo</u>	<u>Amplitud</u>
$t_0 = 0$	$x = x_0$
$t_1 = t_0 + T$	$x = x_1$
$t_2 = t_1 + T = t_0 + 2T$	$x = x_2$
$t_3 = t_2 + T = t_0 + 3T$	$x = x_3$
.....

Si A es una cte., que depende del valor x_0 para $t = 0$, se tendrá:

$$x_0 = A \cdot e^{-(c/2m)t_0}$$

$$x_1 = A \cdot e^{-(c/2m)(t_0 + T)} = x_0 \cdot e^{-(c/2m)T}$$

$$x_2 = A \cdot e^{-(c/2m)(t_0 + 2T)} = x_0 \cdot e^{-(c/2m)2T}$$

$$.....$$

$$x_n = A \cdot e^{-(c/2m)(t_0 + nT)} = x_0 \cdot e^{-(c/2m)nT}$$

El valor $(c/2m)T = \delta$ se le denomina "decremento logarítmico", y vale:

$$x_n = x_0 \cdot e^{-n\delta}$$

$$\delta = 1/n \cdot \ln(x_0/x_n) \quad (\text{cantidad adimensional})$$

Como $T = 2\pi/\omega_d$, queda:

$$\delta = (c/2m)T = (c/2m) \cdot (2\pi/\omega_d) = \frac{c}{2m} \cdot \frac{2\pi}{\omega_d \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \frac{c}{2m \cdot \omega_d}$$

$$\delta = \frac{2\pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Como puede observarse, también δ es un valor característico del sistema, que no depende de amplitudes, estados iniciales, etc.

NOTA: Como T , se puede, medir con bastante facilidad, la relación anterior nos permite calcular, experimentalmente, el amortiguamiento de un sistema.

Para amortiguamientos pequeños

$$\delta \approx 2\pi \cdot \xi$$

-Algunos valores de ξ , empleados en diferentes aplicaciones:

-Amortiguadores de automóviles	0,1 ÷ 0,5
-Goma	0,04
-Hormigón	0,02
-Madera	0,003
-Acero estirado en frío	0,0006

NOTA: Obsérvese que los sistemas libres amortiguados siempre implican un movimiento transitorio, vibratorio o no, pero limitado en el tiempo.

3-2.- Vibraciones libres, con amortiguamiento seco, en sistemas de 1 GDL

-El amortiguamiento seco o de Coulomb es el que se origina sobre la masa vibrante por estar en contacto directo con la superficie de deslizamiento.

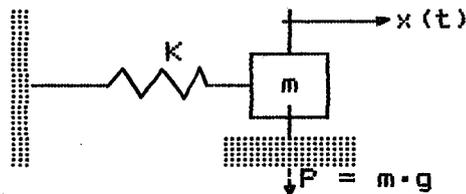
Como sabemos, la fuerza de rozamiento que se origina sobre la masa vale:

$$F_r = \mu \cdot N$$

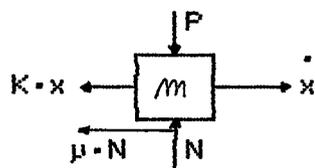
siendo μ el coeficiente de rozamiento y N la carga normal.

Dentro de ciertos límites, esta fuerza de rozamiento puede considerarse constante, por lo que a este tipo de amortiguamiento también se le llama "amortiguamiento constante".

-La ecuación diferencial del movimiento es fácil de definir, aunque como la F_r se opone siempre al movimiento (velocidad), han de expresarse dos ecuaciones diferentes, una para cada dirección.



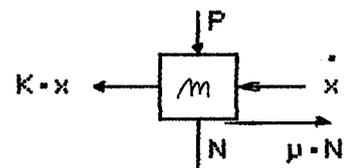
Movimiento a la derecha



$$m \cdot \ddot{x} = -Kx - \mu \cdot N$$

$$m \cdot \ddot{x} + Kx = -\mu \cdot N \quad [1]$$

Movimiento a la izquierda



$$m \cdot \ddot{x} = \mu \cdot N - Kx$$

$$m \cdot \ddot{x} + Kx = \mu \cdot N \quad [2]$$

-La solución de la ecuación [1] será:

$$x_1(t) = E_1 \cdot \text{Cos } w_n t + G_1 \cdot \text{Sen } w_n t - (\mu \cdot N/K) \quad [3]$$

(que puede comprobarse por simple sustitución de [3] en [1]).

Como sabemos $w_n = \sqrt{K/m}$ y E_1 y G_1 son constantes a determinar en función de las condiciones iniciales.

-La solución de la ecuación [2] será:

$$x_2(t) = E_2 \cdot \text{Cos } w_n t + G_2 \cdot \text{Sen } w_n t + (\mu \cdot N/K) \quad [4]$$

en donde E_2 y G_2 también son ctes. a determinar.

-Las ecuaciones [3] y [4] indican que en cada medio ciclo el movimiento es armónico (formado por la suma de dos movimientos armónicos de igual frecuencia w_n), y al cual se le suma el valor cte. $(\mu \cdot N/K)$ y $(-\mu \cdot N/K)$, respectivamente.

-Si las condiciones iniciales son:

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

es decir, si se aparta la masa una distancia x_0 de la posición de equilibrio y se le "suelta" (sin comunicarle ningún impulso, es decir, $\dot{x}_0 = 0$), podremos calcular las ctes. E y G.

Si nos referimos al dibujo, si damos a x un desplazamiento positivo x_0 , el movimiento se iniciará de derecha a izquierda, luego en este primer medio ciclo ha de usarse la ecuación [4].

Sustituyendo las condiciones iniciales queda:

$$x_2(0) = E_2 + (\mu \cdot N/K) \quad \implies \quad E_2 = x_0 - (\mu \cdot N/K)$$

$$\dot{x}_2(t) = -E_2 \cdot \omega_n \cdot \text{Sen } \omega_n t + G_2 \cdot \omega_n \cdot \text{Cos } \omega_n t$$

$$\dot{x}_2(0) = 0 = G_2 \cdot \omega_n \quad \implies \quad G_2 = 0$$

La ecuación [4] queda entonces:

$$x(t) = (x_0 - \mu \cdot N/K) \cdot \text{Cos } \omega_n t + (\mu \cdot N/K) \quad [5]$$

Como se ve es una cosenoide desplazada la distancia $(\mu \cdot N/K)$. Esta expresión [5] sólo es válida en el medio ciclo, es decir, en el intervalo:

$$0 \leq t \leq T/2$$

que también puede expresarse:

$$0 \leq t \leq \pi/\omega_n$$

Para $t = \pi/\omega_n$, la masa está en el extremo opuesto del intervalo, y el valor de la amplitud será:

$$x(t = \pi/2) = (x_0 - \mu \cdot N/K) \cdot \text{Cos } \pi + (\mu \cdot N/K) = -(x_0 - 2\mu \cdot N/K)$$

Como la masa partió de la amplitud x_0 y en medio intervalo llega a la amplitud $-(x_0 - 2\mu \cdot N/K)$, la reducción sufrida en la amplitud vale:

$$2\mu \cdot N/K$$

-En el segundo medio ciclo se parte de las siguientes condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = -(x_0 - 3\mu \cdot N/K) \\ \dot{x} = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \text{valores de } x \text{ y } \dot{x} \\ \text{para } t = \pi/\omega_n \end{array} \right.$$

sustituyendo en la ecuación [3] y en su derivada:

$$E_1 = -x_0 + (3\mu \cdot N/K)$$

$$G_2 = 0$$

Con lo cual la ecuación [3] puede escribirse:

$$x(t) = (+x_0 + 3\mu \cdot N/K) \cdot \cos w_n t - (\mu \cdot N/k) \quad [6]$$

Esta ecuación es válida solamente en el intervalo:

$$\pi/w_n \leq t \leq 2\pi/w_n$$

Al final de este ciclo la amplitud será:

$$x(t = 2\pi/w_n) = x_0 - 4\mu \cdot N/K$$

y la velocidad (derivando [6])

$$\dot{x}(t = 2\pi/w_n) = 0$$

que son las condiciones iniciales para el inicio del segundo ciclo.

-El movimiento continuará hasta el ciclo en que la amplitud de $x(t)$ sea más pequeña que $\mu \cdot N/K$

En tal situación, la acción del resorte $K \cdot x$ será menor que la fricción $\mu \cdot N$, y entonces el movimiento cesa.

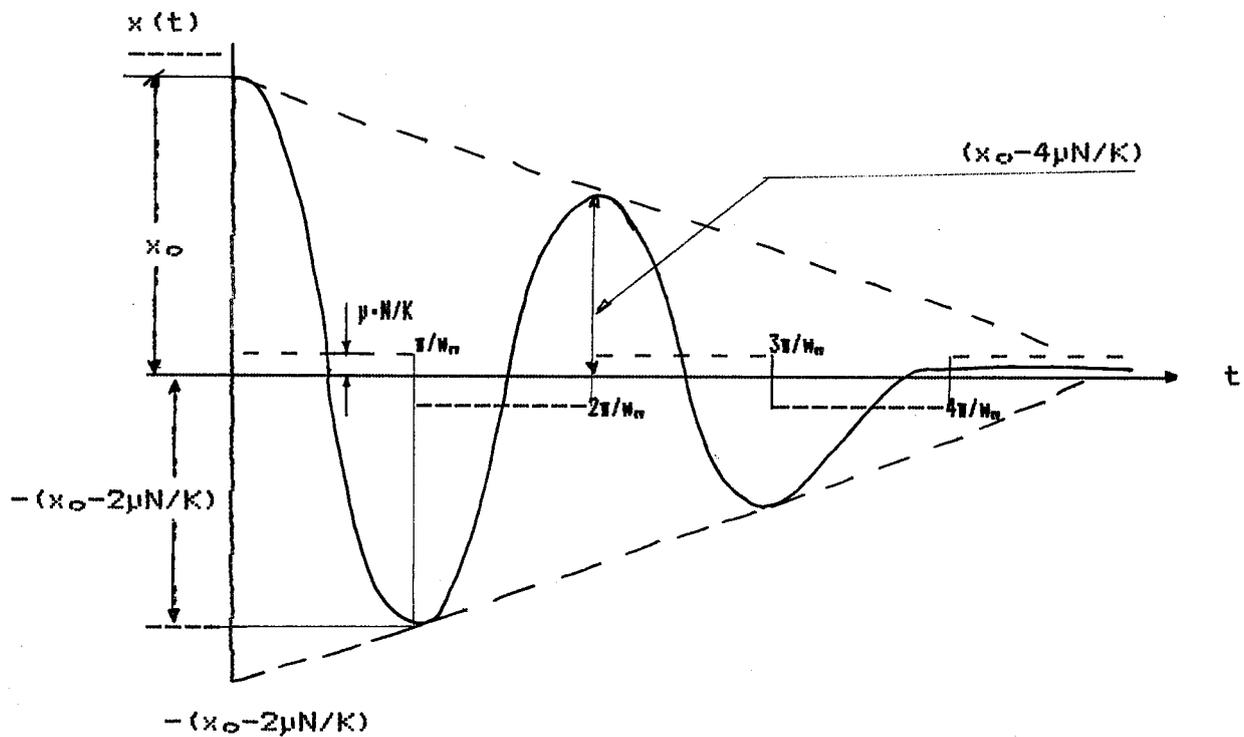
(En la figura, esto ocurre al final del 4º medio ciclo)

Como en cada ciclo la amplitud del movimiento se reduce en $4\mu \cdot N/K$, podremos poner (llamando X a la amplitud):

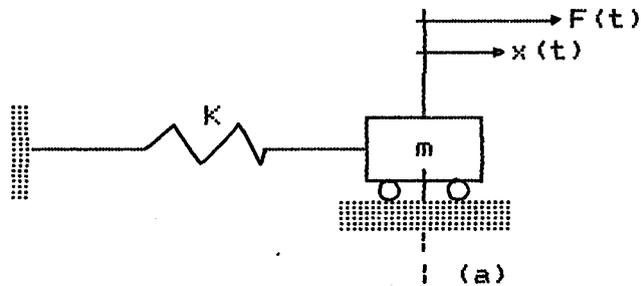
$$X_m = X_{m-1} - (4\mu \cdot N/K)$$

en consecuencia, el decremento por amortiguamiento cte. no es logarítmico, sino lineal.

Por otro lado, el movimiento amortiguado no se prolonga indefinidamente, como en el caso de amortiguamiento viscoso, sino que cesa repentinamente, tan pronto se alcanza el valor $x \leq \mu \cdot N/K$ (Obsérvese también que a diferencia del amortiguamiento viscoso, en el seco la frecuencia es la misma que si el sistema no estuviera amortiguado)



4.-Vibración forzada, sin amortiguamiento, en sistemas de 1GDL



(Suponemos que la fuerza de excitación varía en forma armónica, con frecuencia circular ω_E)

$$F(t) = F \cdot \text{Sen } \omega_E t$$

-Como en los casos anteriores, este fenómeno también puede analizarse intuitivamente, en forma somera.

Ya hemos visto que una masa m , unida por un resorte de rigidez K , oscila libremente con movimiento armónico de frecuencia circular $\omega_n = \sqrt{K/m}$

Si sobre esa masa se aplica una pequeña fuerza $F(t)$, de tipo armónico, de frecuencia circular ω_E está claro que con independencia del movimiento libre tal fuerza tenderá a comunicar a la masa otro movimiento de tipo armónico y de que en el supuesto de que el resorte no interviniera sería de la misma frecuencia que la de la fuerza.

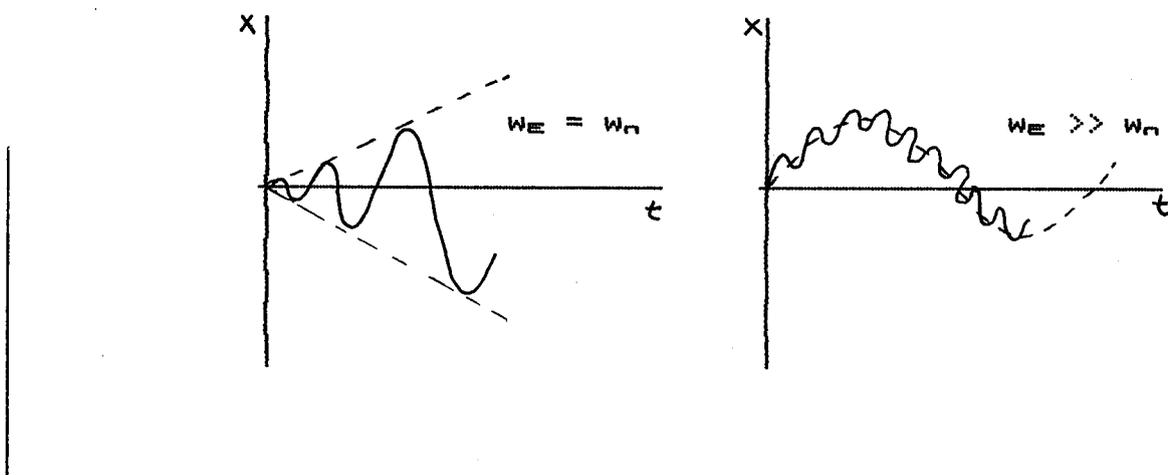
Evidentemente, como $F(t)$ puede tener cualquier valor, las frecuencias ω_n y ω_E son totalmente independientes entre sí.

El movimiento resultante para la masa debe ser la suma del movimiento libre (de frecuencia ω_n) y del movimiento producido por la excitación. Por consiguiente, no se tratará,

en general, de un movimiento armónico, aunque si periódico. Parece lógico suponer también que el movimiento resultante dependerá, de alguna manera, de la relación entre ω_e y ω_n , así como de los valores de K y m .

NOTA: Este es el caso de un columpio, que oscila con una frecuencia circular propia ω_n . Si le aplicamos una fuerza periódica, con frecuencia circular ω_e pueden ocurrir dos cosas:

- a) Que $\omega_e = \omega_n$, es decir, que (por ejemplo) al final de cada oscilación del columpio apliquemos una fuerza F_0 . En este caso, el columpio seguirá oscilando con la misma frecuencia, pero la amplitud irá aumentando. Se dice que existe resonancia. Teóricamente, la amplitud puede hacerse infinita (en un tiempo infinito)
- b) Que $\omega_e \gg \omega_n$, es decir, que el columpio reciba "muchos impulsos" durante una oscilación (de frecuencia ω_n). El resultado será un movimiento periódico, formado por pequeñas oscilaciones superpuestas al lento vaivén general.



-Como se comprende facilmente, la ecuación del movimiento para este caso será:

$$m \cdot \ddot{x}_0 + K \cdot x = F_0 \cdot \text{Sen } \omega t$$

La solución de esta ecuación diferencial, sera la suma de la solución general de la ecuación homogénea ($m \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0$) más una solución particular de la completa.

-La solución de la ecuación homogénea es la conocida

$$x_1 = E \cdot \text{Cos } \omega t + G \cdot \text{Sen } \omega t$$

-Para la solución particular podemos ensayar una del tipo:

$$x_2 = X \cdot \text{Sen } (\omega t - \delta)$$

siendo X y δ valores a determinar (δ es el ángulo de desfase entre $F(t)$ y $x_2(t)$)

$$\dot{x}_2 = \omega X \cdot \text{Cos } (\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega^2 X \cdot \text{Sen } (\omega t - \delta)$$

Sustituyendo en la ecuación general:

$$-m \cdot \omega^2 X \cdot \text{Sen } (\omega t - \delta) + K \cdot X \cdot \text{Sen } (\omega t - \delta) = F_0 \cdot \text{Sen } \omega t$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} & -m \cdot \omega^2 X \cdot \text{Sen } \omega t \cdot \text{Cos } \delta - m \cdot \omega^2 X \cdot \text{Cos } \omega t \cdot \text{Sen } \delta + \\ & + K \cdot X \cdot \text{Sen } \omega t \cdot \text{Cos } \delta + K \cdot X \cdot \text{Cos } \omega t \cdot \text{Sen } \delta = F_0 \cdot \text{Sen } \omega t \end{aligned}$$

Igualando los términos en $\text{Sen } \omega t$ y $\text{Cos } \omega t$:

$$-m \cdot \omega_E^2 \cdot X \cdot \cos \delta + K \cdot X \cdot \cos \delta = F_0 \quad [1]$$

$$-m \cdot \omega_E^2 \cdot X \cdot \sin \delta + K \cdot X \cdot \sin \delta = 0 \quad [2]$$

De la expresión [2]

$$\sin \delta = 0 \quad \implies \delta = 0$$

De la ecuación [1]

$$\delta = 0 \quad \implies \cos \delta = 1 \quad \implies -m \cdot \omega_E^2 \cdot X + K \cdot X = F_0$$

$$X = \frac{F_0}{K - m \cdot \omega_E^2}$$

-Con lo cual, la ecuación del movimiento será:

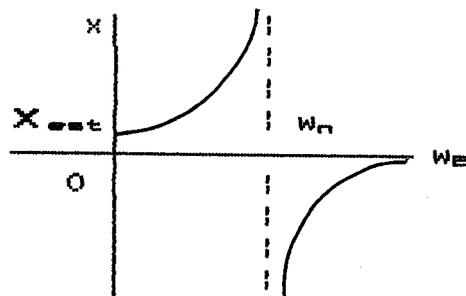
$$x = x_1 + x_2 = (E \cdot \cos \omega_n t + G \cdot \sin \omega_n t) + \frac{F_0}{K - m \cdot \omega_E^2} \cdot \sin \omega_E t$$

Como se vé, es la suma de tres movimientos armónicos: Dos de ellos, de frecuencia circular ω_n , y amplitudes E y G, representan la respuesta del sistema libre. El tercero, de frecuencia circular ω_E , y de amplitud $F_0/(K - m \cdot \omega_E^2)$ representa la respuesta del sistema a la sola fuerza de excitación (Obsérvese que la amplitud de esta respuesta forzada "pura" depende de ω_E).

NOTA: En la ecuación de este movimiento se aprecian dos importantes cuestiones:

- 1ª.- La amplitud del término correspondiente a la vibración forzada depende de los valores de la frecuencia de la fuerza de excitación ω_E , así como de m y K.

$$X = \frac{F_0}{K - m \cdot \omega_E^2} = \frac{F_0/K}{1 - (\omega_E/\omega_n)^2} = \frac{X_{est}}{1 - (\omega_E/\omega_n)^2}$$



Para $\omega_E = 0 \implies X = X_{est}$

Para $\omega_E = \infty \implies X = 0$

Lo que significa que el sistema es insensible a las variaciones de $F(t)$ demasiado rápidas.

Para $\omega_E = \omega_n \implies X = \infty$ fenómeno de resonancia.

29.- En la expresión general de la amplitud del movimiento forzado se observa una cuestión anómala.

$$X = \frac{X_{est}}{1 - (\omega_E/\omega_n)^2}$$

se hace negativa para $\omega_E/\omega_n > 1$

Evidentemente, amplitudes "negativas" es algo que no tiene sentido.

Sin embargo, podemos escribir la solución particular por:

$$x_2 = + X \cdot \text{Sen}(\omega_E t + \pi)$$

lo que quiere decir que una amplitud "negativa" equivale a otra "positiva" en una onda desplazada 180° respecto de la onda original.

Esto significa que cuando $\omega_E/\omega_n < 1$, ambas ondas (desplazamiento y fuerza) están en fase, y que cuando $\omega_E/\omega_n > 1$, ambas están en oposición.

(Es decir, cuando la masa, en su movimiento resultante se mueva hacia la derecha, la fuerza aplicada va hacia la izquierda, y viceversa)

La "inversión" ocurre justo cuando $w_E = w_n$.

-Para estudiar gráficamente la combinación de los dos movimientos, forzado y libre, vamos a estudiar un caso particular, en que:

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{array} \right.$$

Es decir, cuando no existe movimiento libre por "separación inicial" de la masa de su posición de equilibrio. En este caso, el movimiento de la masa es originado por la sola aplicación de la fuerza $F(t)$. Naturalmente, tan pronto $F(t)$ desplace la masa de su posición de equilibrio, el resorte originará sobre ella una vibración libre. La superposición de esta, y la forzada, dará lugar al movimiento total.

$$x = E \cdot \cos w_n t + G \cdot \sin w_n t + \frac{F_0}{K - m \cdot w_E^2} \cdot \sin w_E t$$

$$\dot{x} = -E \cdot w_n \cdot \sin w_n t + G \cdot w_n \cdot \cos w_n t + \frac{F_0 \cdot w_E}{K - m \cdot w_E^2} \cdot \cos w_E t$$

$$0 = E$$

$$0 = \frac{F_0 \cdot w_E}{K - m \cdot w_E^2} + G \cdot w_n \implies G = - \frac{F_0 \cdot (w_E / w_n)}{k - m \cdot w_E^2}$$

Sustituyendo:

$$x = \frac{F_0 \cdot (w_E/w_n)}{K - m \cdot w_E^2} \cdot \text{Sen } w_n t + \frac{F_0}{K - m \cdot w_E^2} \cdot \text{Sen } w_E t$$

Llamando $w_E/w_n = r$

$$x = \frac{x_0/w_n^2}{m \cdot (1 - r^2)} \cdot (\text{Sen } w_E t - r \cdot \text{Sen } w_n t)$$

$$x = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - r^2} \cdot (\text{Sen } w_E t - r \cdot \text{Sen } w_n t)$$

Como $F_0/K = X_{est}$ (flecha estática)

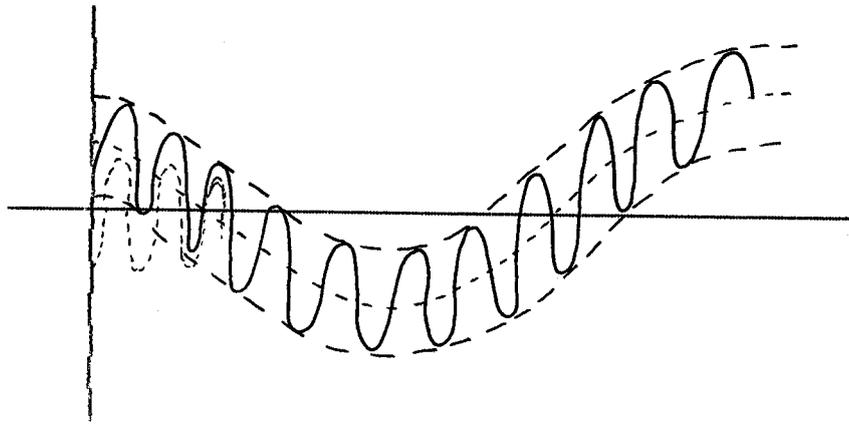
$$x = X_{est} \cdot \frac{1}{1 - r^2} \cdot (\text{Sen } w_E t - r \cdot \text{Sen } w_n t)$$

Este movimiento tiene aspectos muy diferentes, según sea la relación entre w_E y w_n , ya que en definitiva se trata de dos movimientos armónicos, de diferentes frecuencias y amplitudes.

a) Si w_E y w_n son muy diferentes (por ejemplo, $w_E \gg w_n$), los dos movimientos se reconocen claramente.

Al ser $w_E \gg w_n$, la fuerza cambia tan rápidamente que la masa no puede seguirla.

En este supuesto de vibración libre, y $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ para $t = 0$, la deflexión estática inicial F_0/K origina una vibración libre, a la cual se superpone la forzada:



b) Si w_E y w_n son muy parecidos $w_E \approx w_n$, podríamos hacer la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \text{Sen } w_E t &= (w_E/w_n) \cdot \text{Sen } w_n t = \\ &= \frac{1}{w_n} \cdot (w_n - w_E) \cdot \text{Cos} \left[\frac{w_E - w_n}{2} \cdot t \right] \cdot \text{Sen} \left[\frac{w_E + w_n}{2} \cdot t \right] + \\ &+ \frac{1}{w_n} \cdot (w_E + w_n) \cdot \text{Sen} \left[\frac{w_E - w_n}{2} \cdot t \right] \cdot \text{Cos} \left[\frac{w_E + w_n}{2} \cdot t \right] \end{aligned}$$

llamando $w_E - w_n = \Delta w$

$$\text{Sen} \left[\frac{w_E - w_n}{2} \cdot t \right] \approx (\Delta w/2) \cdot t$$

$$\text{Cos} \left[\frac{w_E - w_n}{2} \cdot t \right] \approx 1$$

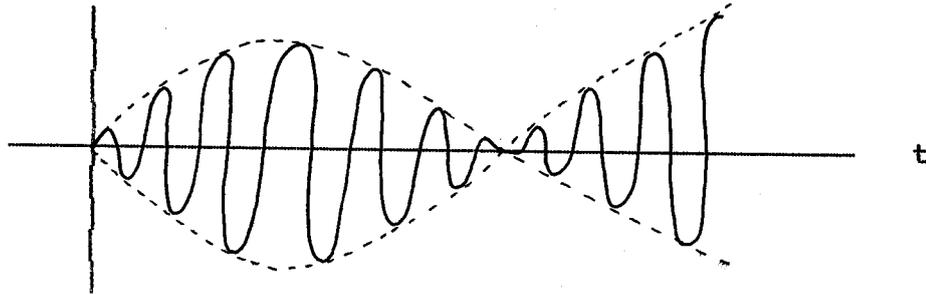
$$w_E + w_n \approx 2w_E$$

Queda la ecuación en la forma:

$$x = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - r^2} \cdot \left[-\frac{1}{w_n} \cdot (\Delta w) \cdot \text{Sen } w_E t + (\Delta w) \cdot t \cdot \text{Cos } w_E t \right]$$

que representa el fenómeno de pulsación o batimiento.

La amplitud comienza a aumentar con t , y se está próximo al fenómeno de resonancia.



c) Cuando $\omega_E = \omega_n$, la frecuencia forzada coincide con la natural. La fuerza puede empujar la masa en el momento "oportuno" y se produce el fenómeno de resonancia.

En este caso, el primer término de la ecuación anterior tiende a anularse ($\Delta\omega \rightarrow 0$), mientras que el 2º término aumenta su valor con t .

Queda por tanto:

$$x = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - r^2} \cdot (\Delta\omega) \cdot t \cdot \cos \omega_n t$$

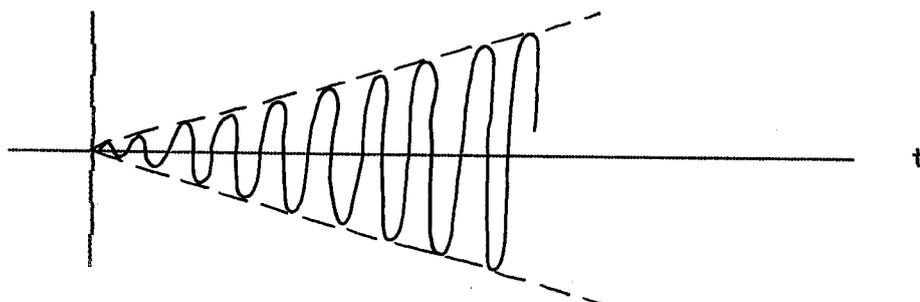
$$x = \frac{F_0 \cdot (\omega_E - \omega_n)}{(K/\omega_n^2) \cdot (\omega_n^2 - \omega_E^2)} \cdot t \cdot \cos \omega_n t$$

$$x = \frac{F_0 \cdot t \cdot (\omega_E - \omega_n)}{m \cdot (\omega_n - \omega_E) \cdot (\omega_n + \omega_E)} \cdot \cos \omega_n t$$

$$x = \frac{F_0 \cdot t}{2m \cdot \omega_n} \cdot \cos \omega_n t$$

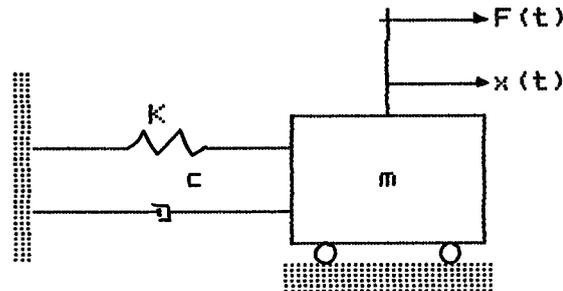
$$\omega = \omega_n \implies \omega + \omega_n = 2 \cdot \omega_n$$

que puede interpretarse como un movimiento armónico de frecuencia ω_n , cuya amplitud crece con t



5-1-1.-Vibraciones forzadas, en sistemas amortiguados de 1 GDL.

Fuerza de excitación senoidal. Método gral.



Si la fuerza aplicada es de tipo armónico, de amplitud F_0 , y de frecuencia circular ω_e

$$F(t) = F_0 \cdot \text{Sen } \omega_e t$$

la ecuación general puede escribirse:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F_0 \cdot \text{Sen } \omega_e t$$

La solución de esta ecuación diferencial lineal de segundo orden será la suma de la solución de la ecuación homogénea, más una solución particular de la completa.

-La solución de la homogénea ya se conoce, y vale:

$$x_t = e^{-(c/2m)t} (E \cdot \text{Cos } \omega_e t + G \cdot \text{Sen } \omega_e t)$$

(la llamaremos x_t por ser de carácter transitorio)

-Como solución particular podemos ensayar una del tipo:

(llamándola x_p por ser de carácter permanente)

$$x_p = X \cdot \text{Sen } (\omega_e t - \delta)$$

Derivando:

$$\dot{x}_p = w_E \cdot X \cdot \cos (w_{Et} - \delta)$$

$$\ddot{x}_p = -w_E^2 \cdot X \cdot \sin (w_{Et} - \delta)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} & -m \cdot w_E^2 \cdot X \cdot \sin (w_{Et} - \delta) + w_E \cdot X \cdot c \cdot \cos (w_{Et} - \delta) + \\ & + K \cdot X \cdot \sin (w_{Et} - \delta) = F_0 \cdot \sin w_{Et} \end{aligned}$$

dividiendo por m , y teniendo en cuenta que:

$$K/m = w_n^2 \quad ; \quad c/m = 2\xi \cdot w_n$$

$$\begin{aligned} & -w_E^2 \cdot X \cdot \sin (w_{Et} - \delta) + w_E \cdot X \cdot 2\xi \cdot w_n \cdot \cos (w_{Et} - \delta) + \\ & + w_n^2 \cdot X \cdot \sin (w_{Et} - \delta) = (F_0/m) \cdot \sin w_{Et} \end{aligned}$$

desarrollando las expresiones en Seno y Coseno:

$$\begin{aligned} & -w_E^2 \cdot X \cdot \sin w_{Et} \cdot \cos \delta + w_E^2 \cdot X \cdot \cos w_{Et} \cdot \sin \delta + \\ & + w_E \cdot X \cdot 2\xi \cdot w_n \cdot \cos w_{Et} \cdot \cos \delta + w_E \cdot X \cdot 2\xi \cdot w_n \cdot \sin w_{Et} \cdot \sin \delta + \\ & + w_n^2 \cdot X \cdot \sin w_{Et} \cdot \cos \delta - w_n^2 \cdot X \cdot \cos w_{Et} \cdot \sin \delta = \\ & = (F_0/m) \cdot \sin w_{Et} \end{aligned}$$

Iguando los términos en Sen y Cos:

$$-w_E^2 X \cdot \cos \delta + 2X \cdot w_E \cdot w_n \cdot \xi \cdot \sin \delta + w_n^2 \cdot X \cdot \cos \delta = F_0/m \quad [1]$$

$$w_E^2 X \cdot \sin \delta + 2X \cdot w_E \cdot w_n \cdot \xi \cdot \cos \delta - w_n^2 \cdot X \cdot \sin \delta = 0 \quad [2]$$

De la expresión [2]:

$$\text{Sen } \bar{\delta} \cdot (\omega_E^2 - \omega_n^2) - 2\omega_E \cdot \omega_n \cdot \xi \cdot \text{Cos } \bar{\delta} = 0$$

$$\text{Tag } \bar{\delta} = \frac{2\xi \cdot \omega_E \cdot \omega_n}{\omega_E^2 - \omega_n^2} = \frac{2\xi \cdot (\omega_E/\omega_n)}{1 - (\omega_E/\omega_n)^2} = \frac{2\xi \cdot r}{1 - r^2}$$

Este ángulo $\bar{\delta}$ representa el desfase entre la fuerza aplicada $F(t)$ y el movimiento de la masa $x(t)$.

De la expresión [1]:

$$\begin{aligned} X &= \frac{F_0/K}{\sqrt{\left[1 - (\omega_E/\omega_n)^2\right]^2 + (2\xi \cdot \omega_E/\omega_n)^2}} = \\ &= \frac{F_0/K}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} \end{aligned}$$

Como $F_0/k = X_{est}$ (deflexión estática), se llama "coeficiente de amplificación dinámica" a:

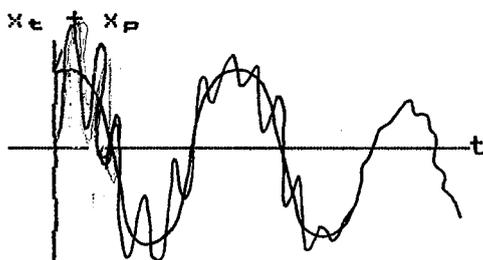
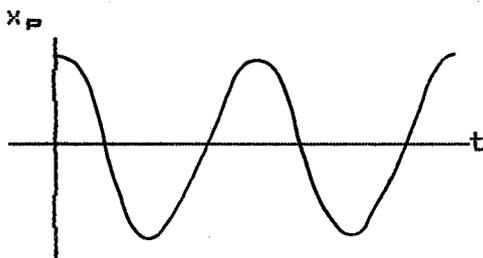
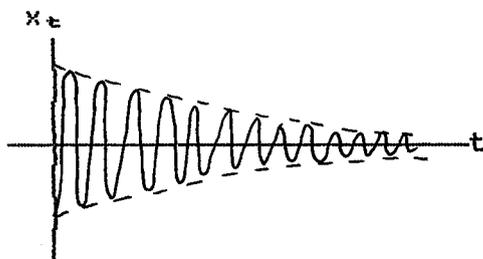
$$\frac{X}{X_{est}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}}$$

La solución de la ecuación del movimiento será entonces:

$$\begin{aligned} x &= x_t + x_p = e^{(-c/2m)t} (E \cdot \text{Cos } \omega_d \cdot t + \\ &+ G \cdot \text{Sen } \omega_d \cdot t) + \frac{F_0/K}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} \cdot \text{Sen } (\omega_E \cdot t - \bar{\delta}) \end{aligned}$$

Como se vé el movimiento resultante es la suma de un término correspondiente a una vibración libre amortiguada de frecuencia ω_d y amplitud decreciente en el tiempo (teóricamente, su amplitud se anula en un tiempo infinito. En la práctica, mucho más corto) (recuérdese que, el movimiento puede ser subcrítico, crítico o supercrítico), y otro término de amplitud X y frecuencia ω_e (la misma que la de la fuerza de situación, y que al no disminuir con el tiempo, al final representará la respuesta (movimiento) permanente del sistema.

Este movimiento permanente o forzado y la fuerza de excitación presentan un desfase dado por el ángulo δ .



Las figuras representan el movimiento de un sistema con amortiguamiento subcrítico, sometido a una fuerza de excitación "lenta"

$$(\omega_e \ll \omega_n).$$

La primera figura representa el movimiento del sistema considerado libre. Como se ve la amplitud va decreciendo con t.

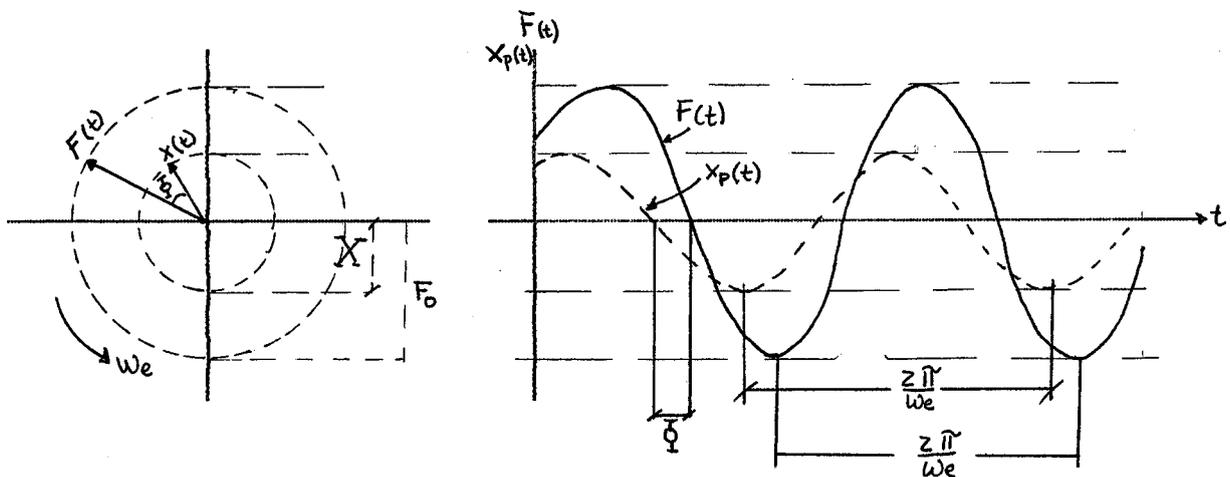
La segunda figura representa el movimiento del sistema por aplicación de la fuerza $F(t)$.

$$X = \frac{F_0/K}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta \cdot r)^2}} \quad ; \quad \delta = \arctan \frac{2\zeta \cdot r}{1 - r^2}$$

La tercera figura representa el movimiento resultante. Inicialmente, el movimiento es muy complejo (periodo transitorio), pero a medida que el amortiguador va amortiguando la vibración libre, el sistema cada vez va respondiendo más fielmente a la variación de la fuerza de excitación, aún cuando con un cierto desfase.

A la larga, la amplitud del movimiento completo coincide con la X , y se alcanza el movimiento permanente estable.

-La figura representa el movimiento permanente del sistema, en comparación con la fuerza de excitación:



NOTA: Se observa que en el movimiento permanente final

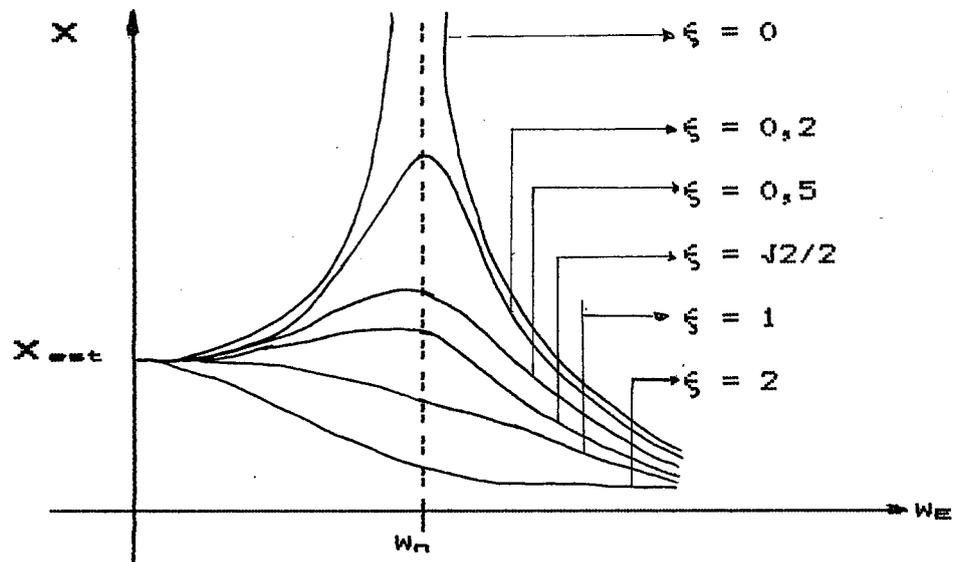
$$x_p = X \cdot \text{Sen} (\omega_e \cdot t - \delta).$$

Tanto la amplitud X como el ángulo de desfase δ varían con ω_e y con ϵ .

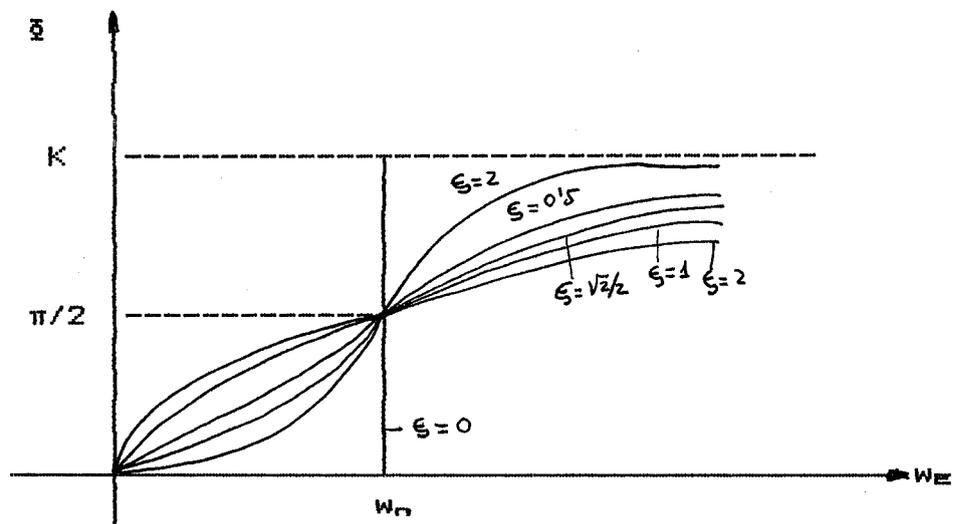
Las figuras representan estas variaciones de X y de δ , para distintos valores de ω_e y c .

$$\Gamma = \frac{\omega_e}{\omega_n}$$

$$X = \frac{F_0/K}{\sqrt{(1 - \Gamma^2)^2 + (2\zeta \cdot \Gamma)^2}}$$



$$\varphi = \text{tag}^{-1} \frac{2\xi \cdot r}{1 - r^2}$$



Se observa que para cualquier valor de c diferente de cero ($\xi \neq 0$), no existen amplitudes infinitas. Además, todas las amplitudes disminuyen al aumentar c . También se observa que los valores máximos de X no se producen para $\omega_E = \omega_n$, sino un poco antes (excepto $\xi = 0$).

Por tanto, en un sistema de este tipo se distinguen tres valores de la frecuencia: la propia w_n , la amortiguada w_d y la de resonancia (máximo valor de X).

Igualmente, también se observa que para $\xi = 0$, el ángulo de desfase es cero, para $w_e < w_n$ y π para $w_e > w_n$. Para otros valores de ξ el ángulo de desfase se "suaviza" al aumentar ξ .

Un análisis más detenido muestra más claramente el comportamiento de este sistema:

a.- Zona en que $w_e \ll w_n$.

Cuando $w_e = 0$, $F(t) = F_0 =$ Fuerza estática.

La amplitud X corresponde a la deflexión estática $X_{est} = F_0/K$. Evidentemente, $\delta = 0$

Al ir aumentando w_e , y para valores de c pequeños, la amplificación irá en aumento, a medida que w_e aumenta.

Sin embargo, para valores de c grandes las amplitudes del movimiento permanente serán menores.

En cuanto al desfase entre $F(t)$ y $x_p(t)$ se ve que en esta zona el desfase δ aumenta en todos los casos, ya que debido al amortiguamiento, al sistema le es difícil seguir las variaciones de la excitación. Con valores de c pequeños, el desfase aumenta más rápidamente al acercarse w_e a w_n , permaneciendo bajo para valores pequeños de w_e .

Por contra en sistemas con gran amortiguamiento, el ángulo de desfase crece rápidamente desde el principio.

b.- Zona en que $w_E = w_n$

Para valores pequeños de c se producirá el máximo de la amplitud X .

Tal máximo (el punto donde ocurre) se tendrá cuando sea mínimo el radicando de la expresión que da X .

$$\text{Radicando} = [1 - (w_E/w_n)^2]^2 + 4\xi^2 \cdot (w_E/w_n)^2$$

Derivando respecto a w_E e igualando a cero:

$$\begin{aligned} dR/dw_E = 0 &= 2 \cdot [1 - (w_E/w_n)^2] \cdot (-2w_E/w_n^2) + \\ &+ 4\xi^2 \cdot (2w_E/w_n^2) \rightarrow [1 - (w_E^2/w_n^2)] + 2\xi^2 = 0 \end{aligned}$$

$$w_E = w_n \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2} = w_r$$

(frecuencia de resonancia w_r)

Como se ve, la frecuencia de excitación en la que se produce la máxima amplitud, es también una característica propia del sistema.

Para valores de c pequeño prácticamente coincide con la frecuencia natural. Sin embargo, no es igual a w_n ni a w_d .

Para este valor de la frecuencia de excitación (w_r), el valor de la amplitud es:

$$X_{\max} = \frac{F_0/K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{w_n}{w_n}\right) \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}\right]^2 + \left[2\xi \cdot \frac{w_n \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}}{w_n}\right]^2}}$$

$$X_{\max} = \frac{F_0/K}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

El factor de amplificación dinámica será; en este caso:

$$F.A.D. = X_{\max}/X_{\text{est}} = 1/(2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2})$$

En esta zona en que $w_e \approx w_n$, el ángulo de desfase vale aproximadamente $\pi/2$, para cualquier valor del amortiguamiento.

Sólo para $w_e = w_n$, $\delta = \pi/2$.

c.- Zona en que $w_e \gg w_n$.

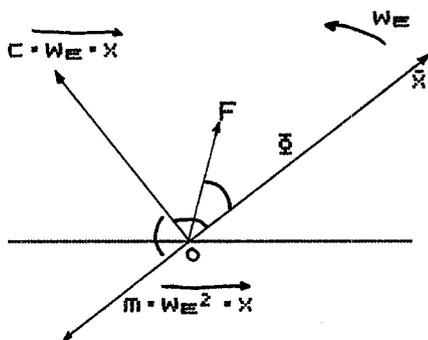
Al tender w_e a infinito, X tiende a cero.

En efecto, cuando la frecuencia de excitación es muy grande el sistema amortiguado no puede seguir las variaciones de $F(t)$, tendiendo a oscilar cada vez con menor amplitud.

En esta zona, el ángulo de desfase tiende a 180° , haciéndolo más rápidamente cuanto menor sea c .

Para $c = 0$, δ pasa de cero a 180° bruscamente, como vimos en el punto anterior.

NOTA: Lo expuesto en la nota anterior puede verse más fácilmente en forma gráfica.



La figura representa la posición relativa de los cuatro vectores rotatorios que definen la ecuación del sistema:

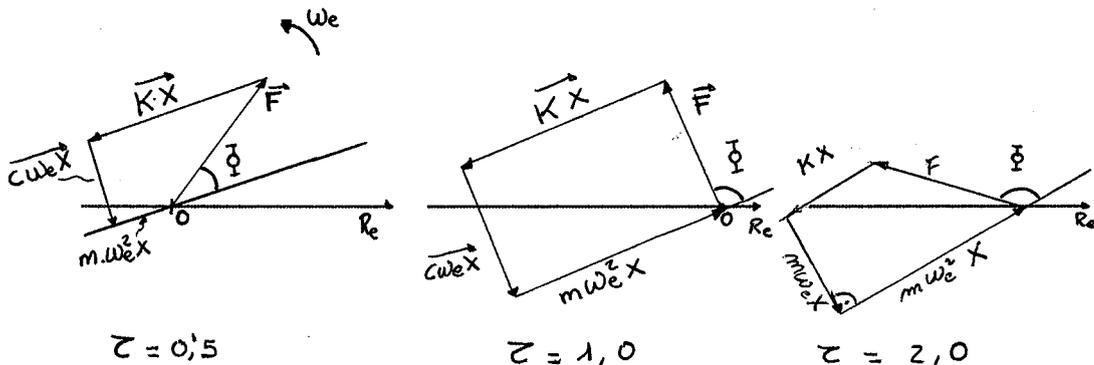
$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F_0 \cdot \text{Sen } \omega_e t$$

Siendo la solución permanente:

$$x_p = X \cdot \text{Sen } (\omega_e t + \phi)$$

El vector fuerza debido a la acción del resorte será $-K \cdot X$. El debido al amortiguamiento será $-c \cdot \omega_e \cdot X$. El debido a la inercia será $-(-\omega_e^2 \cdot m \cdot X)$.

Teniendo esto presente, las figuras representan las posiciones relativas de estos vectores fuerza (también rotatorios) para un sistema con $\epsilon = 0,25$, excitado por una fuerza armónica de amplitud constante F_0 , para tres valores de $\tau = \omega_e / \omega_n$.



-Cuando w_e es pequeña, el ángulo de desfase también lo es (según se ve en las gráficas de la página ..). La fuerza exterior F se invierte casi en su totalidad en vencer la acción del resorte. El valor de la amplitud X es grande y las fuerzas de inercia son pequeñas.

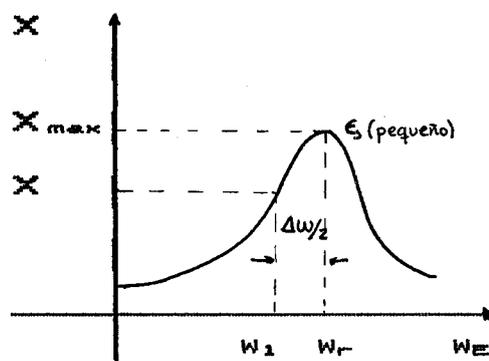
Cuando $w_e = w_n$, el ángulo de desfase es de 90° . En este momento se alcanza el máximo valor de la amplitud.

La fuerza de la inercia es contrarrestada por la acción del resorte, mientras que la fuerza exterior se emplea en vencer el amortiguamiento.

Cuando w_e es grande, la fuerza exterior se invierte principalmente en vencer la acción de la inercia. El valor de la amplitud de la oscilación es pequeño.

NOTA: El conocimiento del F.A.D. nos permite, en sistemas de este tipo, evaluar la relación de amortiguamiento ξ (y con ello, el amortiguamiento del sistema vibrante, ya que $\xi = c/c_r = c/(2m \cdot w_n) \Rightarrow c = \xi \cdot 2m \cdot w_n$) usando un método experimental.

En efecto, sea una curva cualquiera de la familia (para pequeño amortiguamiento) como la de la figura.



Sea w_r la frecuencia para el pico de resonancia, que da la máxima amplitud X_{max} .

Sea X , el desplazamiento para una frecuencia w_1

Si suponemos que la curva es aproximadamente simétrica, podemos poner:

$$w_r - w_1 = \Delta w/2$$

Según la expresión que da el valor de X_1 ,

$$X_1 = \frac{F_0/K}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} \quad ; \text{ siendo } r = w_1/w_n$$

$$w_r \approx w_n$$

$$X_1 = \frac{F_0/m \cdot w_n^2}{\sqrt{[1 - (w_n - \Delta w/2)^2/w_n^2]^2 + 4\xi^2 \cdot (w_n - \Delta w/2)^2/w_n^2}}$$

$$X_1 \approx \frac{F_0/m \cdot w_n^2}{\sqrt{(\Delta w/w_n)^2 + 4 \cdot \xi^2}}$$

Por otra parte,

$$X_{\max}/X_{\text{est}} = 1/(2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}) \approx 1/2\xi \quad (\text{para } \xi \text{ pequeños})$$

luego:

$$X_{\max} = X_{\text{est}}/2\xi = \frac{F_0/(K \cdot m \cdot w_n^2)}{2\xi}$$

Dividiendo ambos valores:

$$R = X_{\max}/X_1 = \frac{\sqrt{(\Delta w/w_n)^2 + 4\xi^2}}{2\xi}$$

Operando, se obtiene:

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta w/w_n}{\sqrt{R^2 - 1}}$$

Ahora, si se toma w_1 de manera que:

$$X_1 = (\sqrt{2}/2) \cdot X_{\max} \implies R^2 = 2$$

se obtiene:

$$\epsilon = \Delta w / 2w_n = (w_n - w_1) / w_n$$

Por tanto, midiendo experimentalmente el valor de w_n (valor de la frecuencia de excitación aproximadamente igual al que produce la resonancia del sistema), y luego tomando otro valor de la frecuencia de excitación w_1 tal que produzca una amplitud:

$$X_1 = (\sqrt{2}/2) \cdot X_{\max}$$

se puede hallar por la expresión anterior el coeficiente de amortiguamiento del sistema.

(Recuérdese que el método es válido sólo para sistemas con amortiguamiento débil)

(Este método se conoce también como el "método del ancho de banda")

5-1-2.-METODO DE LA IMPEDANCIA MECANICA

-Este método se basa en la representación compleja de las funciones armónicas.

Según esto, la ecuación del sistema.

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F_0 \cdot \text{Sen } \omega t$$

Cuya solución permanente es del tipo:

$$x_p = X \cdot \text{Sen } (\omega t + \varphi)$$

puede escribirse en la forma:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = I_m \{ \tilde{F} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \} \quad [1]$$

cuya solución permanente es del tipo:

$$x_p = I_m \{ \tilde{X} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \} \quad [2]$$

siendo \tilde{F} y \tilde{X} los correspondientes fasores de $F(t)$ y $x_p(t)$ respectivamente.

Es decir:

$$\tilde{F} = F_0 \cdot e^{i \cdot 0} = F_0$$

$$\tilde{X} = X \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Como sabemos:

$$\dot{x}_p = I_m \{ \tilde{X} \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \} \quad [3]$$

$$\ddot{x}_p = I_m \{ \tilde{X} \cdot (i \cdot \omega)^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \} \quad [4]$$

Sustituyendo [2], [3] y [4] en [1], tendremos:

$$I_m \{ \tilde{X} \cdot m \cdot (i \cdot \omega_E)^2 \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t} \} + I_m \{ \tilde{X} \cdot c \cdot (i \cdot \omega_E)^2 \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t} \} + I_m \{ \tilde{X} \cdot K \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t} \} = I_m \{ \tilde{F} \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t} \}$$

Operando:

$$(-m \cdot \omega_E^2 + i \cdot c \cdot \omega_E + K) \cdot \tilde{X} = \tilde{F} \quad [5]$$

De donde:

$$\tilde{X} = \tilde{F} / (K + i \cdot c \cdot \omega_E - m \cdot \omega_E^2) \quad [6]$$

Como $\tilde{X} = X \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t}$, puede obtenerse:

$$X = |\tilde{X}| = F_0 / \sqrt{(K - m \cdot \omega_E^2)^2 + (c \cdot \omega_E)^2} \quad [7]$$

$$\delta = \text{tag}^{-1} (c \cdot \omega_E) / (K - m \cdot \omega_E^2) \quad [8]$$

NOTA: Haciendo las transformaciones:

$$c/m = 2\xi \cdot \omega_n ; K/m = \omega_n^2 ; \omega_E/\omega_n = r ; F_0/K = X_{est}$$

quedan las expresiones ya conocidas:

$$X/X_{est} = 1/\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}$$

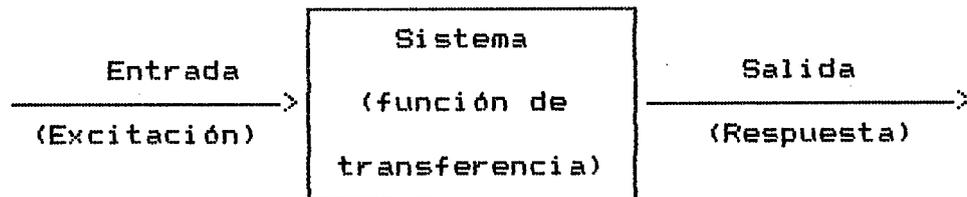
$$\delta = \text{tag}^{-1} [2\xi \cdot r / (1 - r^2)]$$

-La respuesta permanente del sistema vendrá dada por:

$$\begin{aligned} x_p &= I_m \{ \tilde{X} \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t} \} = I_m \{ X \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t} \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t} \} = \\ &= I_m \{ X \cdot e^{i \cdot (\omega_E \cdot t + \delta)} \} \end{aligned}$$

$$x_p = [F_0 / \sqrt{(K - m \cdot \omega_E^2)^2 + (c \cdot \omega_E)^2}] \cdot \text{Sen} (\omega_E \cdot t + \delta)$$

NOTA: Se denomina función de transferencia de un sistema mecánico, a la función que liga el parámetro de entrada (excitación) con el parámetro de salida (respuesta).



En el sistema masa-resorte-amortiguador que estamos analizando, de ecuación:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t)$$

$F(t)$ es la excitación, y x_p la respuesta (permanente).

En consecuencia:

$$x_p(t) = F(t) \cdot \text{Función de transferencia.}$$

$$x_p(t)/F(t) = \text{Función de transferencia}$$

Sustituyendo:

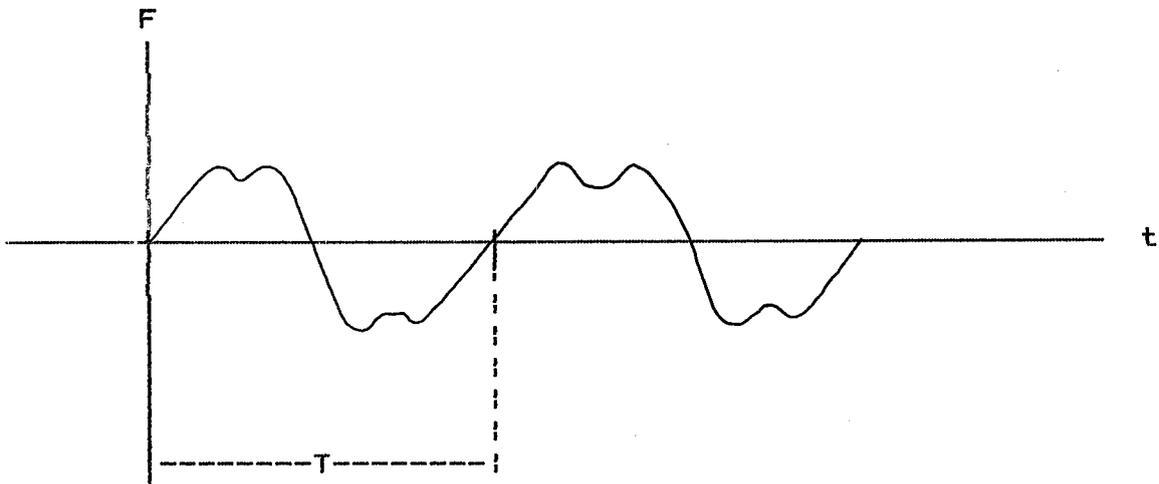
$$\frac{I_m \cdot \{X \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t}\}}{I_m \cdot \{F \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t}\}} = \frac{\tilde{X}}{\tilde{F}} = \frac{1}{(K - \omega_e^2 \cdot m) + i \cdot \omega_e \cdot c}$$

Como se ve, es este caso, la función de transferencia es una función compleja de ω_e , la cual caracteriza unívocamente al sistema.

Tal función de transferencia puede calcularse a partir de la medida de X , F_0 y ξ , o en otras palabras, del conocimiento de la respuesta permanente x_p del sistema para una excitación dada.

5-2.-VIBRACIONES CAUSADAS POR MOVIMIENTOS PERIODICOS CUALQUIERA

-En muchos casos los cuerpos están solicitados por fuerzas, o desplazamientos de la base, de tipo periódico, pero no armónico, como por ejemplo el movimiento periódico de la figura, de periodo T, que representa la variación de F(t)



Como sabemos, mediante el desarrollo en serie de Fourier, cualquier movimiento periódico puede descomponerse en una suma de movimientos armónicos, con tanta exactitud como se desee (según el nº de términos del desarrollo en serie que sean despreciados).

Como se recordará:

$$F(t) = F_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j \cdot \text{Cos} \left(\frac{2\pi j}{T} t \right) + B_j \cdot \text{Sen} \left(\frac{2\pi j}{T} t \right) \right]$$

Donde:

$$F_0 = 1/T \cdot \int_0^T F(t) \cdot dt$$

$$A_j = 2/T \cdot \int_0^T F(t) \cdot \text{Cos} (2\pi j/T)t \cdot dt$$

$$B_k = 2/T \cdot \int_0^T F(t) \cdot \text{Sen} (2\pi j/T)t \cdot dt$$

NOTA: Lo mismo podría hacerse si lo que se da es el movimiento de la base $y(t)$.

-En sistemas lineales, que son los que estamos tratando, se puede aplicar el principio de superposición, obteniendo la vibración total como la suma de la producida por todos y cada uno de los términos de la serie (que no sean despreciados).

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F_0$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = A_j \cdot \text{Cos} (2\pi j/T)t$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = B_j \cdot \text{Sen} (2\pi j/T)t$$

-Dejando de lado la respuesta en el régimen transitorio, la aplicación de esta serie de fuerzas de excitación, de periodos como se ve diferentes, a un sistema vibrante con K y c , dará lugar a un movimiento permanente del tipo:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{K} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1/K}{\sqrt{(1 - r_j^2)^2 + (2\xi \cdot r_j)^2}}$$

$$\cdot \left[A_j \cdot \text{Cos} [(2\pi j/T)t + \delta_j] + B_j \cdot \text{Sen} [(2\pi j/T)t + \delta_j] \right]$$

En donde:

$$\Gamma_j = (2\pi j/T)/\omega_n$$

$$\delta_j = \text{tag}^{-1} \frac{-2\xi \cdot \Gamma_j}{1 - \Gamma_j^2}$$

5-3-1.-VIBRACIONES EXCITADAS POR FUNCIONES ELEMENTALES:INTRODUCCION

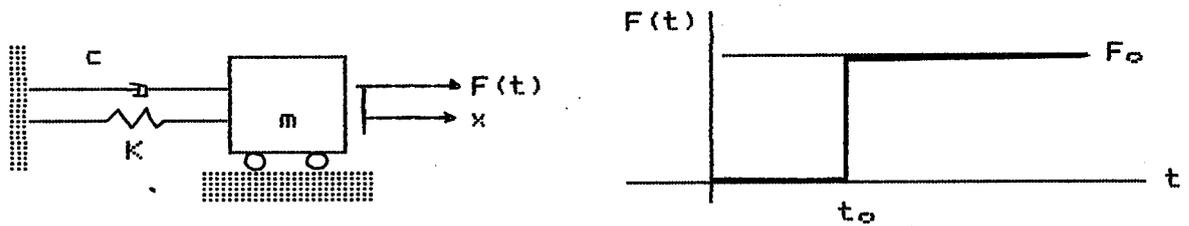
-Existe un caso interesante de vibraciones que se refiere a aquellas que se producen como respuesta a una fuerza no periódica, como puede ser el caso de un golpe, una explosión, un cortocircuito, etc.

-En este tipo de vibraciones, el periodo transitorio adquiere excepcional importancia.

-Aunque el estudio del régimen transitorio producido por fuerzas que no tienen una expresión analítica exacta es bastante complejo, en gran número de casos puede hacerse una simplificación, aproximando la fuerza mediante una serie de funciones simples, como pueden ser las funciones rampa, escalón, impulso, exponencial, etc.

(Por ejemplo una explosión puede asemejarse a una suma de dos exponenciales).

En el caso de que esta aproximación simple no sea adecuada, puede procederse a la combinación de funciones simples en fase o desfasadas, con lo cual se puede simular cualquier función real, por complicada que parezca, y estudiar la respuesta a la misma.

5-3-2.-FUNCION ESCALON

Si al sistema de 1 grado de libertad de la figura se le aplica, súbitamente, una fuerza constante F_0 , el sistema, en régimen permanente tenderá a una posición F_0/K .

Pero durante del periodo transitorio estará sometido a una vibración alrededor de este valor, que vamos a analizar.

La ecuación del movimiento será:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F_0 \quad [1]$$

Cuya solución es:

$$x(t) = e^{(-c/2m)t} \cdot (E \cdot \cos w_d \cdot t + G \cdot \text{Sen } w_d \cdot t) + F_0/K \quad [2]$$

Las constantes E y G se determinarán en función de las condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{array} \right.$$

Derivando [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (-c/2m) \cdot e^{(-c/2m)t} \cdot (E \cdot \cos w_d \cdot t + G \cdot \text{Sen } w_d \cdot t) + \\ & + e^{(-c/2m)t} \cdot (-w_d \cdot E \cdot \text{Sen } w_d \cdot t + w_d \cdot G \cdot \cos w_d \cdot t) \end{aligned}$$

Sustituyendo, queda:

$$x_0 = E + F_0/K \implies E = x_0 - F_0/K$$

$$\dot{x}_0 = (-c/2m) \cdot E + w_d \cdot G \implies G = \left[\dot{x}_0 + \frac{c}{2m} \cdot x_0 - \frac{c}{2m} \cdot \frac{F_0}{K} \right] \cdot \frac{1}{w_d}$$

Luego la expresión [2] queda:

$$x(t) = e^{(-c/2m)t} \cdot \left[\left[\dot{x}_0 + \frac{c}{2m} \cdot x_0 - \frac{c}{2m} \cdot \frac{F_0}{K} \right] \cdot \frac{1}{w_d} \cdot \text{Sen } w_d t + \right. \\ \left. + \left[x_0 - \frac{F_0}{K} \right] \cdot \text{Cos } w_d t \right] + F_0/K$$

Reordenando los términos, reparando aquellos en que aparecen las condiciones iniciales x_0 y \dot{x}_0 queda:

$$x(t) = e^{(-c/2m)t} \cdot \left[x_0 \cdot \text{Cos } w_d t + \frac{1}{w_d} \cdot \left[\dot{x}_0 + \frac{c}{2m} \cdot x_0 \right] \cdot \text{Sen } w_d t \right] - \\ - e^{(-c/2m)t} \cdot \left[\frac{F_0}{K} \cdot \text{Cos } w_d t + \frac{1}{w_d} \cdot \frac{c}{2m} \cdot \frac{F_0}{K} \cdot \text{Sen } w_d t \right] + F_0/K$$

[3]

Como se ve, esta expresión consta de tres sumandos:

-El primero es función de las condiciones iniciales, y su expresión es la debida a una vibración libre producida por las condiciones iniciales x_0 y \dot{x}_0 , de tipo transitorio.

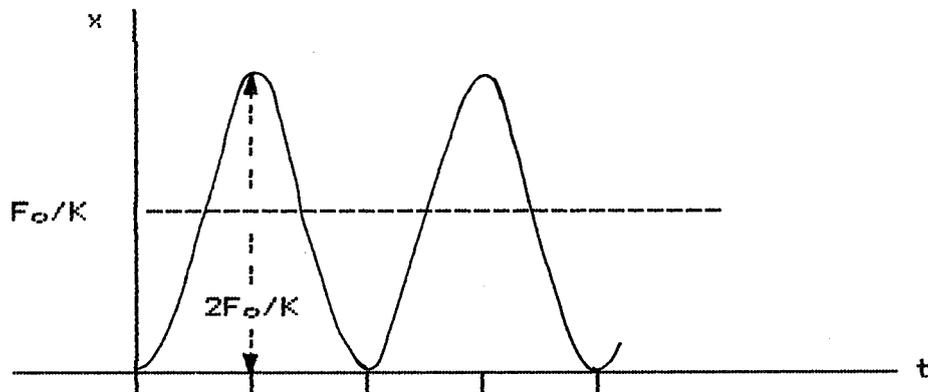
-El segundo término es el movimiento transitorio de respuesta a la función aplicada F_0 , cuando las condiciones iniciales son nulas.

-El tercero es la respuesta en el régimen permanente.

NOTA: Lo anterior significa también que la respuesta de un sistema lineal a una situación cualquiera, y con unas condiciones dadas x_0 y \dot{x}_0 se puede estudiar como la superposición de una respuesta libre a tales condiciones iniciales, más la respuesta del sistema a la excitación, con condiciones iniciales nulas.

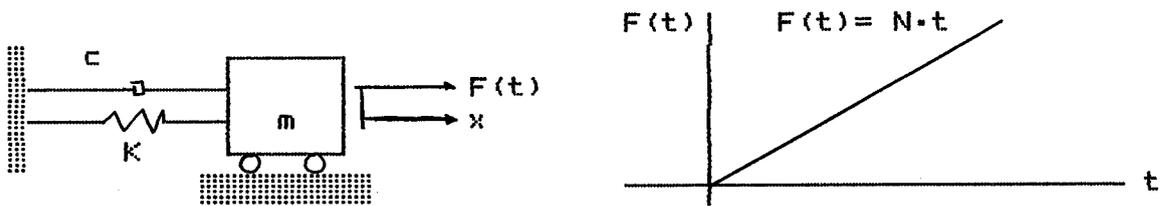
-En el caso de la aplicación de una función escalón, cuando $c = 0$; $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, tendremos:

$$x(t) = (F_0/K) \cdot (1 - \cos \omega_d t)$$



Como se ve, la respuesta del sistema es senoidal, con una amplitud doble de la correspondiente al desplazamiento estático.

(Lo cual da idea de la gravedad de aplicación de este tipo de cargas, sobre estructuras o miembros dimensionados solamente para resistir el esfuerzo F_0/K)

5-3-3.-FUNCION RAMPA

-Si al sistema de 1 grado de libertad de la figura se le aplica la fuerza constantemente creciente $F(t) = N \cdot t$ ($N = \text{cte.}$), su respuesta será la siguiente:

Ecuación del movimiento:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = N \cdot t \quad [1]$$

Usando una solución particular del tipo:

$$x(t) = R \cdot T + S \quad [2]$$

$$\dot{x}(t) = R$$

$$\ddot{x}(t) = 0$$

Sustituyendo en [1]

$$c \cdot R + K \cdot (R \cdot t + S) = N \cdot t$$

Igualando los términos en t y los términos independientes:

$$K \cdot R = N \implies R = N/K$$

$$c \cdot R + K \cdot S = 0 \implies S = -c \cdot N/K^2$$

Luego la respuesta completa será:

$$x(t) = e^{(-c/2m)t} \cdot (E \cdot \text{Cos } \omega_d \cdot t + G \cdot \text{Sen } \omega_d \cdot t) + \left[\frac{N}{K} \cdot t - \frac{c \cdot N}{K^2} \right]$$

[3]

Determinando E y G, en función de las condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{array} \right.$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{c}{2m} \cdot e^{(-c/2m)t} \cdot (E \cdot \cos w_d \cdot t + G \cdot \text{Sen } w_d \cdot t) +$$

$$+ e^{(-c/2m)t} \cdot (-E \cdot w_d \cdot \text{Sen } w_d \cdot t + E \cdot w_d \cdot \cos w_d \cdot t) + N/K$$

Sustituyendo y operando queda:

$$E = x_0 + (c \cdot N)/K$$

$$G = \frac{1}{w_d} \cdot \left[\dot{x}_0 + \frac{c}{2m} \cdot x_0 + \frac{c^2 \cdot N}{2m \cdot K^2} - \frac{N}{K} \right]$$

Con lo cual queda finalmente (agrupando los términos que contienen las condiciones iniciales):

$$x(t) = e^{(-c/2m)t} \cdot \left[x_0 \cdot \cos w_d t + \frac{1}{w_d} \cdot \left[\dot{x}_0 + \frac{c}{2m} \cdot x_0 \right] \cdot \text{Sen } w_d t \right] +$$

$$+ e^{(-c/2m)t} \cdot \left[\frac{c \cdot N}{K} \cdot \cos w_d t + \frac{1}{w_d} \cdot \left[\frac{c^2 \cdot N}{2m \cdot K^2} - \frac{N}{K} \right] \cdot \text{Sen } w_d t \right] +$$

$$+ \left[\frac{N}{K} \cdot t - \frac{c \cdot N}{K^2} \right]$$

que como vemos, también con tres sumandos:

- El primero, correspondiente al sistema libre, respondiendo a las condiciones iniciales x_0 y \dot{x}_0 (régimen transitorio).
- El segundo, correspondiente al sistema forzado, bajo condiciones iniciales nulas (régimen transitorio).

-El tercero, el término correspondiente al régimen permanente.

NOTA: Como se ve, los mismos términos que el caso anterior.

-En el caso particular en que:

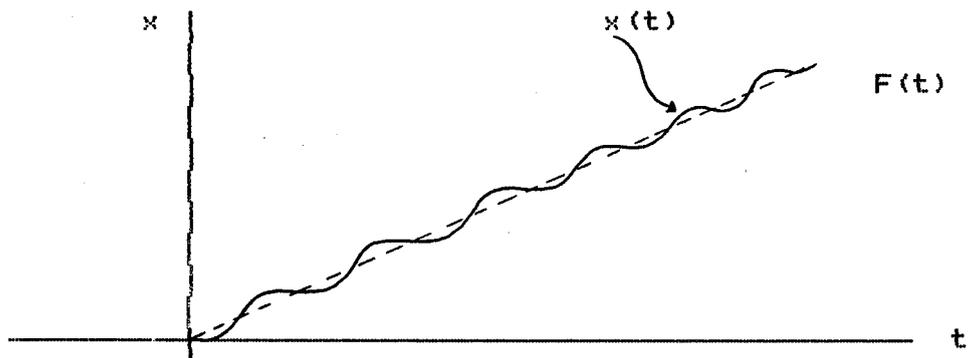
$$c = x_0 = \dot{x}_0 = 0$$

Tendremos:

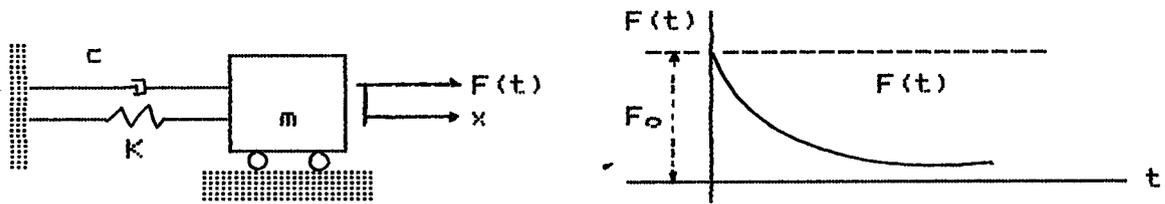
$$x(t) = -\frac{N}{\omega_n \cdot K} \cdot \text{Sen } \omega_n t + \frac{N}{K} \cdot t$$

$$x(t) = \frac{N}{K \cdot \omega_n} \cdot (\omega_n t - \text{Sen } \omega_n t)$$

La representación gráfica es la de la figura:



5-3-4.-EXPONENCIAL DECRECIENTE



$$F(t) = F_0 \cdot e^{-a \cdot t} \quad (a = \text{cte.})$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F_0 \cdot e^{-a \cdot t}$$

Ensayando la solución particular:

$$x(t) = R \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$\dot{x}(t) = -R \cdot a \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$\ddot{x}(t) = R \cdot a^2 \cdot e^{-a \cdot t}$$

Sustituyendo:

$$(m \cdot a^2 - c \cdot a + K) \cdot R \cdot e^{-a \cdot t} = F_0 \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$R = \frac{F_0}{m \cdot a^2 - c \cdot a + K}$$

La solución general será:

$$x(t) = e^{(-c/2m)t} \cdot (E \cdot \cos w_d \cdot t + G \cdot \text{Sen } w_d \cdot t) +$$

$$+ \frac{F_0}{m \cdot a^2 - c \cdot a + K} \cdot e^{-a \cdot t}$$

Para las condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ x = x_0 \end{array} \right.$$

Calcularemos E y G, pudiendo escribir:

$$x(t) = e^{-(c/2m)t} \cdot \left[x_0 \cdot \cos w_d t + \frac{1}{w_d} \cdot \left[\dot{x}_0 + \frac{c}{2m} \cdot x_0 \right] \cdot \text{Sen } w_d t \right] -$$

$$- e^{-(c/2m)t} \cdot \left[\cos w_d t - \frac{a - (c/2m)}{w_d} \cdot \text{Sen } w_d t \right] \cdot \frac{F_0}{m \cdot a^2 - c \cdot a + K} +$$

$$+ \frac{F_0}{m \cdot a^2 - c \cdot a + K} \cdot e^{-a \cdot t}$$

NOTA: Como se ve, los mismos tres términos de antes.

-En el caso de amortiguamiento y condiciones iniciales nulas:

$$c = x_0 = \dot{x}_0 = 0$$

la ecuación será:

$$x(t) = \frac{F_0}{m \cdot a^2 + K} \cdot (-\cos w_n t + \frac{a}{w_n} \cdot \text{Sen } w_n t + e^{-a \cdot t})$$

Según sea el valor de \underline{a} , se pueden dar tres casos:

a).- $a \longrightarrow 0$

La exponencial decae lentamente, y la respuesta se parece a la de la función escalón:

$$x(t) \approx \frac{F_0}{K} \cdot (1 - \text{Cos } \omega_n t)$$

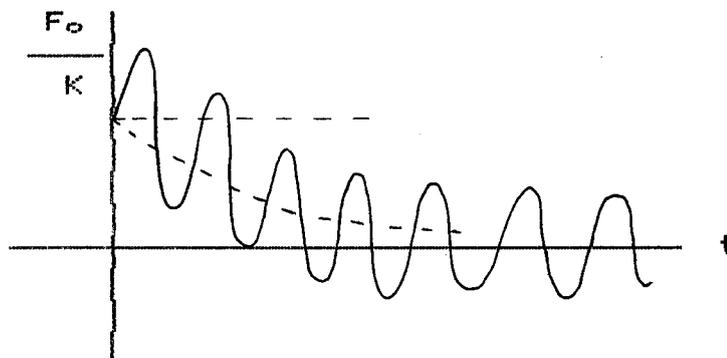
b).- $a \longrightarrow \infty$

La exponencial decae casi instantáneamente. El impulso que recibe la masa, bajo la acción de esta fuerza, $F \cdot t \longrightarrow 0$ (área bajo la curva casi nula). Si el impulso es casi cero, tampoco comunicará velocidad a la masa:

$$m \cdot \Delta V = F \cdot t \approx 0$$

Con lo cual el sistema permanecerá prácticamente en la misma situación que antes de aplicarle la fuerza.

c).- En el caso intermedio, con un valor finito de \underline{a} , el sistema oscila con unos valores máximos decrecientes, como se ve en la figura:



Se alcanza el régimen permanente cuando $e^{-a \cdot t} \longrightarrow 0$.

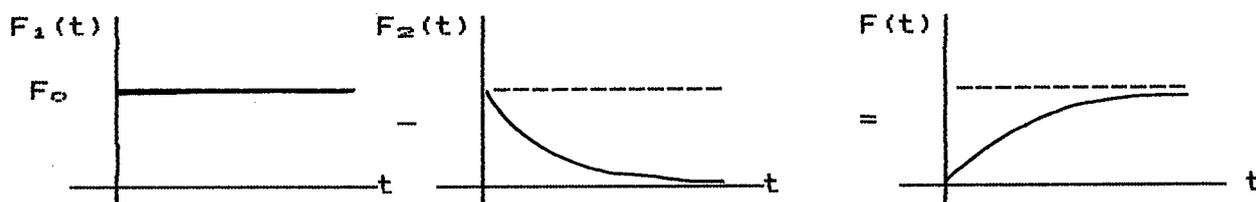
$x(t) = 0$ es el valor medio de x en ese régimen.

El movimiento es la superposición de un armónico y otro exponencial.

$$x(t) = \frac{F_0}{a \cdot a^2 + K} \cdot (-\cos \omega_n t + \frac{a}{\omega_n} \cdot \text{Sen } \omega_n t) + \frac{F_0}{a \cdot a^2 + K} \cdot e^{-a \cdot t}$$

5-3-5.-FUNCION DIFERENCIA DE IMPULSO RECTANGULAR (ESCALON) MENOS EXPONENCIAL DECRECIENTE.-

-Como se ve claramente en la figura, la diferencia es una exponencial creciente:



$$F_1(t) = F_0 \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$F_2(t) = F_0$$

$$F(t) = F_1(t) - F_2(t) = F_0(1 - e^{-a \cdot t})$$

$$F(t) = F_0(1 - e^{-a \cdot t})$$

[1]

NOTA: Esta es una función típica de la variación de temperatura que se produce en un cuerpo al introducirlo en un baño caliente. Mediante ella se puede estudiar la respuesta a esfuerzos térmicos por calentamiento repentino.

-En el caso de sistemas lineales, puede aplicarse el principio de superposición, considerando la respuesta del sistema como la diferencia de las respuestas a las funciones F_1 y F_2 , por separado. En cada una de ellas, considerando sus dos términos: uno correspondiente a las condiciones iniciales nulas, y el otro, al correspondiente a las condiciones iniciales x_0 , \dot{x}_0 . Como es lógico, la diferencia

habrá de tener dos términos: uno debido a las condiciones iniciales x_0 y \dot{x}_0 , y otro debido a la excitación, en condiciones iniciales nulas.

En consecuencia, teniendo en cuenta los valores anteriores, la respuesta total será:

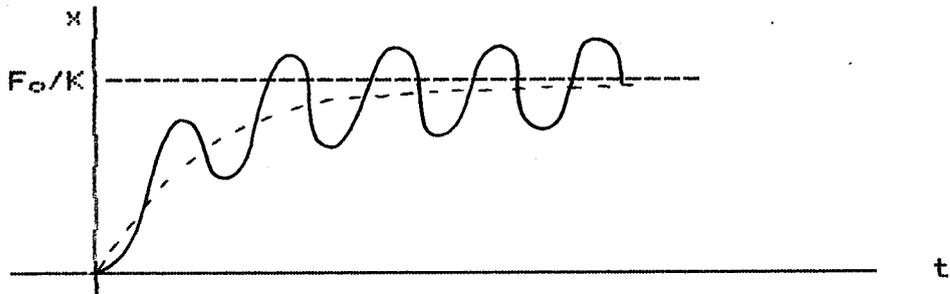
$$\begin{aligned}
 x(t) = & e^{(-c/2m)t} \left[x_0 \cdot \cos w_d t + \frac{1}{w_d} \left[\dot{x}_0 + \frac{c}{2m} x_0 \right] \cdot \text{Sen } w_d t \right] - \\
 & - e^{(-c/2m)t} \left[\frac{F_0}{K} \cdot \cos w_d t + \frac{1}{w_d} \cdot \frac{c}{2m} \cdot \frac{F_0}{K} \cdot \text{Sen } w_d t \right] + \\
 & + \frac{F_0}{K} + \\
 & + e^{(-c/2m)t} \frac{F_0}{m \cdot a^2 - c \cdot a + K} \left[\cos w_d t - \frac{a - \frac{c}{2m}}{w_d} \cdot \text{Sen } w_d t \right] - \\
 & - \frac{F_0 \cdot e^{-a \cdot t}}{m \cdot a^2 - c \cdot a + K}
 \end{aligned}$$

En el caso en que $c = \dot{x}_0 = x_0 = 0$

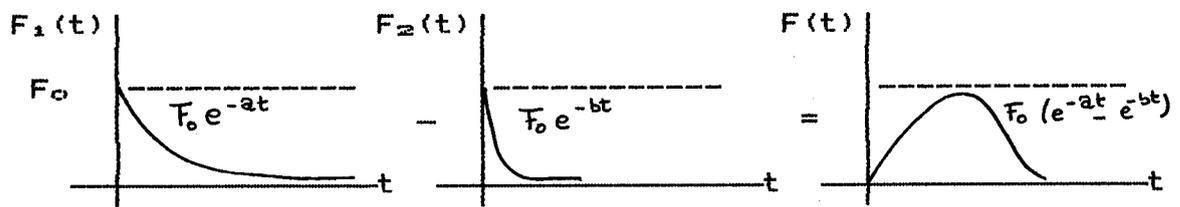
$$x(t) = \frac{F_0}{K} \cdot (1 - \cos w_n t) + \frac{F_0}{m \cdot a^2 + K} \left[\cos w_n t - \frac{a}{w_n} \cdot \text{Sen } w_n t - e^{-a \cdot t} \right]$$

$$x(t) = - \frac{F_0}{K} \cdot \frac{\frac{a^2}{w_n}}{1 + \frac{a^2}{w_n}} \cdot \cos w_n t - \frac{F_0}{K} \cdot \frac{\frac{a^2}{w_n}}{1 + \frac{a^2}{w_n}} \cdot \text{Sen } w_n t + \frac{F_0}{K} + \left[\frac{e^{-a \cdot t}}{1 + \frac{a^2}{w_n}} \right]$$

Cuya representación gráfica es la de la figura:



- Combinación de dos funciones exponenciales. -



$$F_1(t) = F_0 \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$F_2(t) = F_0 \cdot e^{-b \cdot t}$$

$$F = F_1 - F_2 = F_0(e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$$

Aplicando el principio de superposición, considerando la respuesta la debida a unas condiciones iniciales x_0 , \dot{x}_0 , más la debida a la diferencia entre las respuestas a las dos excitaciones F_1 y F_2 , tendremos:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & e^{(-c/2m) \cdot t} \left[x_0 \cdot \cos w_d t + \frac{1}{w_d} \cdot \left[\dot{x}_0 + \frac{c}{2m} \cdot x_0 \right] \cdot \text{Sen } w_d t \right] - \\
 & + e^{(-c/2m) \cdot t} \frac{F_0}{m \cdot a^2 - c \cdot a + K} \left[\cos w_d t - \frac{a - \frac{c}{m}}{w_d} \cdot \text{Sen } w_d t \right] + \\
 & + \frac{F_0}{m \cdot a^2 - c \cdot a + K} \cdot e^{-a \cdot t} \\
 & + e^{(-c/2m) \cdot t} \frac{F_0}{m \cdot b^2 - c \cdot b + K} \left[\cos w_d t - \frac{b - \frac{c}{m}}{w_d} \cdot \text{Sen } w_d t \right] - \\
 & - \frac{F_0}{m \cdot b^2 - c \cdot b + K} \cdot e^{-b \cdot t}
 \end{aligned}$$

Para el caso en que $c = x_0 = \dot{x}_0 = 0$

$$x(t) = \frac{F_0}{m \cdot a^2 + K} \cdot \left[\frac{a}{\omega_n} \cdot \text{Sen } \omega_n t - \text{Cos } \omega_n t + e^{-a \cdot t} \right] -$$

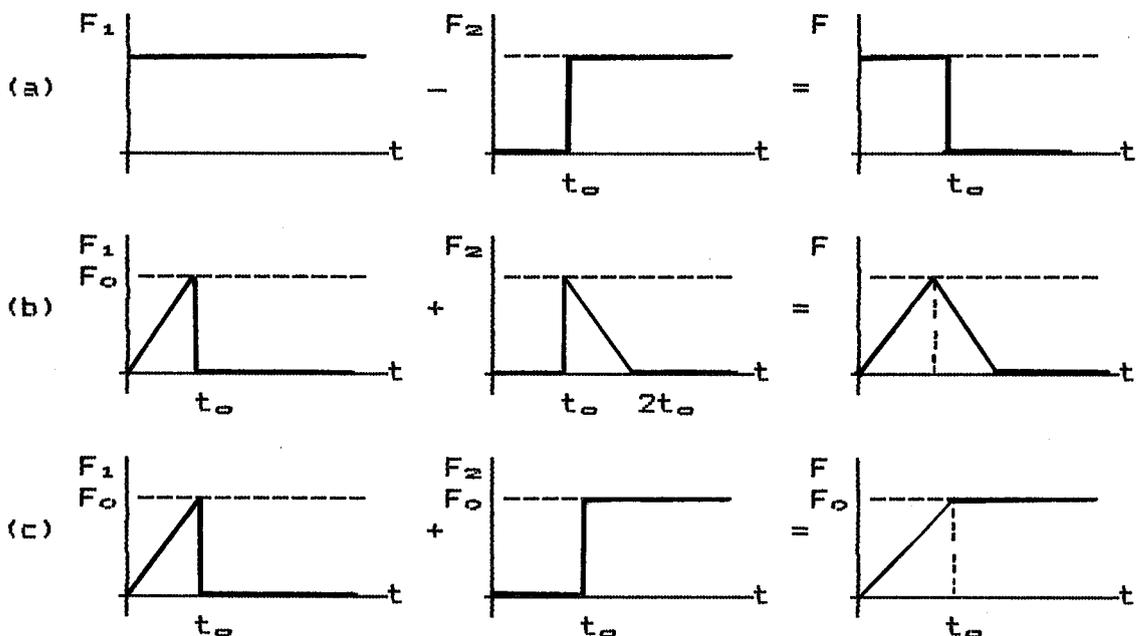
$$+ \frac{F_0}{m \cdot b^2 + K} \cdot \left[\frac{b}{\omega_n} \cdot \text{Sen } \omega_n t - \text{Cos } \omega_n t + e^{-b \cdot t} \right]$$

- Funciones sucesivas. -

-En los casos en que la función fuerza (real) actuante (en un periodo transitorio) no se pueda aproximar a base de sumas o diferencias de funciones simples que actúen simultáneamente, como son los casos vistos hasta ahora, puede realizarse una aproximación mayor tomando las funciones simples a sumar con un cierto desfase entre sí.

-En estos casos no puede aplicarse el principio de superposición, tal como hacíamos antes. Lo que se hace es calcular la respuesta a la primera función. Luego los valores de esta respuesta en el instante en que se aplica la segunda función se toman como condiciones iniciales para el cálculo de la respuesta de esta segunda, y así sucesivamente.

-Las figuras representan algunos casos:



Por ejemplo, en el caso (c) se calcula la respuesta a la función $F_1(t)$, hasta el instante $t = t_0$; (o sea, $x_0(t_0)$ y $\dot{x}_0(t_0)$).

Estos valores de $x_0(t_0)$ y $\dot{x}_0(t_0)$ se toman como condiciones iniciales para el cálculo de la respuesta a $F_2(t)$, respuesta que se producirá a partir de $t = t_0$.

5-3-6.-RESPUESTA DE UN SISTEMA A UNA FUNCION IMPULSO

-Una fuerza impulsiva es aquella que teniendo una magnitud F , actúa en un tiempo muy corto Δt .

Como sabemos, el impulso de la fuerza hace variar la cantidad de movimiento del sistema.

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \dot{x}_2 - m \cdot \dot{x}_1$$

siendo \dot{x}_2 y \dot{x}_1 las velocidades respectivas de la masa m , a la cual se aplicó el impulso, después y antes de este.

Llamando I a la magnitud de impulso,

$$I = F \cdot \Delta t$$

podemos escribir en términos generales:

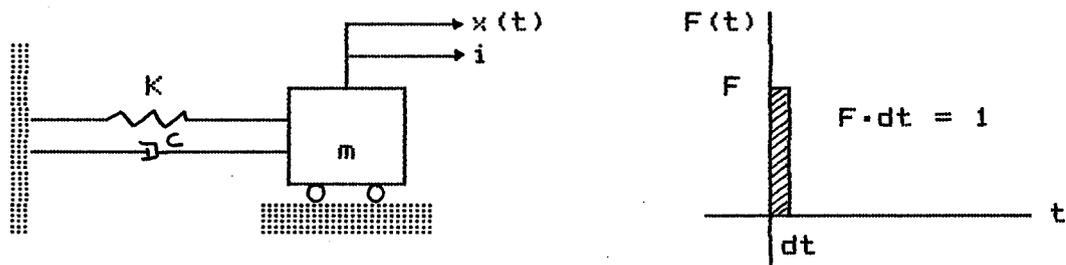
$$I = \int_t^{t+\Delta t} F \cdot dt$$

Se define el impulso unidad por la expresión:

$$i = \lim_{\Delta dt \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} F \cdot dt = F \cdot dt = 1$$

(según esto, el impulso unidad es el producido por una fuerza cuyo módulo tiende a infinito, durante un tiempo que tiende a cero. Su producto es la unidad)

-Teniendo lo anterior en cuenta, vamos a calcular la respuesta del sistema de la figura (suponiendo que está subamortiguado) a la función impulso unidad, en $t = 0$



La ecuación del sistema será:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F \cdot dt$$

Como la duración de la aplicación de la fuerza tienda a cero, el sistema vibrará como libre, aún cuando las condiciones iniciales se verán modificadas por el impulso aplicado.

En efecto, si $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ antes del impulso, el impulso en $t = 0$ producirá un cambio de velocidad dado por:

$$F \cdot dt = i = 1 = m \cdot \dot{x} \cdot (t = 0^+) - m \cdot \dot{x} \cdot (t = 0^-)$$

(Siendo $t = 0^+$ el tiempo al final del impulso y $t = 0^-$ el tiempo al inicio del mismo)

Entonces, $1 = m \cdot \dot{x} \implies \dot{x}_0 = \frac{1}{m}$ siendo \dot{x}_0 la velocidad al

del impulso, o la que es igual, la velocidad inicial del sistema considerado libre. Como por otra parte un impulso produce un cambio en la velocidad, pero sin cambio

apreciable en el desplazamiento, por ser el tiempo muy corto. Tendremos finalmente como condiciones iniciales del sistema libre:

$$t = 0^+ \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 = 0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = 1/m \end{array} \right.$$

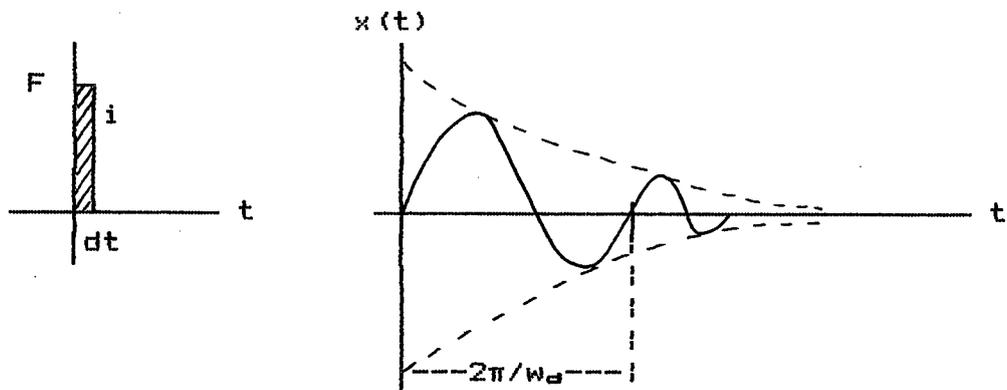
Como la solución del sistema libre era del tipo:

$$x(t) = e^{(-c/2m)t} \left[x_0 \cdot \cos w_d t + \left[\frac{\dot{x}_0}{w_d} + \frac{c \cdot x_0}{2m \cdot w_d} \right] \cdot \text{Sen } w_d t \right]$$

Sustituyendo estas condiciones iniciales, queda:

$$x(t) = e^{(-c/2m)t} \cdot (1/m \cdot w_d) \cdot \text{Sen } w_d t$$

Que como se ve es una senoide amortiguada.



La respuesta al impulso unidad se le conoce por $h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{m} \cdot \frac{e^{(-c/2m)t}}{w_d} \cdot \text{Sen } w_d t$$

-Si el impulso no es unitario, sino de magnitud I , la respuesta vendrá dada en función de las nuevas condiciones iniciales:

$$t = 0^+ \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 = 0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = I/m \end{array} \right.$$

Con lo cual:

$$x(t) = \frac{I}{m} \cdot \frac{e^{(-c/2m)t}}{\omega_d} \cdot \text{Sen } \omega_d t$$

Es decir, la respuesta a un impulso I cualquiera puede ponerse en función de la respuesta al impulso unidad.

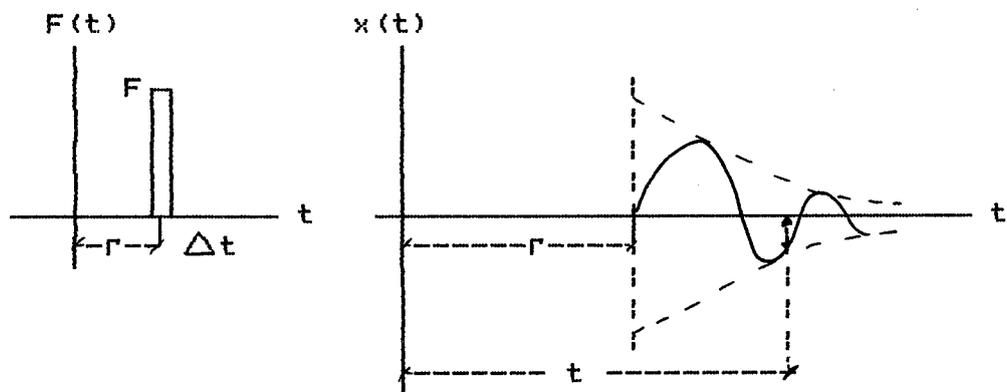
$$x(t) = I \cdot h(t)$$

NOTA: Si en el momento de aplicar el impulso I el sistema tuviera unas condiciones iniciales x_0 y \dot{x}_0 , la respuesta sería:

$$x(t) = e^{(-c/2m)t} \left[x_0 \cdot \text{Cos } \omega_d t + \frac{1}{\omega_d} \left[\dot{x}_0 + \frac{c \cdot x_0}{2m} \right] \cdot \text{Sen } \omega_d t \right] + \frac{I}{m} \cdot \frac{e^{(-c/2m)t}}{\omega_d} \cdot \text{Sen } \omega_d t$$

En donde el primer sumando representa la respuesta del sistema libre bajo las condiciones iniciales anteriores al impulso, y el segundo la respuesta al impulso con condiciones iniciales nulas.

NOTA: Si el impulso de módulo I es aplicado en un tiempo $t = r$ cualquiera:



La respuesta al cabo de cierto tiempo t , contado también a partir del origen de tiempos, puede expresarse:

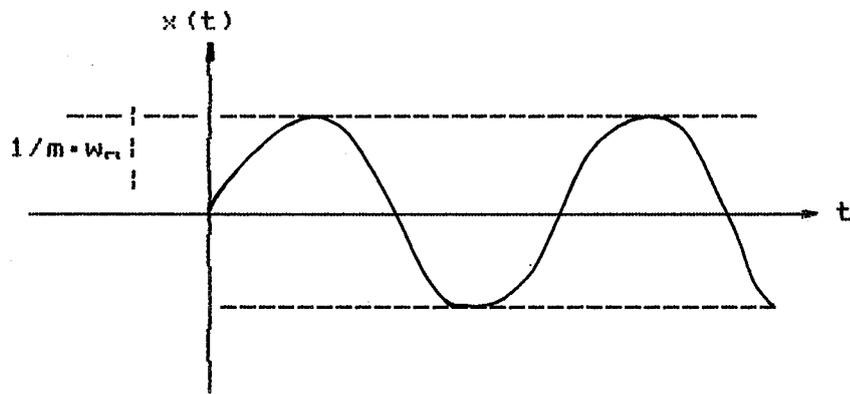
$$x(t) = I \cdot h(t - r)$$

siendo:

$$h(t - r) = \frac{1}{m} \cdot \frac{e^{(-c/2m) \cdot (t - r)}}{\omega_d} \cdot \text{Sen} [\omega_d \cdot (t - r)]$$

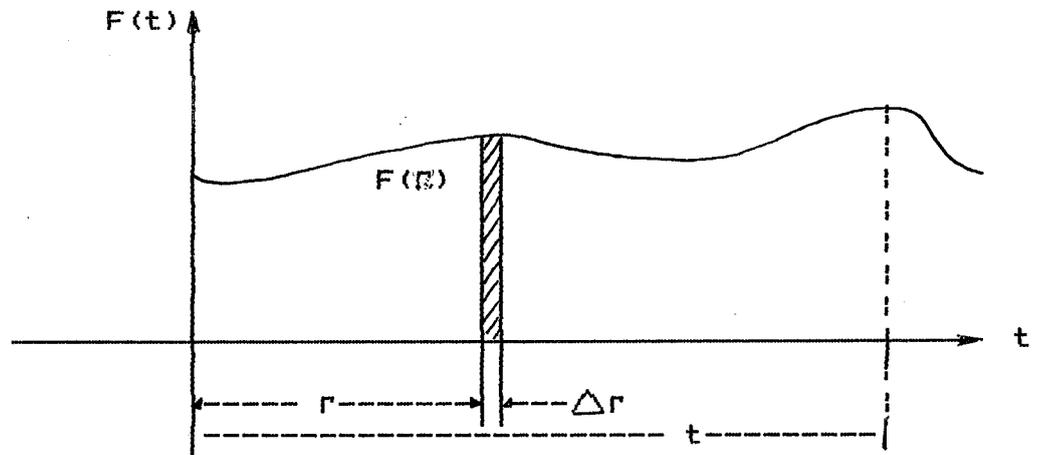
En donde como se ve se ha reemplazado t por $t - r$, que es el tiempo medido a partir de la aplicación del impulso.

NOTA: En la figura se representa la respuesta de un sistema a un impulso unidad, en $t = 0$, $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, sin amortiguamiento.



5-4.-RESPUESTA A UNA FUNCION CUALQUIERA. INTEGRAL DE DUHAMEL O DE CONVOLUCION

-Sea $F(t)$ la fuerza que actúa sobre un sistema, y cuya gráfica contra el tiempo se muestra en la figura.



-Es evidente que la acción de la fuerza $F(t)$ durante el tiempo t , es la misma que la suma de las fuerzas $F(r)$ actuando en el tiempo Δr .

-Como el sistema al que aplicamos esta fuerza (masa-resorte-amortiguador) es lineal, podremos aplicar el principio de superposición. De esta forma, la respuesta del sistema a la fuerza $F(t)$, actuando durante un tiempo t , será la suma de las respuestas a los sucesivos impulsos $F(r) \cdot \Delta r$.

-La respuesta al impulso j será:

$$x_j(t) = F(r_j) \cdot \Delta r_j \cdot h(t - r_j)$$

La respuesta total será la suma:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n F(r_j) \cdot \Delta r_j \cdot h(t - r_j)$$

Haciendo tender $\Delta r \rightarrow 0$, se tendrá:

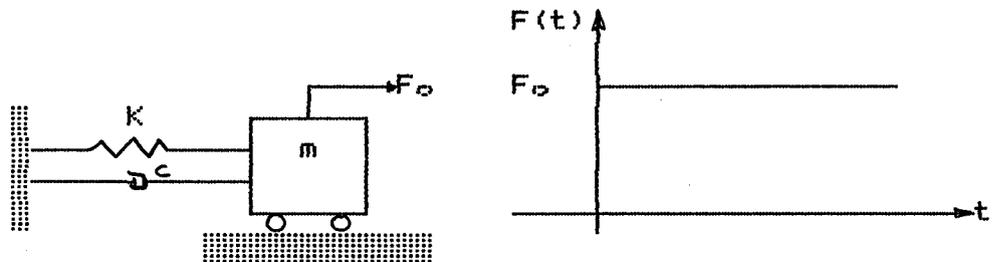
$$x(t) = \int_0^t F(r) \cdot h(t-r) \cdot dr$$

y teniendo en cuenta el valor de $h(t-r)$ queda como respuesta del sistema (en condiciones iniciales nulas)

$$x(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_d} \int_0^t F(r) \cdot e^{-(c/2m)(t-r)} \cdot \text{Sen} [\omega_d(t-r)] \cdot dr$$

La anterior integral se llama de "convolución" o de Duhamel.

EJEMPLO: Calcular la respuesta del sistema a la función escalón $F(t) = F_0$



La ecuación de convolución es en este caso:

$$x(t) = \frac{F_0}{m \cdot \omega_d} \int_0^t e^{-(c/2m)(t-r)} \cdot \text{Sen} [\omega_d(t-r)] \cdot dr$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m \cdot \omega_d} \left[e^{-(c/2m)(t-r)} \cdot \frac{(c/2m) \cdot \text{Sen} \omega_d(t-r) + \omega_d \cdot \text{Cos} \omega_d(t-r)}{(c/2m)^2 + \omega_d^2} \right]_{r=0}^t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{K \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} \cdot [\sqrt{1-\zeta^2} - e^{-(c/2m)t} \cdot \text{Cos} (\omega_d t - \theta)]$$

Siendo $\delta = \text{tag}^{-1} (\xi / \sqrt{1 - \xi^2})$

$$x(t) = \frac{F_0}{K} - e^{-(c/2m)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \text{Cos} (\omega_d t - \delta)$$

6.-CALCULO DE LA RESPUESTA POR METODOS NUMERICOS

El cálculo de la respuesta de un sistema bajo una fuerza $F(t)$ no resulta nada sencillo, especialmente si esta fuerza $F(t)$ no viene dada por una función analítica sencilla. En este caso, es preferible recurrir a métodos numéricos, de los cuales vamos a ver dos:

a.- Método de la diferencia central

b.- Método de Runge Kutta

Ambos permiten resolver la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

Para unas condiciones iniciales conocidas:

$$x_1 = x(0)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}(0)$$

En el primer método la ecuación diferencial es integrada sin cambio de forma.

En el segundo, se hace un arreglo antes de la integración, reduciéndola a dos ecuaciones de primer orden:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = f(x, y, t)$$

a.-Método de la diferencia central

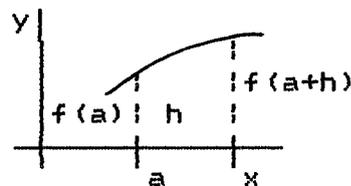
1.-Sistema no amortiguado

$$\ddot{x} = f(x, t) \quad [1] \quad (F(t) \text{ es la f. aplicada})$$

$$x_1 = x(0)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}(0)$$

Aplicando la formula de Taylor

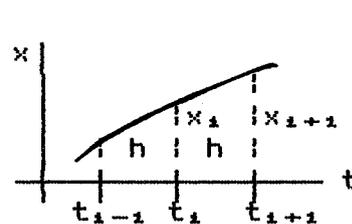


$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} \cdot f^n(a)$$

Siendo $x - a = h$

$$f(x) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots$$

para los valores x_{i+1} y x_{i-1} , referentes al valor central x_i



$$x_{i+1} = x_i + h \cdot \dot{x}_i + \frac{h^2}{2} \cdot \ddot{x}_i + \dots$$

$$x_{i-1} = x_i - h \cdot \dot{x}_i + \frac{h^2}{2} \cdot \ddot{x}_i - \dots$$

donde $h = \Delta t$

Como es lógico, podemos ignorar los términos superiores a h^2 (o sea, incrementos de tiempo Δt^3 , etc.)

$$\text{Restando: } \dot{x}_i = \frac{1}{2\Delta t} \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) \quad [2]$$

$$\text{Sumando: } \ddot{x}_i = \frac{1}{(\Delta t)^2} \cdot (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) \quad [3]$$

Sustituyendo [3] en [1] y reordenando:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + (\Delta t)^2 \cdot f(x_i, t_i) \quad [4]$$

dibiendo ser $i \geq 2$

(Esta es la llamada "formula de recurrencia", y permite hallar x_{i+1} , conocidas x_i, x_{i-1} y $f(x_i, t_i)$).

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_i$$

Como se observa, si hacemos $i = 2$, la formula nos da x_3 , pero necesitamos conocer x_2 . Para iniciar el cálculo se necesita, pues, otra ecuación para x_2 . Tal puede ser la ecuación:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \dot{x}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \ddot{x}_i$$

$$x_2 = x_1 + \Delta t \cdot \dot{x}_1 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot f(x_1, t_1) \quad [5]$$

Entonces ya se pueden hallar x_3, x_4, \dots correspondientes a t_3, t_4, t_5, \dots

Para tomar el valor Δt que dé mínimos errores, puede hacerse

$$\Delta t \leq T/10 \quad T = \text{periodo natural} = 2\pi \cdot \sqrt{m/K}$$

2.-Condiciones iniciales cero

$$\text{Si } x_1 = \dot{x}_1 = \ddot{x}_1 = 0 \quad \text{y} \quad F(0) = 0,$$

los cálculos, evidentemente, no pueden iniciarse. Para evitarlo, podemos suponer que la aceleración, en el primer intervalo de tiempo Δt_1 , varía linealmente (entre $\ddot{x}_1 = 0$ hasta \ddot{x}_2), en la forma:

$$\ddot{x} = \alpha \cdot t$$

$$\text{Integrando: } \dot{x} = \alpha \cdot t^2 / 2 \quad ; \quad x = \alpha \cdot t^3 / 6$$

Como en la primera ecuación $t \equiv \Delta t$

resulta:

$$\dot{x}_2 = \frac{\Delta t}{2} \cdot \ddot{x}_2 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{(\Delta t)^2}{6} \cdot \ddot{x}_2$$

sustituyendo estos valores en $\ddot{x} = f(x, t)$, con $t_2 = \Delta t$, nos permite hallar \ddot{x}_2 y x_2

3.-Sistema amortiguado

En este caso, la formula de recurrencia será:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + (\Delta t)^2 \cdot f(x_i, x_i, t_i) \quad i \geq 2$$

En primer lugar, hallamos x_2 por la expresión:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \dot{x}_1 \cdot \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \ddot{x}_1 = \\ &= x_1 + \dot{x}_1 \cdot \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot f(x_1, x_1, t_1) \end{aligned}$$

El valor de \dot{x}_2 se halla de [5]

$$x_2 = x_1 + \dot{x}_2 \cdot \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot f(x_2, \dot{x}_2, t_2)$$

Con estos resultados puede calcularse x_3 con la formula de recurrencia anterior. De igual forma se continuarían hallando x_4, x_5, \dots

b.-Método de Runge Kutta

Sistemas amortiguados y excitados

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t)$$

El sistema se puede transformar en:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot [F(t) - K \cdot x - c \cdot \dot{x}] = f(x, \dot{x}, t)$$

Haciendo $\dot{x} = y$, la ecuación anterior equivale al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y, t) \end{cases}$$

Si tanto x como y son funciones continuas, ambas se pueden desarrollar en serie de Taylor (para intervalos de tiempo Δt)

$$x = x_1 + \left[\frac{dx}{dt} \right]_1 \Delta t + \left[\frac{d^2x}{dt^2} \right]_1 \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \dots$$

$$y = y_1 + \left[\frac{dy}{dt} \right]_1 \Delta t + \left[\frac{d^2y}{dt^2} \right]_1 \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \dots$$

Despreciando los valores de Δt^2 , y siguientes y reemplazando las primeras derivadas en i por la pendiente media del intervalo:

$$x = x_i + \left[\frac{dx}{dt} \right]_{i \text{ (media)}} \cdot \Delta t$$

$$y = y_i + \left[\frac{dy}{dt} \right]_{i \text{ (media)}} \cdot \Delta t$$

Teniendo en cuenta la regla de Simpson, la pendiente media en el intervalo Δt será:

$$\left[\frac{dy}{dt} \right]_{i \text{ (media)}} = \frac{1}{6} \cdot \left[\left[\frac{dy}{dt} \right]_{t_i} + 4 \cdot \left[\frac{dy}{dt} \right]_{t_i + \Delta t / 2} + \left[\frac{dy}{dt} \right]_{t_i + \Delta t} \right]$$

El método de Runge-Kutta descompone el término central de la expresión anterior en dos términos, y calcula cuatro valores de t , y , x y f por cada punto i , como sigue:

t	x	$y = \dot{x}$	$f = \dot{y} = \ddot{x}$
$T_1 = t_i$	$X_1 = x_i$	$Y_1 = y_i$	$F_1 = f(T_1, x_1, Y_1)$
$T_2 = t_i + \frac{\Delta t}{2}$	$X_2 = x_i + Y_1 \cdot \frac{\Delta t}{2}$	$Y_2 = y_i + F_1 \cdot \frac{\Delta t}{2}$	$F_2 = f(T_2, x_2, Y_2)$
$T_3 = t_i + \frac{\Delta t}{2}$	$X_3 = x_i + Y_2 \cdot \frac{\Delta t}{2}$	$Y_3 = y_i + F_2 \cdot \frac{\Delta t}{2}$	$F_3 = f(T_3, x_3, Y_3)$
$T_4 = t_i + \Delta t$	$X_4 = x_i + Y_3 \cdot \Delta t$	$Y_4 = y_i + F_3 \cdot \Delta t$	$F_4 = f(T_4, x_4, Y_4)$

Estas expresiones se emplean luego en las siguientes dos funciones de recurrencia:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{6} \cdot [Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + Y_4] \quad [a]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{6} \cdot [F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4] \quad [b]$$

en donde $\frac{\Delta t}{6} \cdot [Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + Y_4]$ representan la

pendiente media dx/dt , y similarmente,

$\frac{\Delta t}{6} \cdot [F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4]$, la pendiente media $\frac{dy}{dt}$

De igual forma se hallarán $x_3, x_4 \dots$

APLICACIONES PRACTICAS DE VIBRACIONES DE SISTEMAS CON 1 GDL

1.- Sistemas masa-resorte

1-1.- Vibraciones excitadas por rotores desequilibrados

1-2.- Vibraciones excitadas por máquinas alternativas

1-3.- Vibraciones producidas por movimientos de la base

1-3-1.- Caso general

1-3-2.- Vibraciones en automóviles

1-4.- Vibraciones excitadas en sistemas con rigidez amortiguada

1-5.- Transmisibilidad de las vibraciones sobre soportes fijos

1-6.- Generalidades sobre los instrumentos para la medida de las vibraciones

1-7.- Aislamiento de las vibraciones

2.- Sistemas de torsión

2-1.- Vibraciones de torsión en ejes

2-2.- Calculo del momento polar de inercia de un cuerpo

2-3.- Amortiguadores de torsión

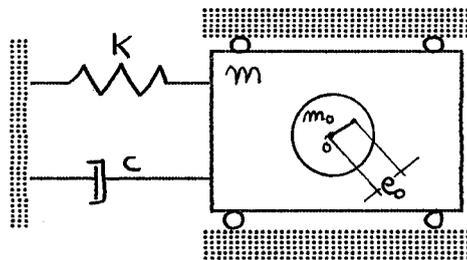
3.- Sistemas de flexión

3-2.- Vibraciones de flexión en vigas

1.- SISTEMAS MASA-RESORTE

1-1.- VIBRACIONES CAUSADAS POR ROTORES DESEQUELIBRADOS

En máquinas rotatorias (con elementos rotatorios) se presenta frecuentemente este tipo de vibración, originado por el desequilibrio dinámico de tales masas. (Cuando el c.d.g. no coincide con el centro de giro).



Supongamos que sea m masa total del sistema y m_0 la masa del rotor desequilibrado, que gira con ω_e .

Sea e_0 el desplazamiento del c.d.g. respecto del eje de giro.

La fuerza debida a la inercia tendrá por expresión:

$$F_1 = m_0 \cdot \omega_e^2 \cdot e_0 \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t}$$

donde la parte real de este vector rotatorio puede representar las fuerzas horizontales.

Las fuerzas verticales, dado que el sistema tiene un solo grado de libertad, no habrá que considerarlas.

En consecuencia, la ecuación del movimiento del sistema de masa m , sometido a la fuerza excitadores F_1 , será, como hemos visto:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = R_0 \left[m_0 \cdot \omega_e^2 \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} \right]$$

Expresión en la que sólo habrá que considerar la parte real del 2º miembro.

Como sabemos la solución de este ecuación diferencial será la de la homogénea, más una particular.

Dejando de lado el periodo transitorio, que corresponde a una vibración libre amortiguada de frecuencia w_d , el movimiento permanente será del tipo:

$$x_p(t) = X \cdot e^{i(w_e \cdot t + \alpha)}$$

siendo exactamente igual que el estudiado para vibraciones forzada, por una fuerza armónica $F(t) = m_0 \cdot w_e^2 \cdot e_0$

Como se vió allí,

$$\begin{aligned} X &= \frac{F_0/K}{\sqrt{\left[1 - \left[\frac{w_e}{w_n}\right]^2\right]^2 + \left[2\xi \cdot \frac{w_e}{w_n}\right]^2}} = \\ &= \frac{F_0/K}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} \end{aligned}$$

$$\delta = \text{tag}^{-1} \frac{-2\xi \cdot r}{1 - r^2}$$

Por lo que en nuestro caso será:

$$X = \frac{m_0 \cdot w_e^2 \cdot e_0}{K \cdot \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}}$$

también puede ponerse ($w_n^2 = K/m$)

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_0 \cdot w_e^2 \cdot e_0}{m \cdot w_n^2 \cdot \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} = \\ &= \frac{m_0/m \cdot r^2 \cdot e_0}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} \end{aligned}$$

de donde:

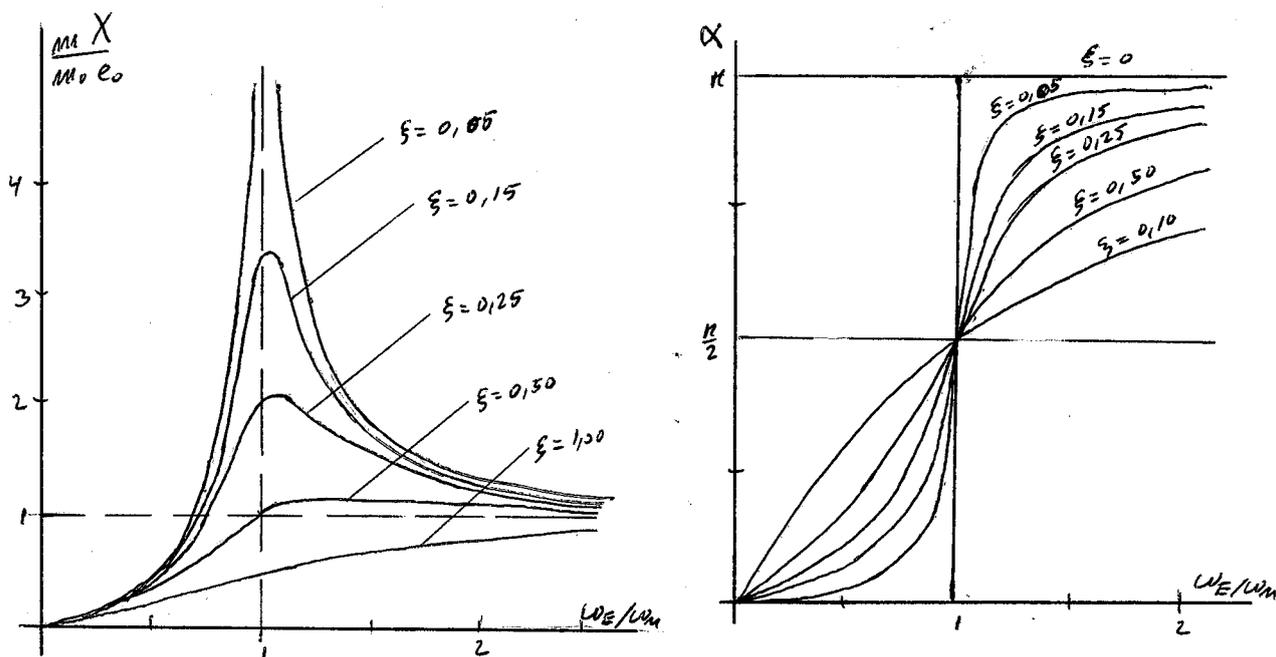
$$\frac{m \cdot X}{m_0 \cdot e_0} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} \quad [2]$$

El coeficiente adimensional $\frac{m \cdot X}{m_0 \cdot e_0} = \text{F.D.A.}$ se le llama

"factor de amplificación". Como se ve el 2º miembro es similar al de la Ecuación [10] del punto anterior, (salvo el término r^2), el ángulo α es idéntico al α_1 de la Ecuación [11] del mismo punto.

En consecuencia, las figuras siguientes representan los

valores de $\frac{m \cdot X}{m_0 \cdot e_0}$ y α .



-Como se observa de la Ecuación [2] anterior, para unos valores de r , (ω_E/ω_n) y ξ , (c) dados, la amplitud del movimiento depende de m , m_0 y e_0 .

Es decir, para un valor de w_n de la frecuencia natural del sistema, para un valor w_e de giro del rotor y para un valor del amortiguamiento del sistema c , la relación de amplificación será

$$F.D.A. = \frac{m \cdot X}{m_o \cdot e_o}$$

con lo cual la amplitud del movimiento será:

$$X = F.D.A. \cdot \frac{m_o \cdot e_o}{m} \quad [3]$$

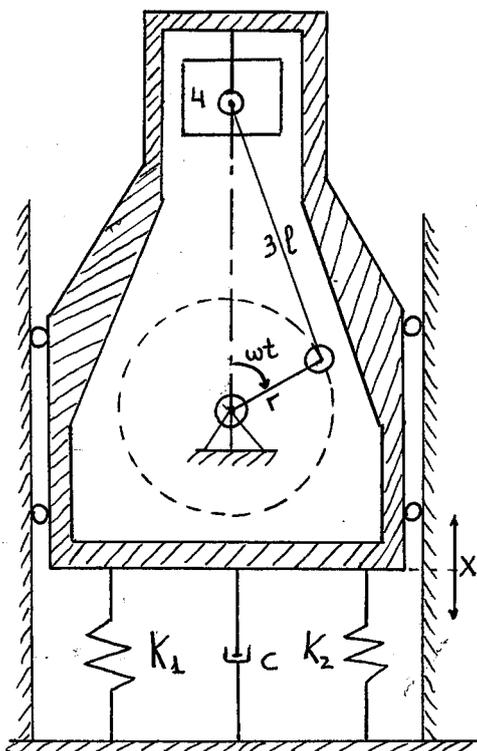
expresión que indica que para disminuir la amplitud de la vibración, ha de tenerse una relación grande entre la masa del sistema y la del rotor desequilibrado.

NOTA: Una turbina de 2 Tn de masa, perfectamente equilibrada, para una potencia de 500 Mw se instala sobre una estructura de 13,5 m de altura, con una losa de 40x15x3 m equivalente a 4.500 Tn.

$$m = 4.500 \text{ Tn} \quad ; \quad m_o = 2 \text{ Tn}$$

1-2.-VIBRACIONES CAUSADAS POR MAQUINAS ALTERNATIVAS

Del estudio dinámico de mecanismos biela-manibela-corredera (motores, compresor, etc.), conocemos el valor de la



fuerza de inercia producida por el pistón, y los diferentes métodos para "equilibrarla".

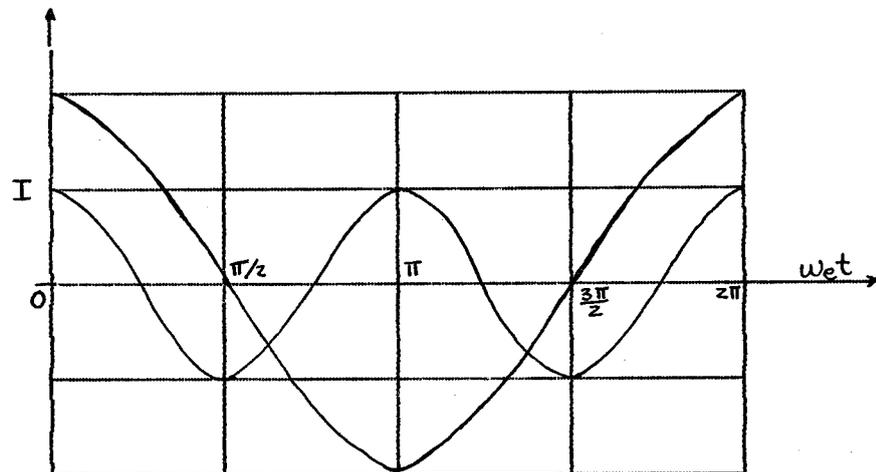
En el caso de que esto no se consiga, la inercia del pistón actuará como una fuerza excitadora sobre todo el mecanismo, que hará que este vibre.

Si se supone que la vibración del conjunto está restringida al plano vertical, el sistema puede considerarse de 1 GDL, con un desplazamiento x , como se ve en la figura, estando sometido a la fuerza de excitación (inercia del pistón).

$$I_4 = M_4 \cdot \omega_e^2 \cdot r \cdot \cos \omega_e t + M_4 \cdot (r^2/l) \cdot \omega_e^2 \cdot \cos 2 \cdot \omega_e t$$

siendo ω_e la velocidad de giro del cigüeñal y habiéndose despreciado los efectos de términos superiores a $2\omega_e$ ($\cos 4\omega_e$, etc.).

El término $M_4 \cdot \omega_e^2 \cdot r \cdot \cos \omega_e t$ se denomina fuerza de inercia de primer orden, por variar a la misma frecuencia que el giro del motor. Al término $M_4 \cdot (r^2/l) \cdot \omega_e^2 \cdot \cos 2 \cdot \omega_e t$ se le denomina fuerza de inercia de segundo orden. Ambas pueden representarse como se ve en la figura.



NOTA: Observese que si r/l es pequeño, aun lo será más r^2/l , por lo que la fuerza de inercia de 2º orden se hace también pequeña. En este caso el sistema se comportaría igual que el caso anteriormente tratado de rotor desequilibrado, siendo ahora la "masa desequilibrada" M_4 .

-En concreto estos mecanismos se comportan como sistemas de 1 GDL, sometidos a una fuerza excitadora de tipo periódico y cuya solución (que ya ha sido vista) se resuelve utilizando el principio de superposición. La respuesta del sistema será, por tanto (solo el término permanente):

$$\begin{aligned}
 x_{F_1}(t) = & \frac{M_4 \cdot \omega_E^2 r}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_E/\omega_n)^2]^2 + (2 \cdot \epsilon \cdot \omega_E/\omega_n)^2}} \cdot \cos \omega_E t \\
 + & \frac{M_4 \cdot r^2 \cdot \omega_E^2}{1 \cdot K} \cdot \frac{1}{\sqrt{[1 - (2\omega_E/\omega_n)^2]^2 + (2 \cdot \epsilon \cdot 2\omega_E/\omega_n)^2}} \cdot \cos 2\omega_E t
 \end{aligned}$$

-Según esto, el mecanismo tiene dos velocidades críticas de giro (amplitudes máximas de resonancia).

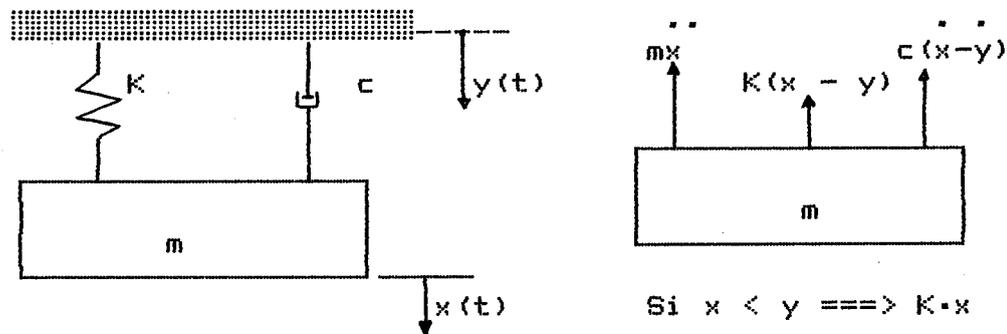
La primera cuando $\omega_E = \omega_n = \sqrt{K/M_{total}}$

La segunda cuando $2\omega_E = \omega_n$; es decir, cuando $\omega_E = \omega_n/2$, que como se ve corresponde a una velocidad de giro igual a la mitad de la frecuencia natural.

Tal aspecto ha de tenerse presente a la hora de elegir los resortes de sustentación K_1 y K_2 (o lo que es igual, K) y la masa total M_t

1-3-1.-VIBRACIONES CAUSADAS POR EL MOVIMIENTO DE LA BASE. CASO GENERAL.

Este es un tipo de vibración forzada que se presenta con relativa frecuencia, y se produce, normalmente, sobre equipos montados sobre sistemas en movimiento (automóvil sobre un camino rugoso, etc.)



En la figura se ha supuesto un sistema compuesto por una masa m , un resorte K y un amortiguador c .

Debido al movimiento $y(t)$ de la base, la masa se desplaza una cantidad $x(t)$. En consecuencia, la situación de equilibrio es la representada en el diagrama de cuerpo libre.

La ecuación de equilibrio es:

$$m \cdot \ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + K(x - y) = 0 \quad [1]$$

ya que no existe fuerza excitadora.

Rehaciendo la ecuación puede escribirse:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = c \cdot \dot{y} + K \cdot y \quad [2]$$

NOTA: La ecuación anterior representa desplazamientos absolutos de la masa.

Si se sustituye $x - y$ por z , se obtiene una ecuación

en función de los desplazamientos relativos:

$$z = x - y \quad ; \quad \dot{z} = \dot{x} - \dot{y} \quad ; \quad \ddot{z} = \ddot{x} - \ddot{y}$$

$$m \cdot \ddot{z} + c \cdot \dot{z} + K \cdot z = -m \cdot \ddot{y} \quad [3]$$

Si suponemos el movimiento de la base de tipo armónico:

$$y = Y_0 \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} = \tilde{Y} \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} \quad (\tilde{Y} = Y_0 \cdot e^{i \cdot 0})$$

la ecuación del movimiento de la masa queda:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = c \cdot \tilde{Y} \cdot \omega_e \cdot i \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} + K \cdot \tilde{Y} \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t}$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = \tilde{Y} \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} (i \cdot c \cdot \omega_e + K) \quad [4]$$

En esta ecuación, la solución general tendrá, como siempre, dos términos.

Uno corresponde a la solución de la homogénea:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = 0$$

que sabemos que es un movimiento armónico amortiguado y que da lugar al periodo transitorio. $[x_e(t)]$.

El otro término corresponde a una solución particular de la ecuación, y que da lugar al movimiento permanente $[x_p(t)]$.

-Veamos, solamente, este estado permanente del movimiento.

Para ello vamos a ensayar una solución particular del tipo:

$$x_p = I_m \cdot [\tilde{X} \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t}]$$

Derivando $\dot{x}_p = \text{Im} \cdot [\tilde{X} \cdot i \cdot \omega_E \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t}]$

$$\ddot{x}_p = \text{Im} \cdot [\tilde{X} \cdot \omega_E^2 \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t}]$$

Sustituyendo en [4]:

$$\begin{aligned} -m \cdot \tilde{X} \cdot \omega_E^2 \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t} + c \cdot \tilde{X} \cdot i \cdot \omega_E \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t} + K \cdot \tilde{X} \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t} &= \\ &= \tilde{Y} \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t} (i \cdot c \cdot \omega_E + K) \end{aligned}$$

$$\tilde{X} (-m \cdot \omega_E^2 + i \cdot c \cdot \omega_E + K) = \tilde{Y} (i \cdot c \cdot \omega_E + K)$$

Dividiendo por m:

$$\tilde{X} (-\omega_E^2 + i \cdot (c/m) \cdot \omega_E + K/m) = \tilde{Y} [i \cdot (c/m) \cdot \omega_E + (K/m)]$$

Como $K/m = \omega_n^2$ y $c/m = 2\xi \cdot \omega_n$

$$\tilde{X} \cdot (-\omega_E^2 + 2i \cdot \omega_E \cdot \xi \cdot \omega_n + \omega_n^2) = \tilde{Y} \cdot (2i \cdot \omega_E \cdot \xi \cdot \omega_n + \omega_n^2)$$

Dividiendo por ω_n^2 y llamando $\omega_E/\omega_n = r$

$$\tilde{X} \cdot (-r^2 + 2i \cdot \xi \cdot r + 1) = \tilde{Y} \cdot (2i \cdot \xi \cdot r + 1)$$

$$\tilde{X} = \tilde{Y} \cdot \frac{1 + i \cdot (2\xi \cdot r)}{(1 - r^2) + i \cdot (2\xi \cdot r)}$$

(como vemos, la amplitud X es un número complejo)

Expresándolo en la forma:

$$\tilde{X} = |X| \cdot e^{i \cdot \alpha}$$

tendríamos:

$$|X| = \frac{\sqrt{1 + (2\xi \cdot r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} Y_0 \quad [11]$$

$$\alpha = \operatorname{tag}^{-1} \frac{-2\xi \cdot r^3}{(1 - r^2) + (2\xi \cdot r)^2} \quad [2]$$

NOTA: Recuérdese que:

$$r = \frac{a + bi}{c + di} \implies |r| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

$$X = \frac{(1 - r^2) + (2\xi \cdot r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2} \cdot Y + i \cdot \frac{-2\xi \cdot r^3}{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2} \cdot Y$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la solución particular que representa el movimiento de la masa (movimiento permanente) puede escribirse:

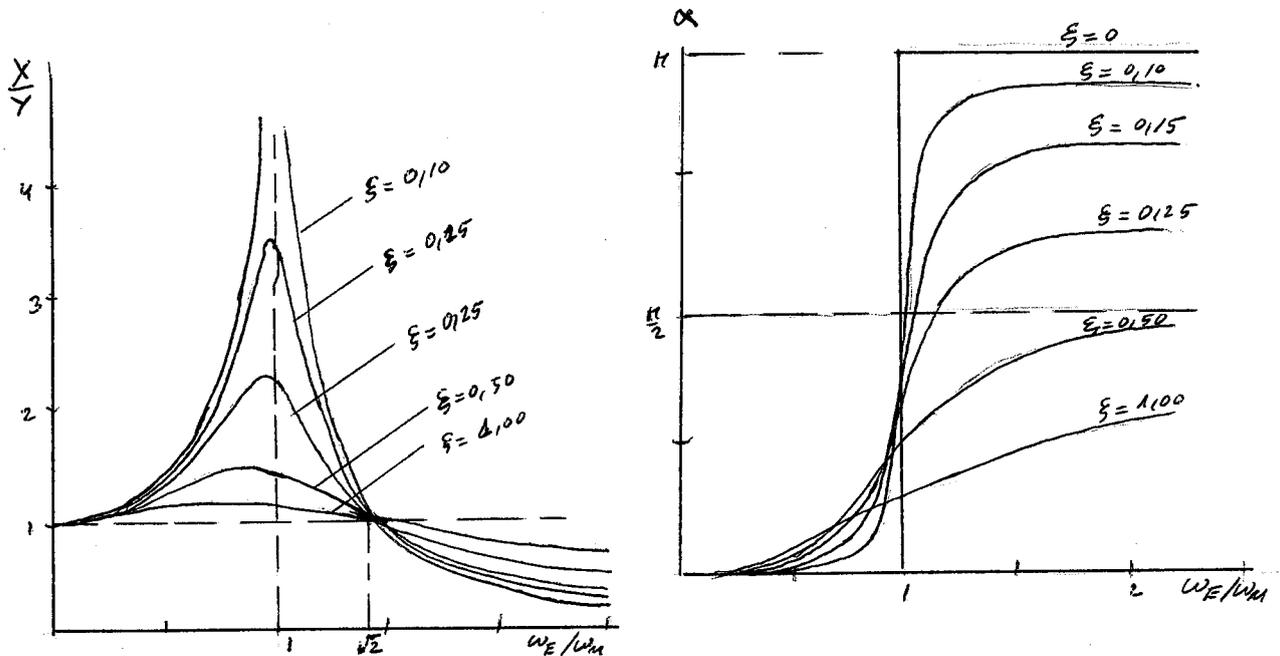
$$x_p = \tilde{X} \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} = |X| \cdot e^{i \cdot (\omega_e \cdot t + \alpha)}$$

De la ecuación [1] se obtiene:

$$\frac{|X|}{Y_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi \cdot r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}}$$

que expresa la relación entre el movimiento de la base y el de la masa (relación entre las amplitudes, en el régimen permanente).

El ángulo de desfase entre ambas viene dado por la expresión [2]



Como se ve, para movimientos lentos de la base, el movimiento de la masa tiene practicamente la misma amplitud ($|X|/Y_0 = 1$) (la masa "sigue" fácilmente el movimiento de la base).

Para $w_E = 0$, $|X|/Y = 1$ ($X = X_{est}$).

A medida que w_E va aumentando, la amplitud del movimiento de la masa también lo va haciendo para todos los valores de amortiguamiento.

Los valores máximos de la relación $|X|/Y$ se obtiene para $w_E = w_n$ (amplitud de resonancia). Se observa también que las amplitudes de la masa serán tanto menores cuanto mayor sea el amortiguamiento.

Cuando w_E pasa el valor de w_n , la $|X|/Y$ empieza a decrecer y se hace igual a 1 para $w_E/w_n = \sqrt{2}$, cualquiera que sea el valor del amortiguamiento.

Para valores de w_E aún mayores, $|X|/Y$ se hace menor de 1, para todo c . Se observa que para valores de c pequeños y de w_E grandes, $|X|/Y$ se hace casi cero, es decir, la masa no puede seguir las oscilaciones tan rápidas de la base, y permanece prácticamente en reposo.

(Un automóvil para circular por caminos rugosos debe tener un resorte blando y un amortiguador también blando. De este modo, las perturbaciones del terreno no se transmiten al chasis, cuando este circula a gran velocidad. Tal aspecto se contrapone a la circulación confortable a velocidades bajas o con caminos de "rugosidades amplias").

-En cuanto al ángulo de desfase puede verse que es nulo para $w_E = 0$.

Luego al ir aumentando w_E aumenta también δ , aunque lentamente (más rápidamente cuando c es alto).

Para valores grandes de w_E el desfase es tanto menor cuanto mayor sea c , no sobrepasando incluso, para algunos casos, el valor $\pi/2$.

Para $c = 0$, δ tiene un salto brusco de 0 a π , para $w_E = w_n$.

-El movimiento completo de la masa vendrá dado por:

$$\begin{aligned}
 x &= x_t + x_p = e^{-(c/2m) \cdot t} (E \cdot \cos w_d \cdot t + G \cdot \text{Sen } w_d \cdot t) + \\
 &+ \frac{\sqrt{1 + (2\xi \cdot r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} \cdot Y_0 \cdot e^{i \cdot (w_E \cdot t + \alpha)} = \\
 &= e^{-(c/2m) \cdot t} (E \cdot \cos w_d \cdot t + G \cdot \text{Sen } w_d \cdot t) + \\
 &+ \frac{\sqrt{1 + (2\xi \cdot r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} \cdot y(t) \cdot e^{i \cdot \alpha}
 \end{aligned}$$

NOTA: Cuando el movimiento de la base presenta una forma arbitraria, puede aplicarse la integral de convolución.

La respuesta del sistema:

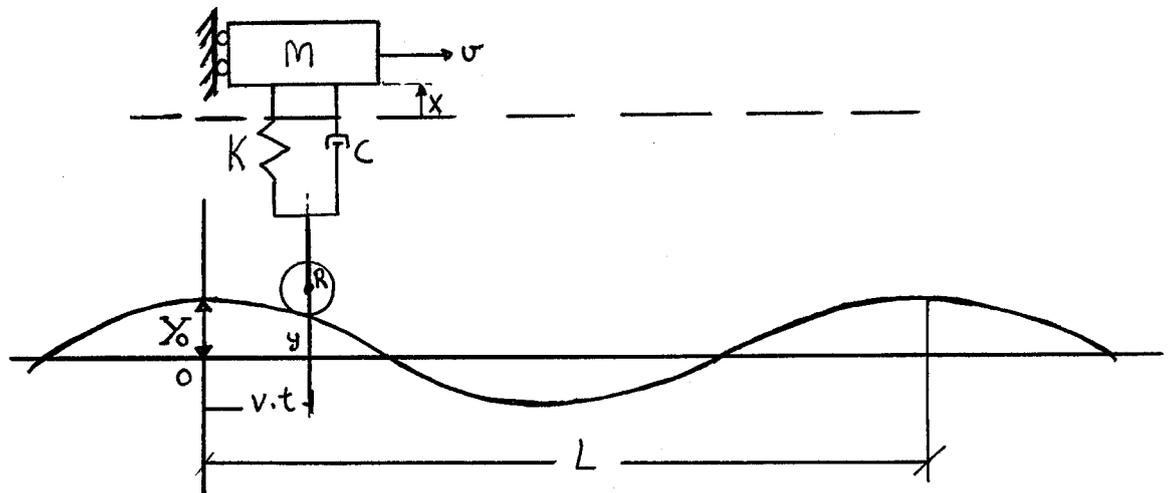
$$m \cdot \ddot{z} + c \cdot \dot{z} + K \cdot z = -m \cdot \ddot{y}$$

puede ponerse:

$$z(t) = -(1/w_d) \int_0^t \ddot{y}(\tau) \cdot e^{-(c/2m)(t-\tau)} \text{Sen}[w_d(t-\tau)] d\tau$$

1-3-2.-VIBRACIONES EN AUTOMOVILES.-

-La figura representa el modelo de la suspensión de un automóvil, de masa M (soportada por una rueda), que marcha sobre un camino ondulado (de variación senoidal) con la velocidad v .



-Si L es la longitud de onda del camino, e Y_0 su amplitud, la ecuación que define el "movimiento de la base" será:

$$y = Y_0 \cdot \text{Sen} \frac{2\pi \cdot vt}{L}$$

o lo que es igual

$$y = Y_0 \cdot \text{Sen} \omega_E t \quad \text{siendo} \quad \omega_E = \frac{2\pi \cdot v}{L}$$

-La respuesta permanente del sistema, según vimos anteriormente, será:

$$x_p(t) = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} \cdot y(t) \cdot e^{i\omega t}$$

siendo

$$r = \frac{w_E}{w_n} = \frac{2\pi \cdot v / L}{\sqrt{K/M}}$$

$$\alpha = \text{Tag}^{-1} \frac{-2 \cdot \xi \cdot r^3}{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}$$

-Si el amortiguamiento fuera nulo: ($\xi = 0$)

$$x_p(t) = \frac{Y_0 \cdot \text{Sen } w_E t}{\sqrt{1 - (w_E/w_n)^2}}$$

-La amplitud del movimiento del automóvil sería:

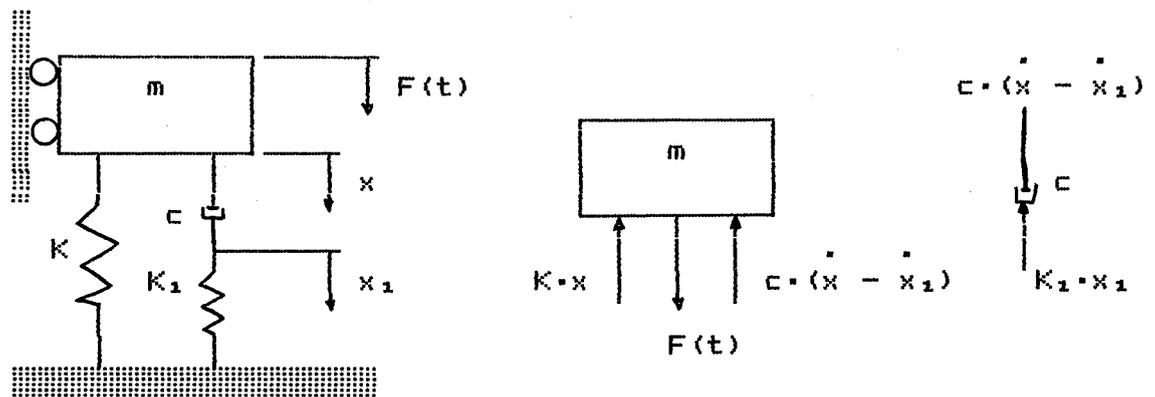
$$X = \frac{Y_0}{\sqrt{1 - (w_E/w_n)^2}} = \frac{Y_0}{\sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \cdot v^2 / L^2}{K/M}}}$$

expresión de la que puede obtenerse la velocidad del automóvil que hace que el sistema entre en resonancia, es decir, que las amplitudes del movimiento de la carrocería y creciendo con el tiempo:

$$\frac{4\pi^2 \cdot v^2}{L^2} = \frac{K}{M} \quad \implies \quad v = \frac{L}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K}{M}}$$

1-4.-VIBRACIONES EXCITADAS EN SISTEMAS CON RIGIDEZ AMORTIGUADA.-

-Los amortiguamientos en los sistemas reales son más complejos que los hasta aquí representados. En efecto, cualquier amortiguador real está soportado elásticamente, lo que conduce a la existencia de un amortiguador en serie con un resorte, como se ve en la figura.



Las ecuaciones que rigen al movimiento de la masa serán

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) + K \cdot x = F(t)$$

$$c \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) = K_1 \cdot x_1$$

Siendo $F(t)$ una fuerza de variación senoidal.

$$F(t) = F_0 \cdot \text{Sen } \omega t = I_m \{ F_0 \cdot e^{i\omega t} \} = I_m \{ \tilde{F}_0 \cdot e^{i\omega t} \}$$

Prescindiendo del período transitorio, el régimen permanente, si x y x_1 tienen una variación senoidal, vendrá dado por

$$x_p = X \cdot \text{Sen } \omega t = I_m \{ \tilde{X} \cdot e^{i\omega t} \}$$

$$x_{p1} = X_1 \cdot \text{Sen } \omega t = I_m \{ \tilde{X}_1 \cdot e^{i\omega t} \}$$

Utilizando la notación compleja y sustituyendo, llegaremos a las expresiones:

$$\begin{aligned}(K - \omega_E^2 \cdot m + j\omega_E \cdot c) \cdot \tilde{X} - j\omega_E \cdot c \cdot \tilde{X}_1 &= \tilde{F}_0 \\ -j\omega_E \cdot c \cdot \tilde{X} + (K_1 + j\omega_E \cdot c) \cdot \tilde{X}_1 &= 0\end{aligned}$$

De donde se obtienen \tilde{X} y \tilde{X}_1 , resolviendo por Cramer:

$$\tilde{X} = \frac{F_0 \cdot (K_1 + j\omega_E \cdot c)}{K_1 \cdot (K - \omega_E^2 \cdot m) + j\omega_E \cdot c \cdot (K + K_1 - \omega_E^2 \cdot m)}$$

$$\tilde{X}_1 = \frac{j\omega_E \cdot c \cdot F_0}{K_1 \cdot (K - \omega_E^2 \cdot m) + j\omega_E \cdot c \cdot (K + K_1 - \omega_E^2 \cdot m)}$$

en donde se observa que los fasores \tilde{X} y \tilde{X}_1 son números complejos.

$$\tilde{X} = |\tilde{X}| \cdot e^{+i\alpha}$$

$$\tilde{X}_1 = |\tilde{X}_1| \cdot e^{+i\alpha_1}$$

El módulo y el argumento de cada uno de estos complejos puede hallarse fácilmente, definiendo $N = K_1/K$ (relación de rigideces), $\omega_n = \sqrt{K/m}$, $c/m = 2 \cdot \xi \cdot \omega_n$, $\Gamma = \omega_E/\omega_n$ y llamando para simplificar

$$f(\omega_E) = \frac{K_1 \cdot (K - \omega_E^2 \cdot m) + j\omega_E \cdot c \cdot (K + K_1 - \omega_E^2 \cdot m)}{K \cdot K_1}$$

$$|f(\omega_E)| = \sqrt{(1 - \Gamma^2)^2 + [2 \cdot \xi \cdot \Gamma \cdot (1 + 1/N - \Gamma^2/N)]^2}$$

Se obtiene, al operar:

$$|X| = (F_0/K) \cdot \sqrt{1 + (2\xi \cdot \Gamma/N)^2} / |f(\omega_E)|$$

$$|X| = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{2\xi \cdot \Gamma/N}{|f(\omega_E)|}$$

$$\alpha = \text{tag}^{-1} \frac{2\xi \cdot \Gamma \cdot (1 + 1/N - \Gamma^2/N)}{1 - \Gamma^2} - \text{tag}^{-1} \frac{2\xi \cdot \Gamma}{N}$$

$$\alpha_1 = \text{tag}^{-1} \frac{2\xi \cdot \Gamma \cdot (1 + 1/N - \Gamma^2/N)}{1 - \Gamma^2} - \pi/2$$

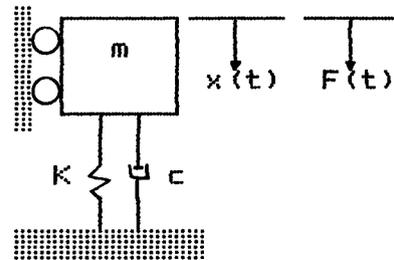
Con lo cual la respuesta permanente del sistema será:

$$x_p = |X| \cdot e^{i\alpha} \cdot e^{i\omega_E \cdot t} = |X| \cdot e^{i(\omega_E \cdot t + \alpha)}$$

1-5.-TRANSMISIBILIDAD DE LAS VIBRACIONES SOBRE SOPORTES FIJOS

Sea el sistema mostrado en la figura sobre el cual actúa la fuerza:

$$F(t) = F_0 \cdot \text{Sen } \omega_e \cdot t$$



La fuerza transmitida a la base será la suma de la transmitida a través del resorte, más la transmitida a través del amortiguamiento.

$$F_{TR} = K \cdot x + c \cdot \dot{x} \quad [1]$$

-Utilizando la notación compleja, la respuesta del sistema masa-resorte-amortiguador, a una fuerza:

$$F(t) = \text{Im} \{ F_0 \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} \}$$

venía dada por:

$$\tilde{X} = \frac{\tilde{F}_0}{K - m \cdot \omega_e^2 + i \cdot \omega_e \cdot c} \quad [2]$$

-La fuerza transmitida será (en el régimen permanente)

$$\text{Im} \{ \tilde{F}_{TR} \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} \} = K \cdot \text{Im} \{ \tilde{X} \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} \} + c \cdot \text{Im} \{ \tilde{X} \cdot i \cdot \omega_e \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} \}$$

$$\tilde{F}_{TR} = K \cdot \tilde{X} + i \cdot \omega_e \cdot c \cdot \tilde{X} = \tilde{X} \cdot (K + i \cdot \omega_e \cdot c) \quad [3]$$

Sustituyendo [2] en [3]

$$\tilde{F}_{TR} = \frac{\tilde{F}_0}{K - m \cdot \omega_e^2 + i \cdot \omega_e \cdot c} \cdot (K + i \cdot \omega_e \cdot c) \quad [4]$$

Definiendo la transmisibilidad como el cociente entre la amplitud de la fuerza transmitida y la amplitud de la fuerza de excitación, podremos poner:

$$\widetilde{T.R.} = \frac{\widetilde{F}_{TR}}{\widetilde{F}_0} = \frac{K - i \cdot \omega_E \cdot c}{K - m \cdot \omega_E^2 + i \cdot \omega_E \cdot c} \quad [5]$$

Llamando $c/m = 2\xi \cdot \omega_n$; $\Gamma = \omega_E/\omega_n$; $K/m = \omega_n^2$, queda la expresión:

$$\widetilde{T.R.} = \frac{1 + i \cdot (2\xi \cdot \Gamma)}{(1 - \Gamma^2) + i \cdot (2\xi \cdot \Gamma)} \quad [6]$$

que también puede escribirse:

RECORDATORIO	$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$
--------------	---

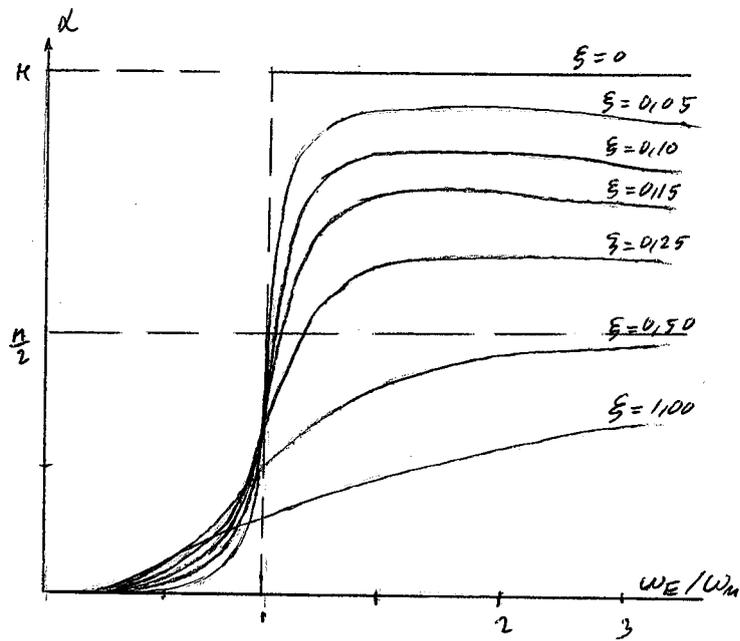
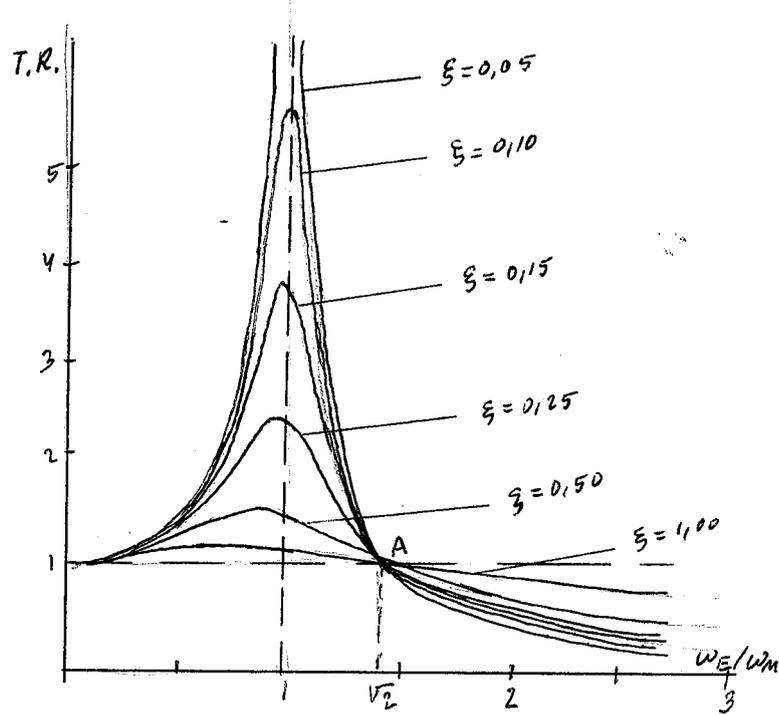
$$\widetilde{T.R.} = \frac{(1 - \Gamma^2) + (2\xi \cdot \Gamma)^2}{(1 - \Gamma^2)^2 + (2\xi \cdot \Gamma)^2} + i \cdot \frac{-2\xi \cdot \Gamma^3}{(1 - \Gamma^2)^2 + (2\xi \cdot \Gamma)^2}$$

Como $\widetilde{T.R.} = |T.R.| \cdot e^{i \cdot \alpha}$, donde α representa el ángulo de desfase entre la fuerza de excitación y la transmitida a la base, tendremos:

$$|T.R.| = \frac{\sqrt{1 + (2\xi \cdot \Gamma)^2}}{\sqrt{(1 - \Gamma^2)^2 + (2\xi \cdot \Gamma)^2}} \quad [7]$$

$$\alpha = \text{tag}^{-1} \frac{-2\xi \cdot \Gamma^3}{(1 - \Gamma^2)^2 + i \cdot (2\xi \cdot \Gamma)^2} \quad [8]$$

-Las figuras representan los valores de $|T.R.|$ y α para diferentes valores de r (o sea, de w_E)



-La ecuación [7] muestra que cualquiera que sea el valor del amortiguamiento (ϵ), siempre se verifica que $|T.R.| = 1$ para $r = \sqrt{2}$.

Es decir, todas las curvas pasan por el punto A. Además, también se observa que con independencia del valor del amortiguamiento, $|T.R.|$ es siempre menor de 1, para $r > \sqrt{2}$ y mayor que 1 para $r < \sqrt{2}$.

-Cuando $r = (w_e/w_n) > \sqrt{2}$, la fuerza transmitida es tanto mayor cuanto mayor sea el amortiguamiento (ϵ).

Por el contrario, cuando $r = (w_e/w_n) \leq \sqrt{2}$, la fuerza transmitida es tanto mayor cuanto menor sea el amortiguamiento.

Tal comportamiento se explica fácilmente si consideramos que la fuerza transmitida por el amortiguamiento es proporcional a la velocidad. A velocidades bajas, el amortiguador apenas si actúa, y la fuerza transmitida se debe principalmente al resorte. Si el amortiguador es "blando", su influencia es aún menor.

-En la práctica, todo lo anterior se traduce en lo siguiente:

- a.- Para una w_e dada (o r), en un sistema con $w_n = \sqrt{K/m}$, si se quiere disminuir la transmisibilidad ha de ponerse una c grande si $r < \sqrt{2}$ y una c pequeña si $r > \sqrt{2}$.
- b.- Para una m y una w_e dadas, pueden elegirse simultáneamente K y c , de manera que $T.R.$ tenga el mínimo valor. Lo lógico es elegir resortes "blandos", de manera que $w_n \ll w_e$, y r grande.

-En el caso de no haber resorte ni amortiguador (masa unida rígidamente a la base), $T.R. = 1$

En efecto, $K = \omega \implies \omega_n \cdot \sqrt{(K/m)} = \omega \implies r = \omega/\omega_n = 0$

-En el caso de no haber amortiguamiento, $\xi = 0$

$$|T.R.| = 1/(1 - r^2)$$

Como $T.R. = F_{TR}/F_0 = (K \cdot X)/F_0$ siendo X el desplazamiento máximo de la masa.

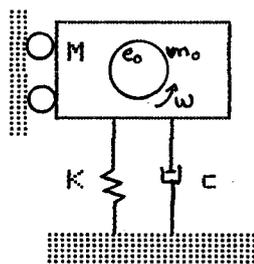
$$\frac{X}{F_0/K} = \frac{X}{X_{ext}} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

que es la curva para $\xi = 0$, representada en la figura.

-La gráfica de r contra α muestra que el ángulo de desfase crece en todos los casos, y siempre es mayor cuanto menor sea el amortiguamiento.

Para amortiguadores muy duros, el desfase es pequeño (la fuerza transmitida a la base practicamente "sigue" a la de excitación)

NOTA: Es interesante analizar el caso de transmisibilidad de vibraciones cuando estas son causadas por rotores desequilibrados.



En este caso, igual que antes.

$$F_{TR} = F(t) \cdot T.R.$$

$F(t)$ valdrá (su componente vertical solamente, en este caso)

$$F(t) = m_0 \cdot e_0 \cdot \omega^2$$

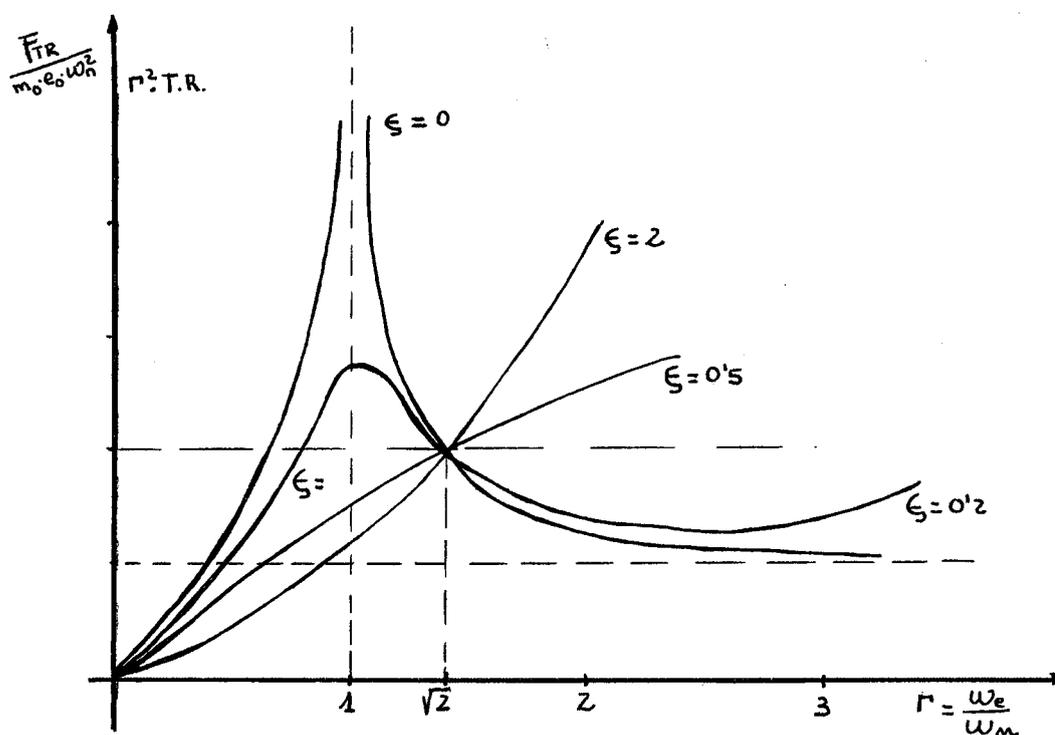
Con lo que queda:

$$F_{TR} = m_0 \cdot e_0 \cdot \omega^2 \cdot \frac{\sqrt{1 + (2\xi \cdot r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}}$$

Poniendolo en forma adimensional, dividiendo por $m_0 \cdot e_0 \cdot \omega_n$, queda:

$$\frac{F_{TR}}{m_0 \cdot e_0 \cdot \omega_n^2} = \frac{r^2 \cdot \sqrt{1 + (2\xi \cdot r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}}$$

cuya representación gráfica es la de la figura:



Como se observa, cuanto menor es c , mayor es F_{TR} . Sin embargo, c no debe ser grande tampoco, puesto que al aumentar ω_e , la F_{TR} crece a medida que c es mayor.

1-6.-GENERALIDADES SOBRE LOS INSTRUMENTOS PARA MEDIDA DE VIBRACIONES

-Para la medida de vibraciones se usan dos tipos de instrumentos: unos que miden frecuencias, y otros velocidades o aceleraciones.

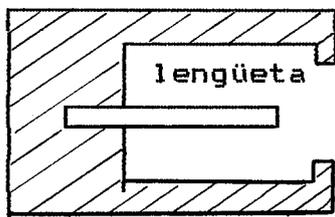
-Los instrumentos para medir frecuencias son, a su vez, de dos tipos:

-Lámparas estroboscópicas.

-Tacómetros de lengüeta, con una o varias de estas.

-Los tacómetros de lengüetas consisten en una o varias láminas en voladizo. Si son de una lámina, su longitud ha de poder variarse. Si son varias láminas, estas tienen diferentes longitudes.

Instalado el aparato en el sitio donde se va a medir la



vibración, se va variando la longitud de la lengüeta hasta que se produzca el fenómeno de resonancia, o si es de varias

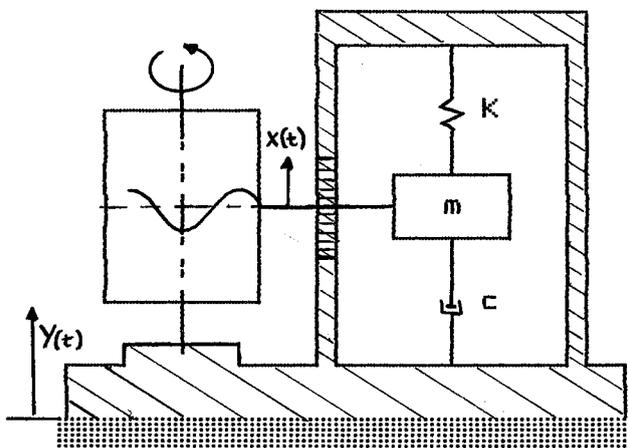
lengüetas, se observa cual de ellas está en resonancia.

Luego, hallando el valor de w_n , conocida la longitud de la lengüeta en resonancia, se tiene la frecuencia de la excitación ($w = w_n$)

-Entre los instrumentos basados en la medida de desplazamientos, velocidades y aceleraciones, los más usados son los primeros y los últimos, calculándose las velocidades a partir de los datos de estos.

Los instrumentos para medida de desplazamientos y aceleraciones constan de un soporte, que se fija al equipo en vibración (base) y en el cual se encuentra suspendida, mediante un resorte, una masa a la que va adaptada un sistema de registro.

Se completa el sistema con un amortiguador c . La caja del instrumento se une solidariamente al cuerpo vibrante, de



manera que la vibración de este se transmite a la caja del instrumento y de esta, a la masa suspendida.

$y(t)$ y $x(t)$ son los movimientos de la caja (cuerpo vibrante) y la masa suspendida, respecto de unos

ejes de referencia fijos.

Evidentemente, lo que se desea hallar con un instrumento de este tipo es $y(t)$, pero normalmente lo que se registra es el movimiento relativo

$$z(t) = x(t) - y(t)$$

La ecuación diferencial del sistema vibrante, en términos del desplazamiento relativo será, como ya vimos

$$m \cdot \ddot{z} + c \cdot \dot{z} + K \cdot z = -m \cdot \ddot{y} \quad [1]$$

Si el movimiento del cuerpo vibrante es armónico, del tipo

$$y = Y_0 \cdot \text{Sen } \omega t$$

la ecuación [1] queda:

$$m \cdot \ddot{z} + c \cdot \dot{z} + K \cdot z = m \cdot \omega_E^2 \cdot Y_0 \cdot \text{Sen } \omega_E t \quad [2]$$

que es una ecuación idéntica a la vista para un rotor desequilibrado.

Si el movimiento permanente es del tipo

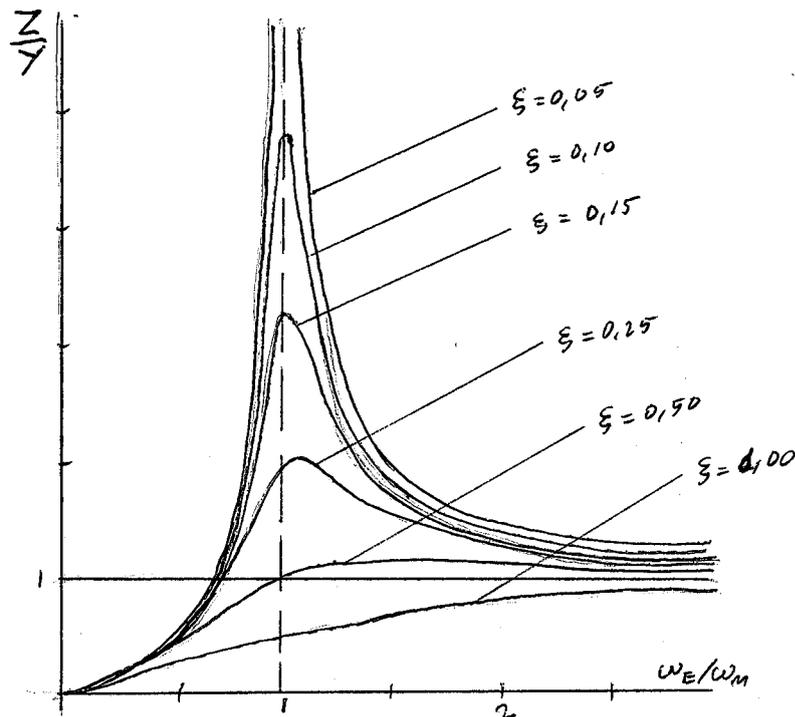
$$z_p = Z \cdot \text{Sen } (\omega_E t + \alpha)$$

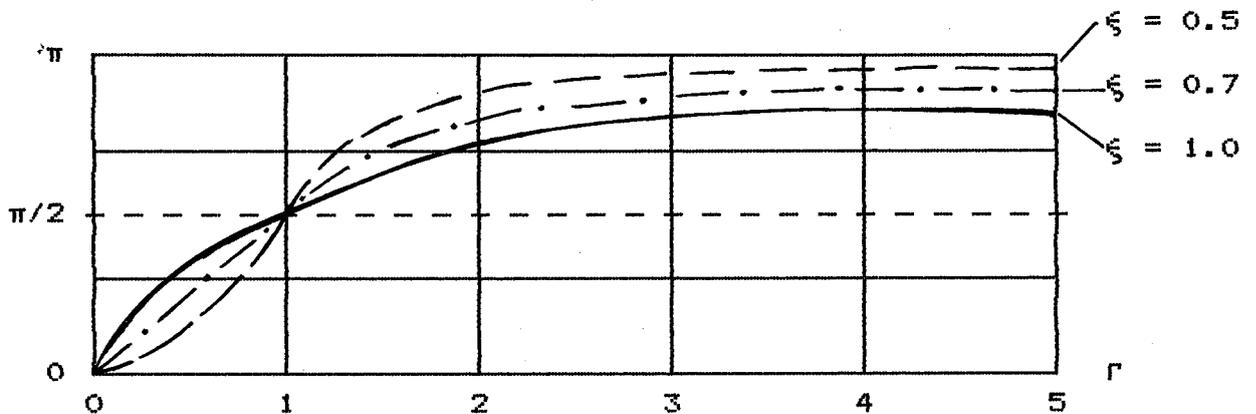
la amplitud y la fase (desfase entre el movimiento de la base y el de la masa suspendida) vendrán dadas por:

$$|Z| = \frac{m \cdot \omega_E^2 \cdot Y_0 / K}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} \cdot Y_0$$

$$\alpha = \text{tag}^{-1} \frac{-2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2}$$

Graficamente, ambos valores pueden verse en las figuras siguientes





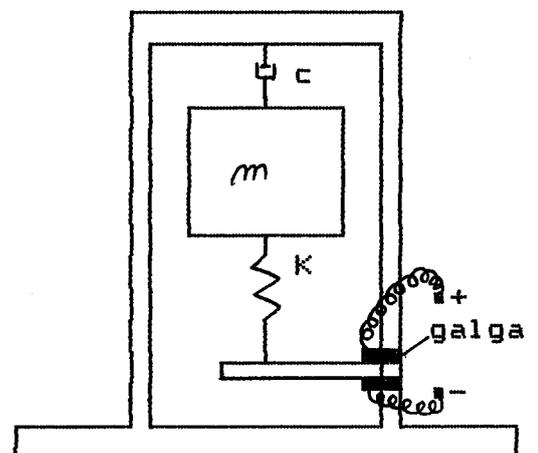
Puede observarse que para pequeños valores de r (pequeño w_e frente a w_n), los valores de Z/Y son próximos a cero. En otras palabras, no hay desplazamientos relativos entre la base y la masa, lo cual significa que la masa sigue bastante fielmente los movimientos de la base, y ello para cualquier valor del amortiguamiento.

Por el contrario, para valores altos de r (valor grande de w_e frente al valor de w_n) $Z/Y = 1$, para cualquier valor del amortiguamiento, lo que indica que el desplazamiento relativo Z coincide con el de la base, o en otras palabras, que la masa apenas si responde al movimiento de la base.

Medida de desplazamientos. Sismómetros:

Los sismómetros son aparatos que tienen una frecuencia natural baja (por ejemplo, una masa grande, suspendida de un resorte "largo", de pequeña K) comparada con la frecuencia w_e de la base.

En estas condiciones, $Z/Y = 1 \implies Z = Y$, con lo cual la medida del



desplazamiento relativo coincide con la del desplazamiento de la base.

(Normalmente la medida de r no se hace en forma mecánica, sino eléctrica.

En la figura se ha representado un sistema a base de galgas extensométricas).

(Como se observa la presencia del amortiguamiento carece de importancia. Si se coloca es solamente para amortiguar la vibración libre).

En este tipo de aparatos el desfase entre el movimiento de la base y el de la masa está próximo a los 180° .

Derivando sucesivamente la señal $z(t)$ se obtendrían la velocidad y la aceleración del movimiento de la base.

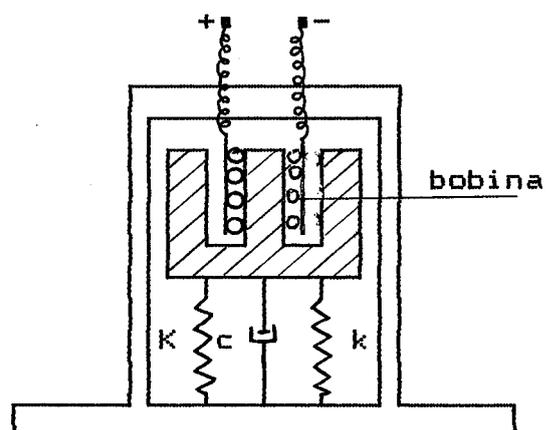
Medida de las velocidades. Vibrómetro

Los vibrómetros son aparatos que tienen una frecuencia natural baja (de 1 a 5 Hz), y cuyo rango útil de frecuencias ω_e oscila entre 10 y 2000 Hz.

Esencialmente se conforman como un sismómetro, pero el fenómeno eléctrico en que se basan genera

una señal proporcional a la velocidad del desplazamiento.

En efecto, el desplazamiento de la masa respecto a la bobina fija a la caja, origina una variación del voltaje generado



que es proporcional a la velocidad de cambio del campo magnético, o sea, a la velocidad relativa de la masa respecto de la bobina (fija a la base).

Por integración puede obtenerse el desplazamiento y por diferenciación la aceleración.

Medida de la aceleración. Acelerómetros:

Los acelerómetros son instrumentos que tienen una frecuencia natural alta (poca masa y resorte duro) comparada con la de la vibración que se desea medir.

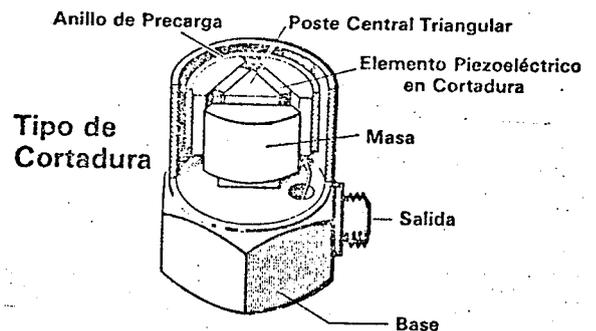
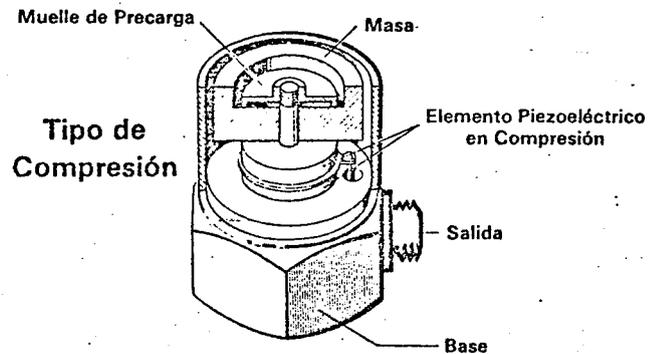
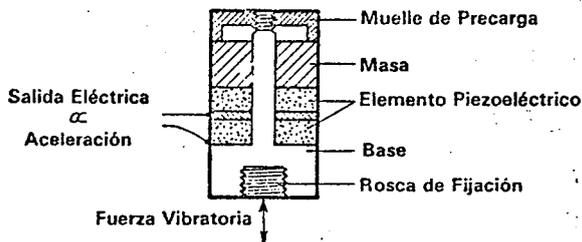
En este caso, $r \rightarrow 0 \implies Z/Y \rightarrow 0$, lo que indica que apenas hay desplazamientos relativos entre la masa y la base, o mejor, que la masa sigue con más o menos fidelidad el movimiento de la base.

$$Z = \frac{1}{\omega_n^2 \cdot \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} \cdot \omega_e^2 \cdot Y \approx \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \omega_e^2 \cdot Y$$

(ya que $(1 - r^2)^2 \rightarrow 1$ y $(2\xi \cdot r)^2 \rightarrow 0$)

ecuación que indica que el desplazamiento relativo es proporcional a la aceleración del movimiento armónico de la base ($\omega_e^2 \cdot Y$) multiplicado por un factor de escala $1/\omega_n^2$.

En la actualidad, el tipo de acelerómetro más usado es el piezoeléctrico, basado en la propiedad de ciertos materiales de generar una tensión eléctrica en su seno cuando son sometidos a una fuerza exterior (de compresión o de cortadura).



La sensibilidad de estos acelerómetros viene dada en términos de carga (picoculombios = 10^{-12} C) por "g", o de milivóltios ($= 10^{-3}$ V) por "g".

La sensibilidad típica es del orden de 25 pC/g con una capacitancia de 500 pF, lo que equivale a:

$$V = Q/C = 25/500 = 0,050 \text{ V/g} = 50 \text{ mV/g}$$

Existen acelerómetros con frecuencias naturales próximas a los 50.000 Hz, que permiten medidas de aceleración de hasta 3.000 Hz.

-La medida de la aceleración en movimientos de la base complejos puede dar lugar a fenómenos de "distorsión de amplitud".

En efecto, un movimiento complejo puede descomponerse en una suma de movimientos armónicos, de frecuencias diferentes, cada uno de los cuales dará lugar a un valor particular de $r = \omega_{E1}/\omega_n$.

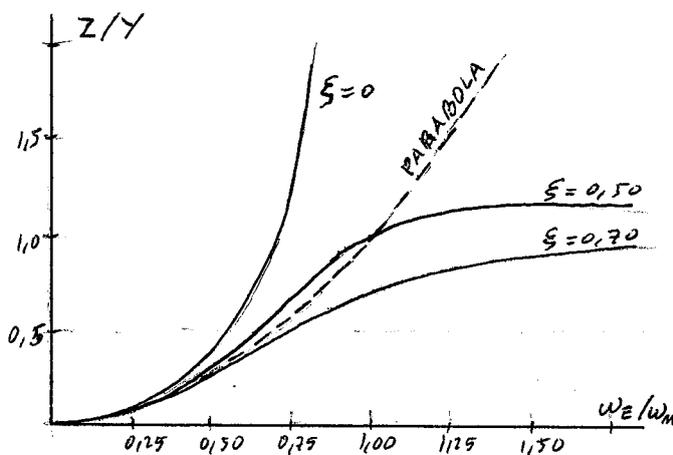
En consecuencia habrá distorsión en la amplitud siempre que

el término $\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi \cdot r^2)^2}}$ cambie para los diferentes

armónicos.

Esta es la razón por la cual a los acelerómetros se les hace trabajar dentro de un margen de r bastante estrecho, y con unos factores de amortiguamiento concretos.

En la figura se ha representado con una escala ampliada, la respuesta del sistema.

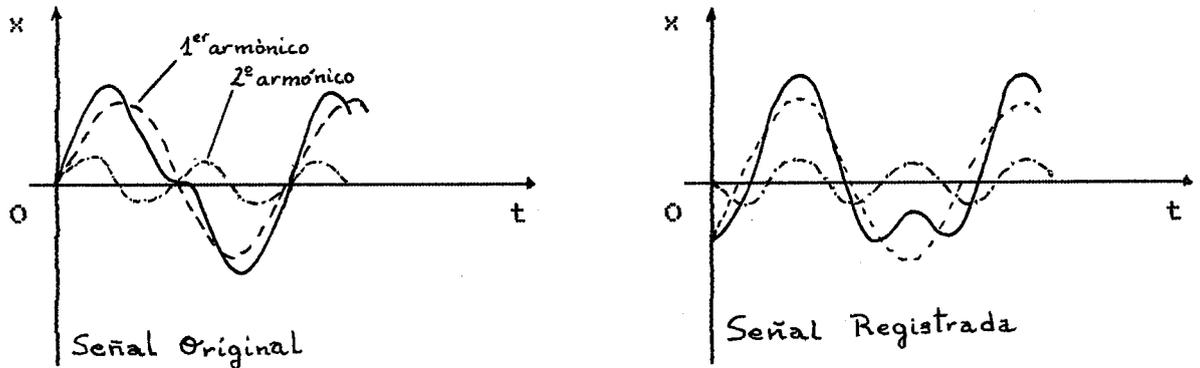


En ella puede observarse que para valores de r inferiores a 0,25 no aparecerá prácticamente distorsión en amplitud. La respuesta será próxima a $\omega_{E1}^2 \cdot Y$ para valores inferiores a $r = 0,75$ pero

en este caso han de elegirse amortiguamientos comprendidos entre $\xi = 0,5$ y $\xi = 0,7$

-Igualmente, también pueden ocurrir fenómenos de "distorsión de fase", debidos a la variación del desfase α con la relación de $\omega_{E1}/\omega_n = r_1$, para los diferentes armónicos ω_{E1} .

En las figuras se muestran los efectos de un desfase en los armónicos, que aunque no ocasionan distorsión en la amplitud, sin embargo la señal registrada del movimiento de la base cambia sustancialmente.



Para reproducir una onda compleja, sin cambiar su forma, la fase de todas las componentes armónicas debe permanecer invariable con respecto a la fundamental.

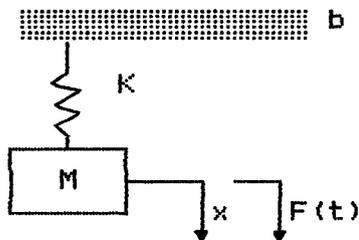
Ello exige que el ángulo de desfase sea cero (para cualquier valor de w_{E1}) o que todas las componentes armónicas se desfasen el mismo ángulo.

Según el diagrama que da el valor de α frente a r , el primer caso se tendrá cuando $\xi = 0$, y para valores de $r \leq 1$

El segundo caso se satisface prácticamente para valores de $\xi = 0,7$ en el intervalo $0 \leq r \leq 1$.

En este intervalo el desfase puede representarse por:

$$\alpha = (\pi/2) \cdot (w_E/w_n)$$

1-7.-INTRODUCCION AL AISLAMIENTO. VIBRACIONES

Como hemos visto, si sobre una masa M , unida por medio de un resorte K a una base b actúa una fuerza exterior

$$F(t) = F_0 \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t$$

se produce una vibración dada por:

$$x = (E \cdot \text{Cos } \omega_n \cdot t + G \cdot \text{Sen } \omega_n \cdot t) + \frac{F_0}{K - M \cdot \omega_E^2} \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t$$

cuya amplitud se hace infinita cuando la frecuencia de excitación es igual a la natural del sistema:

$$\omega_E = \omega_n = \sqrt{K/M} \implies K - M \cdot \omega_E^2 = 0 \implies x = \infty$$

Lógicamente, la fuerza transmitida a la base será $F_{TR} = K \cdot x$, que como vemos, puede alcanzar, teóricamente, valores infinitos.

Dicho de otra manera, las vibraciones del sistema se transmiten a su soporte, el cual, a su vez, la transmite a otros puntos (como vibración excitada por movimiento de la base).

Dado que en la mayoría de los casos estas vibraciones son indeseables, es preciso eliminarlas o disminuirlas en lo posible.

Ello puede lograrse en base a tres supuestos:

a.-Suprimiendo la fuente de la vibración (es decir, eliminando $F(t)$, por ejemplo, con un mejor equilibrado, si esta fuera la causa de la $F(t)$).

Este origen en la mayoría de los casos es absolutamente imposible de evitar (por ejemplo, fuerza $F(t)$ producida por la explosión de los gases en motores alternativos, o la fuerza sobre un automóvil originada por las irregularidades del pavimento, o las fuerzas producidas sobre un avión por el choque con el aire, etc.)

b.-Empleando "aislante de vibraciones", que "aminoren" la fuerza transmitida al soporte (muelles metálicos, cauchos, corcho, etc.)

c.-Utilizando "absorvedores" de vibraciones, que son masas adicionales colgadas de la masa principal y que tienen una frecuencia natural de vibración idéntica a la de la fuerza de excitación, de manera que ambos efectos se equilibran sobre la masa principal, haciendo que esta no vibre..

(Ver sistemas de 2 GDL)

Aislantes de vibraciones.-

-Los aislantes de vibraciones más usados son: muelles metálicos, caucho, corcho, filtros y otros materiales sintéticos.

Todos ellos se caracterizan por tener diferentes rigideces K , y diferentes grados de amortiguamiento c .

a.-Resortes metálicos:

Son muy empleados, dada la facilidad de modificar el valor de K (poniendo resortes de más o menos número de espiras), la posibilidad de fabricación con muchos materiales diferentes y la posibilidad de soportar cargas elevadas.

No tienen prácticamente amortiguamiento, por lo que no se deben emplear para valores de $r < \sqrt{2}$.

Cuando la w_e de excitación es baja se ha de recurrir a disminuir w_n , a base de disminuir K , o sea, a poner resortes cortos (si la carga m es elevada), lo cual no siempre es posible.

b.-Caucho:

Se emplea el caucho natural o el sintético.

Normalmente se coloca el caucho entre láminas paralelas, a las cuales se adhiere, o también en forma tubular.

Pueden trabajar a compresión, cortadura o torsión.

Posee un gran amortiguamiento, lo que lo hace adecuado para valores de $r < 2$ (El coeficiente de amortiguamiento se obtiene en vibración libre, a través de la medida del decremento logarítmico).

c.-Corcho:

Se emplea bastante para aislar de vibraciones, choques y sonidos.

Trabaja sólo a compresión.

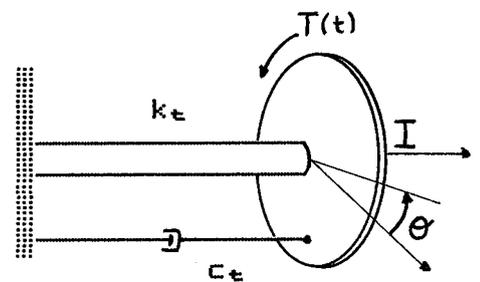
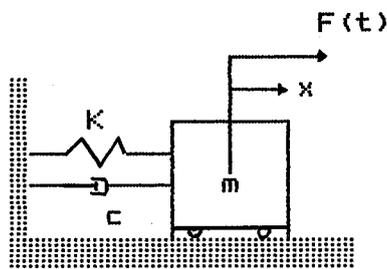
Se coloca generalmente en planchas debajo de la base de las máquinas.

Es bastante rígido y tiene un amortiguamiento parecido al del caucho.

2-1.-VIBRACIONES DE TORSION EN EJES

El análisis de vibraciones de torsión en sistemas de 1 GDL se resuelven exactamente igual que los sistemas masa-resorte por lo que sólo expondremos una tabla comparativa de ambos sistemas.

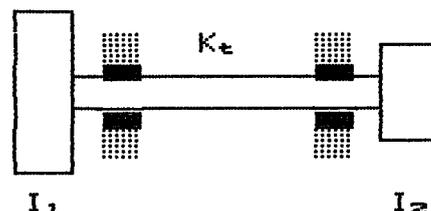
UNIDADES =====	S. MASA-RESORTE =====	S. ROTACION =====
Tiempo	t	t
Desplazamiento	x	θ
Velocidad	\dot{x}	$\dot{\theta}$
Aceleración	\ddot{x}	$\ddot{\theta}$
[Masa	m	I
[Momento inercia		
Amortiguamiento	c	c_t
Rigidez	K	K_t
[Fuerza	F ($F = m \cdot \ddot{x}$)	T ($T = I \cdot \ddot{\theta}$)
[Par		
Energía cinética	$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2$	$\frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\theta}^2$
Energía potencial	$\frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$	$\frac{1}{2} \cdot K_t \cdot \theta^2$

MÓVIMIENTO VIBRATORIO

Ec. Movimiento	$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t)$	$I \cdot \ddot{\theta} + c_t \cdot \dot{\theta} + K_t \cdot \theta = T(t)$
Respuesta sistema	$x = x_c + x_p$	$\theta = \theta_c + \theta_p$
Régimen transitorio	$x_c = e^{-(c/2m) \cdot t} (E \cdot \cos \omega_d \cdot t + G \cdot \sin \omega_d \cdot t) =$ $= A \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n t} \cdot \text{Sen}(\omega_d t + \varphi)$	$\theta_c = A \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n t} \cdot \text{Sen}(\omega_d t + \varphi)$
Frecuencia natural	$\omega_n^2 = K/m$	$\omega_n^2 = K_t/I$
Relación amortiguamiento	$\xi = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{K \cdot m}}$	$\xi = \frac{c_t}{2 \cdot \sqrt{K_t \cdot I}}$
Frecuencia natural amortiguada	$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$	$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$
Régimen permanente: excitación armónica	$F(t) = F_0 \cdot \text{Sen} \omega_e t$	$\theta_p = \Theta \cdot \text{Sen}(\omega_e t - \varphi)$
	$X = \frac{F/K}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}}$	$\Theta = \frac{T/K_t}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}}$
	$\varphi = \text{tag}^{-1} \frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2}$	$\varphi = \text{tag}^{-1} \frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2}$
	$r = \omega_e / \omega_n$	

NOTA: Observese que los sistemas vibrantes de torsión de 1 GDL solo pueden ser ejes (no giratorios) pero no árboles (giratorios), puesto que estos siempre tendrán, al menos, 2 GDL.

Sin embargo como veremos al estudiar estos sistemas, existen algunos como se

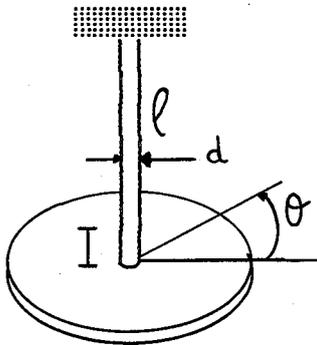


muestra en la figura (dos ruedas dentadas unidas por un árbol de masa despreciable, de rigidez K_t , a título de ejemplo), denominados "semidefinidos", en los que a pesar de tener 2 GDL, y por tanto, dos frecuencias naturales, una de ellas es cero.

En términos coloquiales, el sistema de la figura, si a I_1 se le gira un cierto ángulo a derechas y a I_2 un cierto ángulo a izquierdas, y se "sueltan", el sistema vibrará con la frecuencia w_1 . Sin embargo, si a I_1 y a I_2 se les gira el mismo ángulo en el mismo sentido, y se les "suelta", el sistema no vibrará, sino que permanecerá en reposo en esa nueva posición. ($w_2 = 0$)

2.2.- CALCULO DEL MOMENTO POLAR DE INERCIA DE UN CUERPO.-

-El momento polar de inercia de un cuerpo es fácil de calcular sujetándolo por medio de una barra de torsión, sometiéndolo a una vibración y midiendo la frecuencia natural de la misma.



La ecuación del movimiento, despreciando el amortiguamiento, será:

$$I \cdot \ddot{\theta} + K_t \cdot \theta = 0$$

Si a la rueda se le gira θ grados y se le suelta se pondrá a oscilar.

Si se cuenta el n° de oscilaciones (n) en t segundos, la frecuencia natural en rad/s será

$$\omega_n = 2\pi \cdot n/t \text{ (rd/s)}$$

El coeficiente de rigidez torsional de la barra se calcula fácilmente

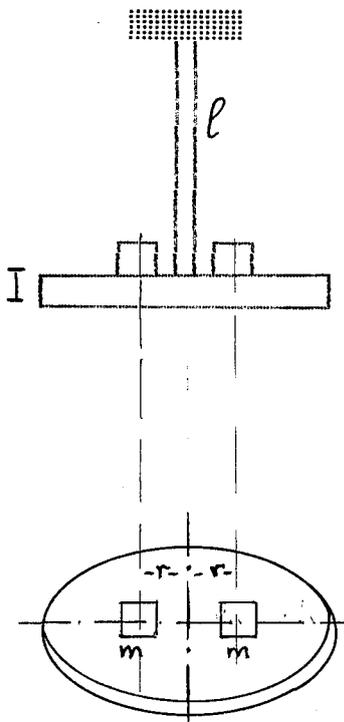
$$K_t = \frac{G \cdot I_b}{l} = \frac{G \cdot \pi \cdot d^4}{32 \cdot l}$$

Con lo cual

$$I = K_t / \omega_n^2$$

-Otro método, que evita los problemas asociados al amortiguamiento de la barra, consiste en colocar sobre el cuerpo a medir su momento de inercia, dos masas idénticas, a igual distancia del eje de rotación y medir la frecuencia de la vibración libre con tales masas adicionales y sin ellas.

(Tales masas no deben ser tan pequeñas respecto de la masa del volante que no introduzcan una diferencia apreciable en la frecuencia de oscilación.)



Frecuencia natural sin las masas:

$$\omega_1^2 = \frac{K_t}{I} = \frac{G \cdot I_b}{I \cdot l} \quad (\text{rd/s})^2$$

Frecuencia natural con las masas:

$$\omega_2^2 = \frac{G \cdot I_b}{(I + 2m \cdot r^2) \cdot l}$$

Comparando ambas frecuencias naturales resulta:

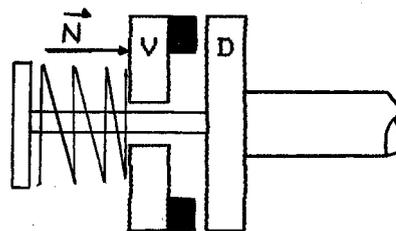
$$I = \frac{2m \cdot r^2 \cdot \omega_2^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

2-3.-AMORTIGUADORES DE VIBRACIONES DE TORSION

-En sistemas de torsión las vibraciones pueden ser disminuidas en amplitud por medio de un sistema que absorva energía del cuerpo vibrante y la disipe (en forma de calor, por ejemplo)

Tales sistemas que absorvan y disipen la energía de vibración se denominan amortiguadores, y los hay de muchos tipos: de fricción, líquidos, de aire, etc.

-El primer amortiguador usado industrialmente fue el de Lanchester, el cual consta de un disco D unido al eje vibrante y un volante amortiguador V, que gira loco sobre su eje, y que por medio de un resorte es obligado a comprimirse contra el disco D, por intermedio de un material de fricción cualquiera.



La fuerza normal N provoca una fuerza de rozamiento entre el volante y el disco, de manera que pueden darse varias circunstancias:

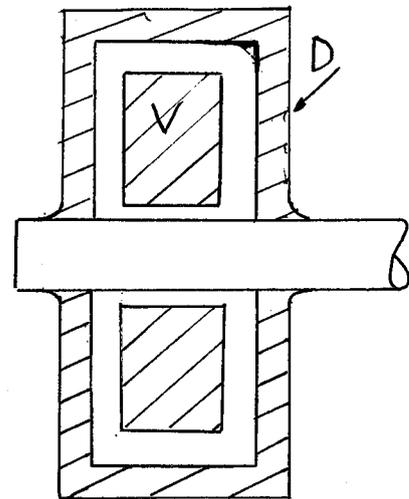
Si N es muy grande, la masa V se coloca contra la D, de manera que ambas se mueven al unísono, y no hay disipación de energía (lo único que se consigue es aumentar el momento de inercia del disco vibrante, que ahora será $I_D + I_V$).

Si N es muy pequeña, V girará con cierto deslizamiento respecto de D, con un par de fricción despreciable y por tanto sin disipación de energía.

Entre estos dos extremos se encuentra el óptimo valor de N , que origina un par de fricción (en el movimiento relativo de V y D) que disipa la máxima cantidad de energía.

Este amortiguador tiene importantes problemas prácticos asociados a la dificultad de mantener un par de rozamiento constante con la variación de temperatura, desgaste del material, inclusión de aceite lubricante, etc.

-Para evitar los problemas del amortiguador de Lanchester se ha desarrollado el amortiguador de torsión viscoso, que consiste en un volante V que gira loco sobre su eje, encerrado en una campana D que gira solidaria al eje vibrante, estando el espacio libre entre ambos relleno de un



líquido viscoso cuya viscosidad no se modifica con la temperatura.

Si θ_D es el ángulo instantáneo en el disco (respecto de una dirección de referencia) y θ_V el del volante (respecto de la misma referencia), el ángulo instantáneo relativo entre disco y volante será:

$$\theta_r = \theta_D - \theta_V$$

El par de inercia que actúa sobre el volante (producido por la fricción viscosa), será:

$$I_V \cdot \ddot{\theta}_V$$

el cual será igual al par producido por la fricción viscosa:

$$C \cdot \dot{\theta}_r$$

de manera que tendremos:

$$I_V \cdot \ddot{\theta}_V = C \cdot \dot{\theta}_r = C (\dot{\theta}_D - \dot{\theta}_V) \quad [1]$$

Si la vibración del eje-disco es de tipo armónico:

$$\theta_D = \Theta_D \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t$$

Se tendrá al sustituir:

$$I_V \cdot \ddot{\theta}_V = C (\Theta_D \cdot \omega_E \cdot \text{Cos } \omega_E \cdot t - \dot{\theta}_V)$$

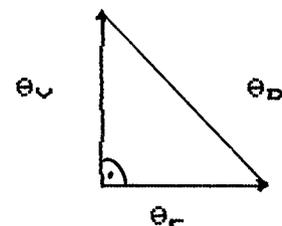
$$I_V \cdot \ddot{\theta}_V + C \cdot \dot{\theta}_V = C \cdot \Theta_D \cdot \omega_E \cdot \text{Cos } \omega_E \cdot t \quad [2]$$

que representan la vibración de torsión de un sistema de 1 GDL, excitado por el par:

$$T = C \cdot \Theta_D \cdot \omega_E \cdot \text{Cos } \omega_E \cdot t$$

En la ecuación [2] se observa que $I_V \cdot \ddot{\theta}_V$ (considerado como vector) está desfasado 180° respecto de θ_V y 90° respecto a θ_r . En consecuencia θ_V y θ_r están desfasados 90° .

(En la figura se han representado, en forma gráfica, las posiciones relativas de θ_r , θ_V y θ_D)



En consecuencia:

$$\theta_r = \sqrt{\theta_D^2 - \theta_V^2} \quad [3]$$

Si el movimiento de V también es de tipo armónico:

$$\theta_V = \Theta_V \cdot \text{Sen } \omega_E t$$

$$\dot{\theta}_V = \omega_E \cdot \Theta_V \cdot \text{Cos } \omega_E t$$

$$\ddot{\theta}_V = -\omega_E^2 \cdot \Theta_V \cdot \text{Sen } \omega_E t = -\omega_E^2 \cdot \theta_V$$

Sustituyendo en la ecuación [2] y operando:

$$I_V \cdot \omega_E^2 \cdot \theta_V = c \cdot \omega_E \cdot \theta_r \quad [4]$$

de donde se obtiene, después de sustituir [3] en [4]

$$\theta_V = \frac{1}{\sqrt{1 + (I_V \cdot \omega_E / c)^2}} \cdot \theta_D \quad [5]$$

expresión que concuerda con la realidad física

$$c = 0 \quad \implies \theta_V = 0 \quad ; \quad c = \infty \quad \implies \theta_V = \theta_D$$

El par máximo transmitido por el disco al volante amortiguador V será (según [4])

$$T_r = I_V \cdot \omega_E^2 \theta_V$$

La energía disipada por ciclo será la producida por este par actuando sobre un desplazamiento relativo θ_r , entre los cuales existe un desfase de 90° , (según indica [1]).

NOTA: Según vimos, en un movimiento vibratorio,

$$F = F_0 \cdot \text{Sen } (\omega_E \cdot t + \delta)$$

$$x = X \cdot \text{Sen } \omega_E t$$

$$\omega_E = \pi \cdot F_0 \cdot X \cdot \text{Sen } \delta$$

En nuestro caso:

$$W_c = \pi \cdot (I_V \cdot W_E^2 \cdot \theta_V) \cdot \theta_D = \pi \cdot (I_V \cdot W_E^2 \cdot \theta_V) \cdot \sqrt{\theta_D^2 - \theta_V^2}$$

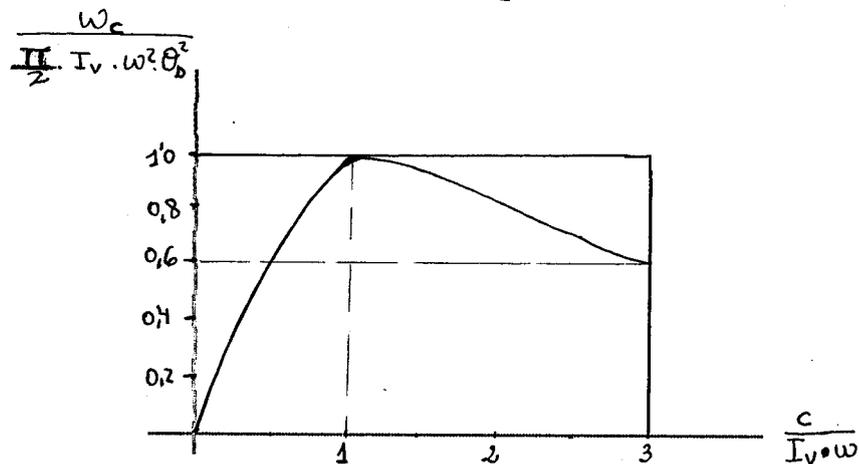
Sustituyendo [5] en esta expresión:

$$W_c = \pi/2 \cdot I_V \cdot W_E^2 \cdot \theta_D \cdot \frac{2 \cdot c / I_V \cdot W_E}{1 + (c / I_V \cdot W_E)^2} \quad [6]$$

que también se puede escribir

$$\frac{W_c}{\pi/2 \cdot I_V \cdot W_E^2 \cdot \theta_D} = \frac{2 \cdot c / I_V \cdot W_E}{1 + (c / I_V \cdot W_E)^2} \quad [7]$$

En el dibujo se ha representado gráficamente esta ecuación



El segundo miembro de [7] alcanza su valor máximo para $c / (I_V \cdot W_E) = 1$.

Por consiguiente el amortiguamiento óptimo para una disipación máxima de energía será:

$$C_{opt} = 1 \cdot I_V \cdot W_E$$

y por consiguiente:

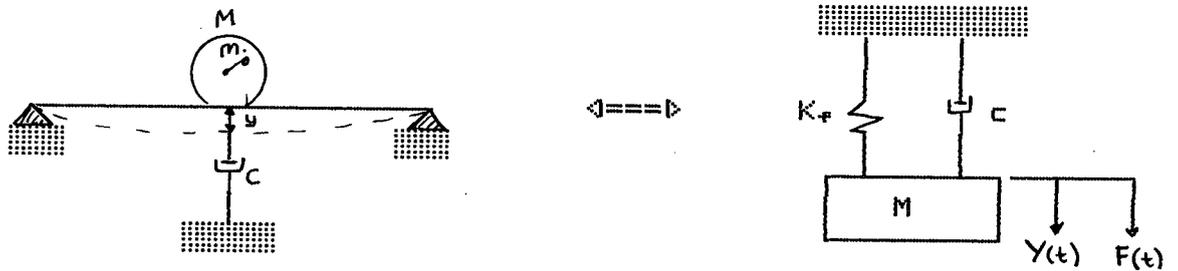
$$W_{max} = \pi/2 \cdot I_V \cdot W_E^2 \cdot \theta_D^2$$

3-1.-VIBRACIONES DE FLEXION EN VIGAS

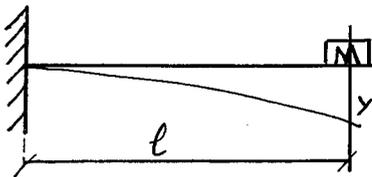
-Las vigas sometidas a vibración pueden considerarse sistemas de 1 GDL cuando toda su masa puede suponerse concentrada en un sólo punto de la luz.

También pueden considerarse sistemas de 1 GDL las vigas que soportan cargas puntuales elevadas (por ejemplo, una viga que soporta un motor desequilibrado), y frente a la cual la propia masa de la viga puede ser despreciada.

-A todos los efectos, estos sistemas pueden considerarse equivalente a los masa-resorte, como se ve en la figura



-A título de ejemplo vamos a calcular la frecuencia natural de la viga de la figura, con una masa M en su extremo, al apartársela de su posición de equilibrio.



La ecuación del movimiento es:

$$M \cdot \ddot{y} + K_f \cdot y = 0$$

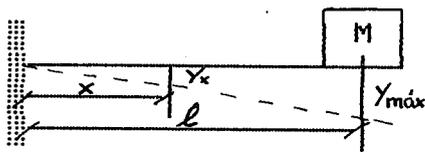
Como

$$K_f = \frac{M \cdot g}{\delta} = \frac{M \cdot g}{M \cdot g \cdot l^3 / 3EI} = \frac{3EI}{l^3}$$

La frecuencia natural será:

$$\omega_n = \sqrt{K/M} = \sqrt{3EI/MI^3}$$

-Como un segundo ejemplo, vamos a calcular la frecuencia natural de la viga por el método de Rayleigh, pero considerando además la masa de la viga (por unidad de longitud, m), pequeña en comparación con la masa M en el extremo.



Con estas premisas puede suponerse que la deflexión de la viga durante la vibración tiene la misma forma que

la deflexión estática debida a la carga M .

De las teorías de elasticidad se obtiene la relación geométrica (de formación debida a M)

$$y = y_{\text{máx}} \left[\frac{3 \cdot x^2 \cdot l - x^3}{2l^3} \right]$$

La máxima energía cinética de la viga, solamente será:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^l m \cdot \dot{y}_{\text{máx}} \cdot \left[\frac{3 \cdot x^2 \cdot l - x^3}{2l^3} \right]^2 \cdot dx = \frac{33}{140} \cdot m \cdot l \cdot \frac{\dot{y}_{\text{máx}}^2}{2}$$

A la que habrá de añadirse la energía cinética de la masa M

$$\frac{1}{2} M \cdot \dot{y}_{\text{máx}}^2$$

de manera que la energía cinética total máxima será la misma que la correspondiente a una masa

$$M' = M + \frac{33}{140} \cdot m \cdot l$$

situada en el extremo de una viga sin masa.

La energía potencial máxima será:

$$\frac{1}{2} K_f \cdot y_{\max}^2$$

Con lo cual queda, al igualar la máxima energía cinética con la máxima energía potencial:

$$\frac{1}{2} \dot{y}_{\max}^2 \cdot \left[M + \frac{33}{140} \cdot m \cdot l \right] = \frac{1}{2} K_f \cdot y_{\max}^2$$

Si el movimiento vibratorio es de tipo armónico:

$$y = y_{\max} \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t$$

$$\dot{y} = \omega_E \cdot y_{\max} \cdot \text{Cos } \omega_E \cdot t$$

Con lo que al sustituir los valores máximos:

$$\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \omega_E \cdot y_{\max} \cancel{^2} \cdot \left[M + \frac{33}{140} \cdot m \cdot l \right] = \cancel{\frac{1}{2}} K_f \cdot y_{\max} \cancel{^2}$$

De donde

$$\omega = \sqrt{\frac{K_f}{M + \frac{33}{140} \cdot m \cdot l}} = \sqrt{\frac{3EI}{13 \cdot \left[M + \frac{33}{140} \cdot m \cdot l \right]}}$$

ANÁLISIS GENERAL DE LOS SISTEMAS VIBRANTES MASA-RESORTE DE 2 GDL

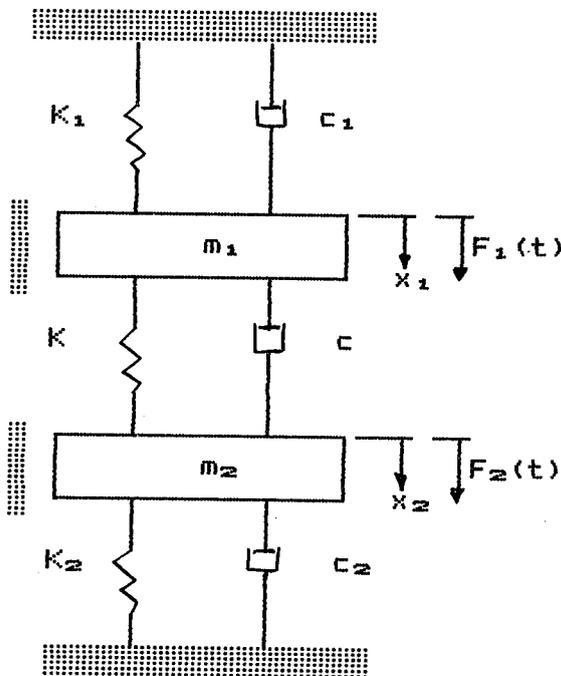
- 1.- Formulacion general de las ecuaciones del movimiento
- 2.- Vibracion libre en sistemas no amortiguados, de 2 GDL
 - 2-1.- Introducción
 - 2-2.- Cálculo general
 - 2-3.- Acoplamiento de coordenadas. Coordenadas principales
- 3.- Vibración libre, en sistemas amortiguados de 2 GDL
- 4.- Vibraciones forzadas en sistemas no amortiguados de 2 GDL
- 5.- Vibraciones forzadas en sistemas amortiguados de 2 GDL
- 6.- Cálculo de la respuesta por métodos numéricos.

1.-FORMULACION GENERAL DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO VIBRATORIO EN SISTEMAS MECANICOS DE 2 GDL

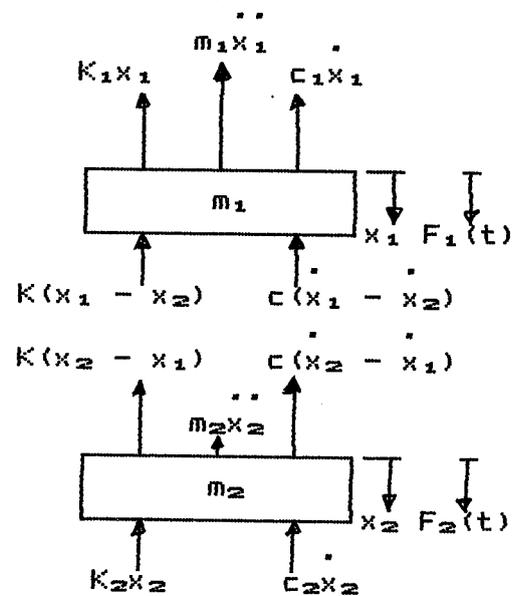
La figura representa un caso general de un sistema con 2 GDL, formado por dos masas m_1 y m_2 , unidas entre sí por el resorte K y el amortiguador c , y a su vez, unidas a los soportes fijos por los resortes y amortiguadores respectivos K_1 , c_1 y K_2 , c_2 .

Ambas masas son excitadas por las fuerzas $F_1(t)$ y $F_2(t)$

Las coordenadas independientes x_1 y x_2 definen la configuración del sistema en cada instante.



Diagramas de cuerpo libre:



Si le damos a la masa m_1 un desplazamiento x_1 , y a la m_2 un desplazamiento x_2 , tales que $x_1 > x_2$, la situación sería la representada en las figuras.

Equilibrio de m_1 :

El desplazamiento hacia abajo de m_1 estira el resorte K_1 , y el movimiento es impedido por el amortiguador c_1 . Por tanto, las fuerzas K_1x_1 y $c_1\dot{x}_1$, van hacia arriba.

Como $x_1 > x_2$, el resorte K queda "comprimado" $(x_1 - x_2)$ y el movimiento es impedido por el amortiguador c .

En consecuencia, las fuerzas $K(x_1 - x_2)$ y $c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ también van hacia arriba.

Equilibrio de m_2

Al ser $x_2 < x_1$, el resorte K empuja hacia abajo con la fuerza $-K(x_1 - x_2)$ (que equivale a poner $+K(x_2 - x_1)$ hacia arriba), y lo mismo ocurre con el amortiguador $-c(x_1 - x_2) = +c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$

Finalmente, el resorte K_2 y el amortiguador c_2 impiden el movimiento x_2 , empujando hacia arriba.

-En consecuencia, las dos ecuaciones de equilibrio serán:

$$m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + K(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_1(t) \quad [1]$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + K_2 x_2 + c_2 \dot{x}_2 + K(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = F_2(t) \quad [2]$$

Ecuaciones que también pueden escribirse:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c) \dot{x}_1 - c \dot{x}_2 + (K_1 + K) x_1 - K x_2 = F_1(t) \quad [3]$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c) \dot{x}_2 - c \dot{x}_1 + (K_2 + K) x_2 - K x_1 = F_2(t) \quad [4]$$

Las ecuaciones [1], [2], [3] y [4] representan el movimiento de las dos masas m_1 y m_2 .

La solución de ambas permite hallar x_1 y x_2 .

En forma matricial podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c & -c \\ -c & c_2+c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K & -K \\ -K & K_2+K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

Esta ecuación, como se ve, es un caso particular de la ecuación más general:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

llamando:

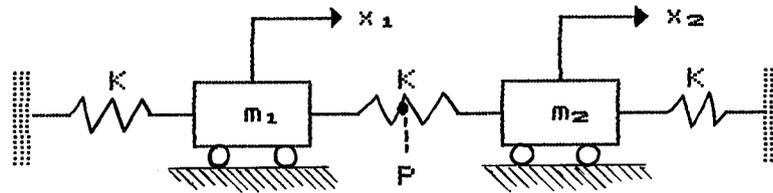
$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = [\mathbf{M}] = \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{de} \\ \text{inercia} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}] = \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{de} \\ \text{amortiguación} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = [\mathbf{K}] = \text{matriz de rigidez}$$

queda finalmente:

$$[\mathbf{M}] \cdot \ddot{[x]} + [\mathbf{C}] \cdot \dot{[x]} + [\mathbf{K}] \cdot [x] = [F]$$

2-1.-INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LA VIBRACION LIBRE DE SISTEMAS
CON 2 GDL, NO AMORTIGUADOS.-



Intuitivamente, el comportamiento de este sistema puede comprenderse someramente.

En efecto, imaginemos el sistema de la figura, en donde las masas son iguales ($m_1 = m_2$) y los resortes, también.

Es fácil entender que si damos a las dos masas un desplazamiento inicial igual para ambas, hacia la derecha, $x_1(0) = x_2(0)$, y luego las soltamos, las dos masas iniciaran un movimiento oscilatorio, ambas con la misma frecuencia, no actuando para nada el resorte central (el movimiento sera el equivalente al de cada una de las masas actuando por separado). Igualmente, si desplazamos la masa m_1 hacia la izquierda una distancia $x_1(0)$ y la masa m_2 , la misma cantidad, pero hacia la derecha $x_2(0) = -x_1(0)$, y luego las soltamos, ambas masas empezaran a oscilar, también con la misma frecuencia, pero en contraposición. El punto central P no se moverá, y el resultado es el mismo que si ambas masas actuaran independientemente.

Sin embargo, la frecuencia del movimiento de las dos masas en este segundo caso es más rápido que en el primero, como también puede intuirse, o comprobarse experimentalmente.

Si en lugar de ser las dos masas iguales y también los tres resortes, fueran todos diferentes $m_1 \neq m_2$ y $K_1 \neq K_2 \neq K_3$, podemos extrapolar tales intuiciones señalando que según sea

la relación entre tales valores, debe haber un desplazamiento inicial $x_1(0)$ y $x_2(0)$ de cada masa para los cuales, al quedar liberadas, ambas oscilan con la misma frecuencia, aunque con diferentes amplitudes (precisamente iguales a los desplazamientos iniciales respectivos).

Por supuesto, si los desplazamientos iniciales tienen el mismo sentido, la frecuencia idéntica de ambas será un valor diferente al que se obtenga para desplazamientos iniciales en sentidos contrarios (que siempre será mayor).

Las frecuencias w_1 (a la que se mueven las dos masas, paralelamente) y la w_2 (a la que se mueven también las dos masas, con movimientos contrapuestos), reciben el nombre de frecuencias propias o naturales del sistema, y juegan el mismo papel que la w_n de sistemas de 1 GDL.

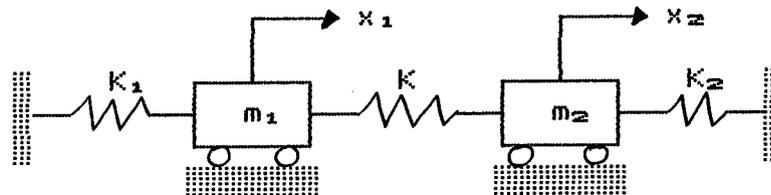
El valor más pequeño de ambas (w_1 , en ste caso) se llama frecuencia fundamental).

Finalmente, también queremos señalar que el movimiento arbitrario de un sistema con 2 GDL siempre es una combinación lineal de los movimientos producidos por estas frecuencias naturales.

Veamos todo lo expuesto, matemáticamente.

2-2.-CALCULO GENERAL DE LA VIBRACION DE SISTEMAS LIBRES DE 2 GDL

Sea el sistema de 2 GDL de la figura:



Por aplicación de la ecuación de Newton a cada masa se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (K_1 + K) \cdot x_1 - K \cdot x_2 = 0 \quad [1]$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - K \cdot x_1 + (K_2 + K) \cdot x_2 = 0 \quad [2]$$

La solución de las ecuaciones [1] y [2], por carecer de términos en \dot{x} es de la forma:

$$x_1 = X_1 \cdot \text{Sen} (w \cdot t + \delta) \quad [3]$$

$$x_2 = X_2 \cdot \text{Sen} (w \cdot t + \delta) \quad [4]$$

siendo X_1 , X_2 , w y δ valores a determinar.

Calculando en [3] y [4] los valores de \ddot{x}_1 y \ddot{x}_2 , y sustituyendo en [1] y [2], tendremos:

$$(-m_1 \cdot w^2 + K_1 + K) \cdot X_1 - K \cdot X_2 = 0$$

$$-K \cdot X_1 + (-m_2 \cdot w^2 + K_2 + K) \cdot X_2 = 0$$

que es un sistema de ecuaciones algebraicas en las variables X_1 y X_2 .

Tal sistema tendrá solución distinta de la trivial, (es decir, no nula), cuando el determinante de los coeficientes de las incógnitas sea cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} (K_1 + K) - m_1 \cdot \omega^2 & -K \\ -K & (K_2 + K) - m_2 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad [7]$$

Desarrollando y ordenando:

$$\omega^4 - \left[\frac{K_1 + K}{m_1} + \frac{K_2 + K}{m_2} \right] \cdot \omega^2 + \left[\frac{K_1 + K}{m_1} + \frac{K_2 + K}{m_2} - \frac{K^2}{m_1 \cdot m_2} \right] = 0 \quad [8]$$

Esta ecuación se llama "ecuación característica del sistema". Para resolver esta ecuación, podemos introducir las siguientes notaciones:

$$w_{11}^2 = \frac{K_1 + K}{m_1} ; \quad w_{22}^2 = \frac{K_2 + K}{m_2} ; \quad w_{12}^2 = \frac{K^2}{m_1 + m_2}$$

con lo cual la ecuación característica puede escribirse:

$$\omega^4 - (w_{11}^2 + w_{22}^2) \cdot \omega^2 + w_{11}^2 \cdot w_{12} - w_{12}^2 = 0 \quad [9]$$

NOTA: Las cantidades w_{11} , w_{22} y w_{12} tienen unos significados físicos concretos.

En efecto, si suponemos fija la masa m_2 ($x_2 = 0$) el sistema queda reducido a:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -(K_1 + K) \cdot x_1$$

con lo que la frecuencia natural de la masa m_1 será:

$$w_{11} = \sqrt{(K + K_1)/m_1}$$

Si por el contrario, se mantiene fija m_1 y se libera m_2 , se tendrá:

$$m_2 \ddot{x}_2 = -(K_2 + K) \cdot x_2$$

de donde:

$$w_{22} = \sqrt{(K + K_2)/m_2}$$

Las raíces de la ecuación característica serán:

$$w_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (w_{11}^2 + w_{22}^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(w_{11}^2 + w_{22}^2)^2 - 4(w_{11}^2 \cdot w_{22}^2 - w_{11}^2)}$$

[10]

La ecuación característica tiene por tanto dos soluciones (en w^2), y ambas son positivas. A partir de estos valores w_1^2 y w_2^2 pueden hallarse los de w_1 y w_2 , (tomando sólo los valores positivos, por carecer los negativos de significado físico -de $w_1 = \pm\sqrt{w_1^2}$; sólo $w_1 = +\sqrt{w_1^2}$). Estos dos valores de w_1 y w_2 son las frecuencias propias o naturales de este sistema, y dependen, como se ve de las relaciones entre K_1 , K_2 , K , m_1 y m_2 .

Desempeñan el mismo papel que la w_n de un sistema de 1 GDL.

El menor de los dos valores w_1 y w_2 se conoce como "frecuencia propia fundamental".

-Como tanto w_1 como w_2 satisfacen el sistema, quiere decir que a estas frecuencias naturales ambas masas vibran al unísono, por lo que también se les llama "modos normales de

vibración". (ambas masas experimentan un movimiento armónico de la misma frecuencia, pasando ambas, simultáneamente, por la posición de equilibrio)

-Para cada uno de estos "modos normales" pueden hallarse la relación entre las amplitudes de los movimientos de ambas masas, lo que se conoce por "formas modales" del movimiento. (Puesto que las diferentes amplitudes de cada masa dan origen a los cambios de forma del sistema vibrante).

Para el primer modo, es decir, cuando las dos masas vibran a la frecuencia ω_1 , las ecuaciones [5] y [6] nos dan:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_1 = \frac{X_{11}}{X_{21}} = \frac{K}{K_1 + K - m_1 \cdot \omega_1^2} = \frac{K_2 + K - \omega_1^2 \cdot m_2}{K} = \mu_1 \quad [11]$$

En donde X_{11} representa la amplitud de la vibración de la masa 1 (de x_1) cuando vibra en el modo 1 (a ω_1) y X_{21} , representa la amplitud de vibración de la masa 2 (de x_2) cuando vibra en el modo 1 (de ω_1).

Como vemos, no se sabe aún lo que vale X_{11} y X_{21} , sino sólo la relación entre ellas.

Para el segundo modo normal, es decir, cuando ambas masas se mueven con movimiento armónico, al unísono, como la frecuencia ω_2 , se tendrá:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_2 = \frac{X_{12}}{X_{22}} = \frac{K}{K_2 + K - m_1 \cdot \omega_2^2} = \frac{K_2 + K - \omega_2^2 \cdot m_2}{K} = \mu_2 \quad [12]$$

Esto quiere decir que los valores de X_{11} y X_{12} pueden expresarse en función de los X_{21} y X_{22} (o viceversa).

Como consecuencia de todo lo expuesto, la solución del sistema será una combinación lineal de los modos principales, en la forma:

$$x_1 = \mu_1 \cdot X_{21} \cdot \text{Sen}(w_1 t + \delta_1) + \mu_2 \cdot X_{22} \cdot \text{Sen}(w_2 t + \delta_2)$$

$$x_2 = X_{21} \cdot \text{Sen}(w_1 t + \delta_1) + X_{22} \cdot \text{Sen}(w_2 t + \delta_2)$$

en donde son sólo 4 las ctes. a determinar: X_{21} , X_{22} , δ_1 y δ_2 . Tales valores se hallarán en función de las condiciones iniciales $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$ y $\dot{x}_2(0)$.

-En algunos casos, alguna de estas ctes, X_{11} , X_{12} , X_{21} o X_{22} pueden ser nulas, con lo cual los "modos principales" aparecerán sólo.

Si $X_{22} = 0$, quedará:

$$x_1 = \mu_1 \cdot X_{21} \cdot \text{Sen}(w_1 t + \delta_1)$$

$$x_2 = X_{21} \cdot \text{Sen}(w_1 t + \delta_1)$$

y el sistema vibrará en el modo 1.

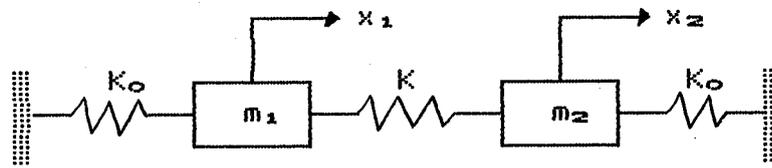
Análogamente, si $X_{21} = 0$,

$$x_1 = \mu_2 \cdot X_{22} \cdot \text{Sen}(w_2 t + \delta_2)$$

$$x_2 = X_{22} \cdot \text{Sen}(w_2 t + \delta_2)$$

y el sistema vibrará en el modo 2.

NOTA: Un ejemplo aclarará mejor estos conceptos:



Sea $m_1 = m_2 = m$; $K_1 = K_2 = K_0$

La ecuación característica queda reducida a la siguiente:

$$w^4 - 2 \cdot \frac{K_0 + K}{m} \cdot w^2 + \frac{K_0 (K_0 + 2K)}{m^2} = 0$$

Las soluciones son:

$$w_{1,2}^2 = \frac{K_0 + K}{m} \pm \sqrt{\left[\frac{K_0 + K}{m} \right]^2 - \frac{K_0 (K_0 + 2K)}{m^2}} = 0$$

que conduce a su vez a: (tomando sólo los valores positivos)

$$w_1^2 = K_0/m \quad \text{y} \quad w_2^2 = (K_0 + 2K)/m$$

que son las dos frecuencias naturales del sistema.

Sustituyendo en [17] y [18], se tiene:

$$\frac{x_{11}}{x_{21}} = \frac{K_0 + K - m \cdot (K_0)/m}{K} = +1 = \mu_1$$

$$\frac{x_{12}}{x_{22}} = \frac{K_0 + K - m \cdot (K_0 + 2K)/m}{K} = -1 = \mu_2$$

En consecuencia, las soluciones del sistema serán:

$$x_1 = +1 \cdot X_{21} \cdot \text{Sen} (w_1 t + \delta_1) - 1 \cdot X_{22} \cdot \text{Sen} (w_2 t + \delta_2)$$

$$x_2 = X_{21} \cdot \text{Sen} (w_1 t + \delta_1) + X_{22} \cdot \text{Sen} (w_2 t + \delta_2)$$

Si tomamos, como condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_0 \\ \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \end{array} \right.$$

es decir, si desplazamos las dos masas inicialmente una cantidad x_0 , igual para ambas, y luego las soltamos con velocidad nula.

$$\dot{x}_1 = w_1 \cdot X_{21} \cdot \text{Cos} (w_1 t + \delta_1) - w_2 \cdot X_{22} \cdot \text{Cos} (w_2 t + \delta_2)$$

$$\dot{x}_2 = w_1 \cdot X_{21} \cdot \text{Cos} (w_1 t + \delta_1) + w_2 \cdot X_{22} \cdot \text{Cos} (w_2 t + \delta_2)$$

queda, según las condiciones iniciales señaladas:

$$x_0 = X_{21} \cdot \text{Sen} \delta_1 - X_{22} \cdot \text{Sen} \delta_2 \quad 1$$

$$x_0 = X_{21} \cdot \text{Sen} \delta_1 + X_{22} \cdot \text{Sen} \delta_2 \quad 2$$

$$0 = X_{21} \cdot w_1 \cdot \text{Sen} \delta_1 - X_{22} \cdot \text{Sen} \delta_2 \cdot w_2 \quad 3$$

$$0 = X_{21} \cdot w_1 \cdot \text{Sen} \delta_1 + X_{22} \cdot \text{Sen} \delta_2 \cdot w_2 \quad 4$$

Sumando 1 y 2:

$$2 \cdot x_0 = 2 \cdot X_{21} \cdot \text{Sen} \delta_1 \implies \text{Sen} \delta_1 = x_0 / X_{21}$$

$$X_{21} = x_0 / \text{Sen} \delta_1$$

Restando 1 y 2:

$$0 = 2 \cdot X_{22} \cdot \text{Sen} \delta_2 \implies \delta_2 = 0 \quad \text{si } X_{22} \neq 0$$

Restando 4 y 3:

$$0 = 2 \cdot X_{22} \cdot w_2 \cdot \cos \delta_2 \implies \delta_2 = 0$$

$$\implies 2 \cdot X_{22} \cdot w_2 = 0 \qquad X_{22} = 0$$

Sumando 3 y 4:

$$0 = 2 \cdot X_{21} \cdot w_1 \cdot \cos \delta_1 \implies X_{21} \cdot \cos \delta_1 = 0$$

$$X_{21} \cdot (\sqrt{1 - (x_0^2 / X_{21}^2)}) = 0 \implies X_{21} = x_0$$

con lo que queda, en resumen:

$$X_{21} = x_0 \qquad \text{Sen } \delta_1 = 1 \qquad \delta_1 = \pi/2$$

$$X_{22} = 0 \qquad \delta_2 = 0$$

Y las ecuaciones del movimiento serán:

$$x_1 = x_0 \cdot \text{Sen}(w_1 t + \pi/2) = x_0 \cdot \text{Cos } w_1 t$$

$$x_2 = x_0 \cdot \text{Sen}(w_1 t + \pi/2) = x_0 \cdot \text{Cos } w_1 t$$

Es decir, las dos masas se moverán con idéntico movimiento, de frecuencia $w_1 = \sqrt{K_0/m}$ y amplitudes x_0 .

Si las condiciones inicales fueran:

$$t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0 \\ x_2 = -x_0 \\ \cdot \\ x_1 = 0 \\ \cdot \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(desplazamientos iniciales} \\ \text{iguales y contrarios)} \end{array}$$

quedarán:

$$x_0 = X_{21} \cdot \text{Sen } \delta_1 - X_{22} \cdot \text{Sen } \delta_2 \qquad [1]$$

$$-x_0 = X_{21} \cdot \text{Sen } \delta_1 + X_{22} \cdot \text{Sen } \delta_2 \qquad [2]$$

$$0 = X_{21} \cdot w_1 \cdot \text{Cos } \delta_1 - X_{22} \cdot w_2 \cdot \text{Cos } \delta_2 \qquad [3]$$

$$0 = X_{21} \cdot w_1 \cdot \text{Cos } \delta_1 + X_{22} \cdot w_2 \cdot \text{Cos } \delta_2 \qquad [3]$$

Sumando 1 y 2:

$$0 = 2 \cdot X_{21} \cdot \text{Sen } \vartheta_1 \implies \vartheta_1 = 0 \quad X_{21} = 0$$

Restando 1 y 2:

$$-2 \cdot x_0 = -2 \cdot X_{22} \cdot \text{Sen } \vartheta_2 \implies \text{Sen } \vartheta_2 = \frac{x_0}{X_{22}}; \quad X_{22} = \frac{x_0}{\text{Sen } \vartheta_2}$$

Sumando 3 y 4:

$$0 = 2 \cdot X_{21} \cdot w_1 \cdot \text{Cos } \vartheta_1 \implies (\vartheta_1 = 0); \quad X_{21} = 0$$

Restando 3 y 4:

$$0 = -2 \cdot X_{22} \cdot w_2 \cdot \text{Cos } \vartheta_2$$

$$0 = -2 \cdot X_{22} \cdot w_2 \cdot \sqrt{1 - (x_0^2 / X_{22}^2)} \implies x_0 = X_{22}$$

Con lo cual, la solución del sistema será:

$$x_1 = -x_0 \cdot \text{Sen } (w_2 t + \pi/2) = -x_0 \cdot \text{Cos } w_2 t$$

$$x_2 = x_0 \cdot \text{Sen } (w_2 t + \pi/2) = x_0 \cdot \text{Cos } w_2 t$$

Es decir, las dos masas se moverán con idéntico movimiento $w_2 = \sqrt{(K_0 + 2K)/m}$, con amplitudes iguales, pero en sentidos contrarios.

NOTA: En los sistemas vibrantes con 2 GDL también se da el fenómeno de pulsación.

Si en el mismo caso del ejemplo anterior tomamos como condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{ll} x_1 = 1 & \dot{x}_1 = 0 \\ x_2 = 0 & \dot{x}_2 = 0 \end{array} \right.$$

La solución sería del tipo:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \cos w_1 t - \frac{1}{2} \cdot \cos w_2 t$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \cos w_1 t + \frac{1}{2} \cdot \cos w_2 t$$

(El desplazamiento inicial $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$ puede considerarse como la suma de dos partes: $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$ y otro, $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$, para cada uno de los cuales se halló antes la solución).

En este caso, el movimiento de ambas masas no es armónico, al estar formado por la suma (o diferencia) de dos movimientos de igual amplitud pero frecuencias diferentes.

Si $K \ll K_0$, es decir, si el resorte que une ambas masas es muy blando respecto de los otros dos, aparece el fenómeno de pulsación:

$$w_1 = \sqrt{K_0/m} \approx w_2 = \sqrt{(K_0 + K)/m}$$

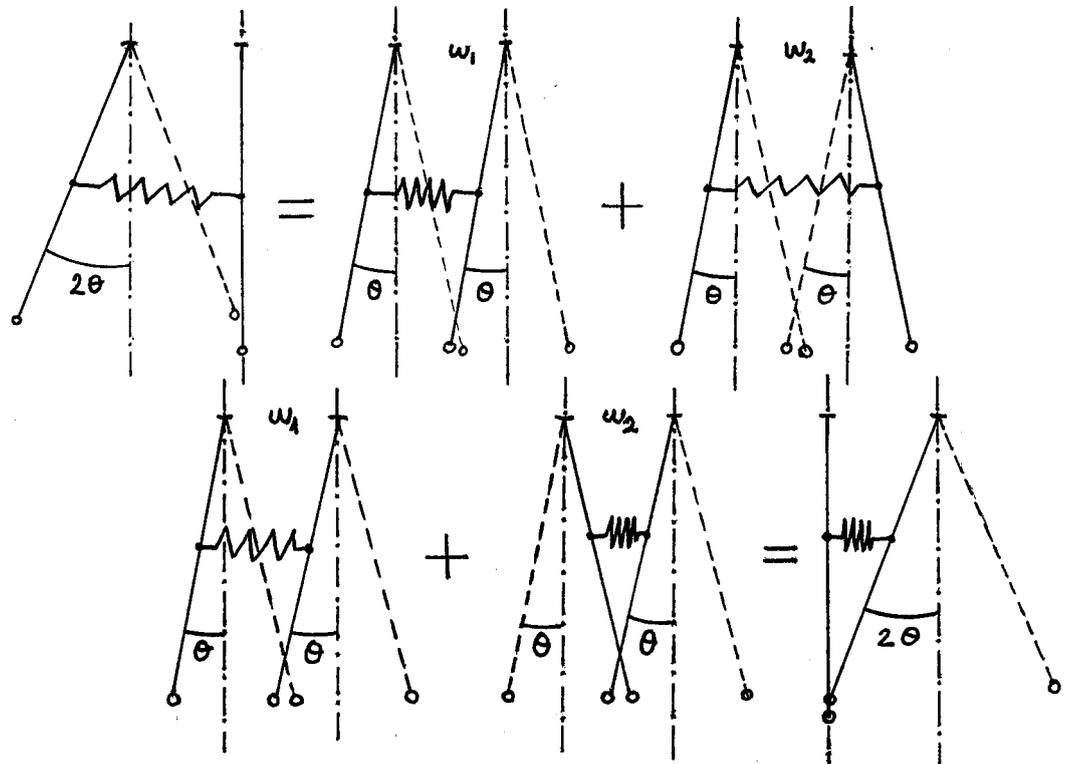
Con el desplazamiento inicial $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, m_1 vibrará primeramente con amplitud 1, mientras que m_2 permanecerá prácticamente en reposo.

Luego, m_2 comenzará a vibrar, aún cuando más rápidamente que m_1 , por lo que al cabo de un cierto tiempo, será m_2 la que vibre, mientras que m_1 quedará en reposo.

Es decir, aparecerá el conocido fenómeno de "pulsación"

Si sustituimos las dos masas vibrantes y los tres resortes por dos péndulos de masa m y un resorte de

unión K, el fenómeno expresado queda de manifiesto más claramente:



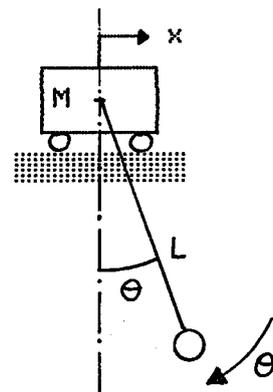
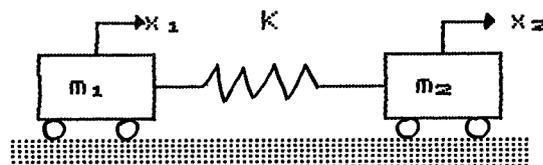
El movimiento se inicia tirando del péndulo izquierdo hacia la izquierda, colocándolo hasta el ángulo 2θ , y manteniendo el péndulo derecho en la vertical. Ello equivale a la suma de las dos posiciones mostradas en la figura, con ángulo $\theta/2$, pero con distintas frecuencias ω_1 y ω_2 , siendo $\omega_2 > \omega_1$.

El movimiento de los dos péndulos es, en todo momento, la suma de los movimientos con ω_1 y ω_2 , de amplitudes $\theta/2$.

Al ser el resorte K blando, al liberar el péndulo de la izquierda vibrará con frecuencia ω_1 , mientras que el segundo apenas se moverá, puesto que $\omega_2 \approx \omega_1$, y ambos semipéndulos irán a la par (primeras figuras).

Como w_2 es un poco mayor que w_1 , llegará un momento en que el movimiento w_2 estará adelantado 180° respecto del w_1 (como se ve en la otra figura). Efectuando la suma, se ve que es ahora el péndulo izquierdo el que apenas se mueve, mientras el derecho oscila con todo su amplitud. El fenómeno se va repitiendo. El movimiento se va trasladando de una masa a otra, y el fenómeno se conoce como "batimiento".

NOTA: Existen sistemas como los de las figuras, cuya característica principal es que una de las frecuencias naturales es cero. Tales sistemas se llaman semidefinidos.



En el sistema de la izquierda, las ecuaciones del movimiento son:

$$m_1 \ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) = 0$$

Ensayando soluciones del tipo:

$$x_1 = X_1 \cdot \text{Sen} (wt + \phi)$$

$$x_2 = X_2 \cdot \text{Sen} (wt + \phi)$$

Derivando, sustituyendo y ordenando:

$$(K - m_1 \cdot w^2) \cdot X_1 - K \cdot X_2 = 0$$

$$-K \cdot X_1 + (K - m_2 \cdot w^2) \cdot X_2 = 0$$

Igualando a cero el determinante de los coeficientes se hallan las frecuencias naturales

$$\begin{vmatrix} (K - m_1 \cdot w^2) & -K \\ -K & (K - m_2 \cdot w^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$m_1 \cdot m_2 \cdot w^4 - K \cdot (m_1 + m_2) \cdot w^2 = 0$$

$$w^2 \cdot [m_1 \cdot m_2 \cdot w^2 - K \cdot (m_1 + m_2)] = 0$$

Con lo cual:

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{K \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}} \text{ rd/s}$$

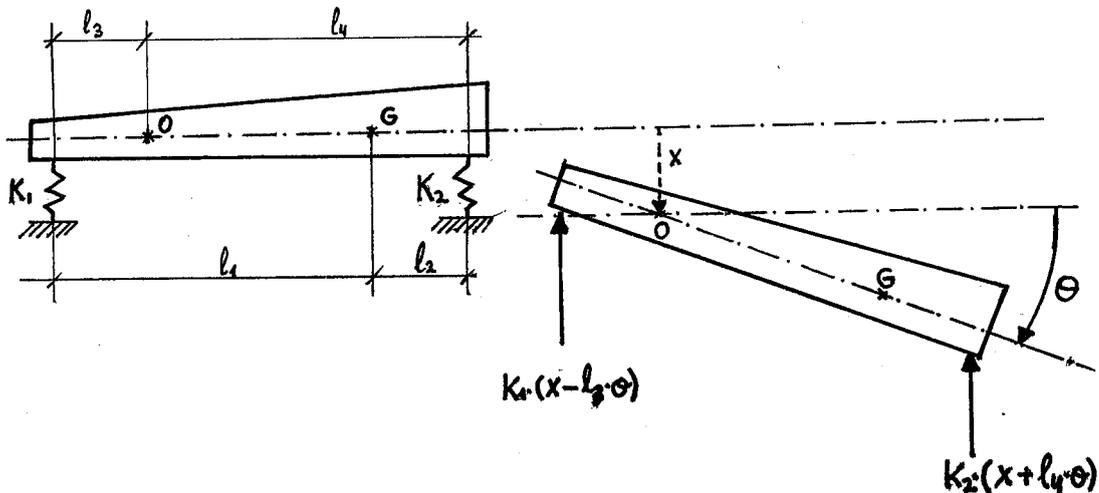
La frecuencia $w_1 = 0$ significa que las dos masas oscilan como un todo, sin movimiento relativo entre ellas. En la práctica, si se desplazan m_1 y m_2 la distancia $x_1 = x_2 = x_{o1} = x_{o2}$; el conjunto no oscila.

2-3.- ACOPLAMIENTO DE COORDENADAS. COORDENADAS PRINCIPALES

-Las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico adquieran formas diferentes, según sea el sistema de coordenadas elegido. Naturalmente, el fenómeno físico es el mismo, por lo que los valores numéricos de las frecuencias naturales, cualquiera que sea el sistema de coordenadas elegido, tienen que ser los mismos, e igual sucede con los modos naturales.

-Suponemos la barra rígida de la figura, sustentada por los resortes K_1 y K_2 (que sólo admiten movimientos sobre la vertical). G es su centro de gravedad.

Tomaremos la posición de equilibrio estático como posición de referencia.



Tomamos como coordenadas los desplazamientos verticales y los giros respecto de un punto de referencia arbitrario O . Para un desplazamiento x y un giro θ , las reacciones serán las mostradas en la figura.

(En la hipótesis de pequeños desplazamientos debidos al giro θ).

Las ecuaciones de Newton serán:

• Del equilibrio de fuerzas

$\Sigma F = 0$; (incluyendo las de inercia)

$$-K_1 \cdot (x - l_3 \cdot \theta) - K_2 \cdot (x + l_4 \cdot \theta) = m \cdot a_G$$

siendo a_G la aceleración del c.d.g.

Como sabemos:

$$x_G = x + (l_1 - l_3) \cdot \theta$$

$$\ddot{x}_G = \ddot{x} + (l_1 - l_3) \cdot \ddot{\theta}$$

Sustituyendo en [1] y ordenando:

$$m \cdot \ddot{x} + m \cdot (l_1 - l_3) \cdot \ddot{\theta} + (K_1 + K_2) \cdot x + (l_4 \cdot K_2 - l_3 \cdot K_1) \cdot \theta = 0$$

[1]

• Del equilibrio de momentos:

$\Sigma M = 0$ (incluyendo los de inercia)

$$M_0 \cdot \bar{K} = I_0 \cdot \ddot{\theta} \cdot \bar{K} + m \cdot \overline{OG} \cdot \bar{A} \cdot a_G$$

$$M_0 = \text{momento de las fuerzas exteriores respecto de } O = \\ = K_1 \cdot (x - l_3 \cdot \theta) \cdot l_3 - K_2 \cdot (x + l_4 \cdot \theta) \cdot l_4$$

Sustituyendo:

$$K_1 \cdot (x - l_3 \cdot \theta) \cdot l_3 - K_2 \cdot (x + l_4 \cdot \theta) \cdot l_4 = I_0 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot (l_1 - l_3) \cdot \ddot{x}$$

Ordenando:

$$m \cdot (l_1 - l_3) \cdot \ddot{x} + I_0 \cdot \ddot{\theta} + (K_2 \cdot l_4 - K_1 \cdot l_3) \cdot x + \\ + (K_1 \cdot l_3^2 + K_2 \cdot l_4^2) \cdot \theta = 0$$

[2]

El movimiento del sistema viene definido por las ecuaciones [1] y [2], que en forma matricial adoptan las formas:

$$\begin{bmatrix} m & m \cdot (l_1 - l_3) \\ m \cdot (l_1 - l_3) & I_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & l_4 \cdot K_2 - l_3 \cdot K_1 \\ l_4 \cdot K_2 - l_3 \cdot K_1 & K_1 \cdot l_3^2 + K_2 \cdot l_4^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como tanto la ecuación [1] como la [2] que describen el movimiento se expresan simultáneamente en función de x y de θ , estas variables estarán relacionadas entre sí, y el sistema se dice que está "acoplado".

-Si el punto O coincide con el c.d.g. G , o sea, si $l_1 = l_3$ y $l_2 = l_4$, las ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & l_2 \cdot K_2 - l_1 \cdot K_1 \\ l_2 \cdot K_2 - l_1 \cdot K_1 & K_1 \cdot l_1^2 + K_2 \cdot l_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso, las coordenadas θ y x están relacionadas por el término no nulo $l_2 \cdot K_2 - l_1 \cdot K_1$, llamado "término de acoplamiento".

(Sin embargo, \ddot{x} y $\ddot{\theta}$ no están relacionadas directamente)

Se observa que en este caso el acoplamiento se establece a través de la matriz de rigidez, por lo que se dice que el acoplamiento es "estático".

Físicamente significa que una fuerza aplicada en G produce simultáneamente un desplazamiento lineal de x y una rotación.

Consecuentemente, un par aplicado alrededor del centro de masa genera, simultáneamente, desplazamientos x y θ . Sin embargo, la fuerza de inercia no produce giro, sino sólo desplazamiento.

-Si el punto O se selecciona de modo que se cumpla la relación:

$$l_3/l_4 = K_2/K_1$$

El movimiento del sistema vendrá dado por la expresión:

$$\begin{bmatrix} m & m \cdot (l_1 - l_3) \\ m \cdot (l_1 - l_3) & I_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & 0 \\ 0 & K_1 \cdot l_3^2 + K_2 \cdot l_4^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso, las coordenadas x y θ están relacionadas por el término $m \cdot (l_1 - l_3)$. El acoplamiento se establece a través de la matriz de inercia, por lo que se llama "acoplamiento dinámico".

Físicamente significa que una fuerza aplicada en O produce un desplazamiento, pero no giro. Igualmente un par alrededor de O produce giro pero no desplazamiento x . Sin embargo, la fuerza de inercia produce un desplazamiento y un giro de la masa.

NOTA: Obsérvese que las matrices $[m]$, $[c]$ y $[K]$ dependen del sistema de coordenadas elegido.

(Sin embargo, las frecuencias propias son valores

fijos, independientes del sistema de referencia).

En términos generales, la ecuación de un sistema de este tipo puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots \\ x_1 \\ \ddots \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

NOTA: En el tratamiento matricial, resulta más sencillo trabajar con "coordenadas generalizadas", que pueden adoptar el valor que en cada caso concreto se le asigne. Por ejemplo en este caso de 2 GDL tendríamos:

$$\begin{array}{ccc} q_1 = x_1 & \text{ó} & q_1 = x \\ q_2 = x_2 & \text{ó} & q_2 = \theta \end{array} \quad \begin{array}{ccc} q_1 = \theta_1 & \text{ó} & q_1 = \theta_2 \\ q_2 = \theta_2 & \text{ó} & q_2 = \theta_1 \end{array}$$

En este caso, la ecuación general del sistema de 2GDL será:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots \\ q_1 \\ \ddots \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o resumidamente:

$$[m] \cdot [\ddot{q}] + [K] \cdot [q] = 0$$

-A la vista de todo lo expuesto cabe hacerse una pregunta:

¿Existe un sistema de coordenadas tal que no aparezca acoplamiento estático ni dinámico en el sistema?

La respuesta es que sí existe, y a tales coordenadas se les llama "coordenadas principales".

En tales condiciones el sistema general (en las coordenadas x_1 y x_2)

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots \\ x_1 \\ \ddots \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se transforma en el nuevo sistema en las coordenadas principales x_{p1} y x_{p2} siguiente:

$$\begin{bmatrix} m'^{11} & 0 \\ 0 & m'^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots \\ x_{p1} \\ \ddots \\ x_{p2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K'^{11} & 0 \\ 0 & K'^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en el cual las matrices $[m']$ y $[K']$ resultan ser diagonales (sistema desacoplado) y por supuesto, los valores de m'^{11} , m'^{22} , K'^{11} y K'^{22} no son iguales a sus homólogos anteriores.

En estas nuevas coordenadas el conjunto de ecuaciones diferenciales que definen el sistema serían en realidad dos ecuaciones diferenciales totalmente independientes:

$$m'^{11} \cdot \ddot{x}_{p1} + K'^{11} \cdot x_{p1} = 0$$

$$m'^{22} \cdot \ddot{x}_{p2} + K'^{22} \cdot x_{p2} = 0$$

cuyas soluciones serán:

$$x_{p1} = A_{11} \cdot \text{Sen} (w_1 t + \bar{\vartheta}_1)$$

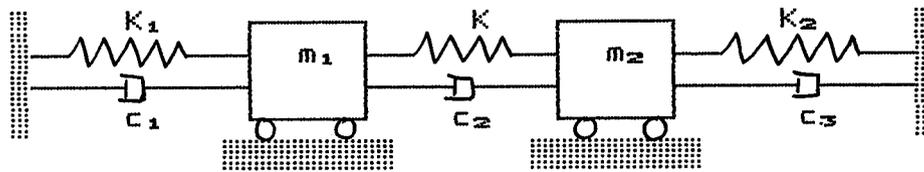
$$x_{p2} = A_{22} \cdot \text{Sen} (w_2 t + \bar{\vartheta}_2)$$

En donde $w_1^2 = K'^{11}/m'^{11}$ y $w_2^2 = K'^{22}/m'^{22}$

Siendo A_{11} , A_{22} , $\bar{\vartheta}_1$, $\bar{\vartheta}_2$ constante a determinar en función de las condiciones iniciales.

3.- VIBRACION LIBRE DE SISTEMAS CON 2 GDL, AMORTIGUADOS.

Sea el sistema mostrado en la figura:



La ecuación del movimiento será, en este caso:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c & -c \\ -c & c_2 + c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K & -K \\ -K & K_2 + K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [1]$$

o también:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (c_1 + c) \cdot \dot{x}_1 - c \cdot \dot{x}_2 + (K_1 + K) \cdot x_1 - K \cdot x_2 &= 0 \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 + (c_2 + c) \cdot \dot{x}_2 - c \cdot \dot{x}_1 + (K_2 + K) \cdot x_2 - K \cdot x_1 &= 0 \end{aligned} \quad [2]$$

Como hemos visto, las soluciones de estas ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden con términos en \dot{x} será del tipo:

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cdot e^{\lambda \cdot t} \\ x_2 &= B \cdot e^{\lambda \cdot t} \end{aligned}$$

Siendo A, B y λ valores a determinar.

Calculando \dot{x}_1 , \ddot{x}_1 , \dot{x}_2 y \ddot{x}_2 y sustituyendo en [2] queda:

$$m_1 \cdot \lambda^2 \cdot A + (c_1 + c) \cdot \lambda \cdot A - c \cdot \lambda \cdot B + (K_1 + K) \cdot A - K \cdot B = 0$$

$$m_2 \cdot \lambda^2 \cdot B + (c_2 + c) \cdot \lambda \cdot B - c \cdot \lambda \cdot A + (K_2 + K) \cdot B - K \cdot A = 0$$

Ordenando:

$$(m_1 \cdot \lambda^2 + (c_1 + c) \cdot \lambda + (K_1 + K)) \cdot A - (c \cdot \lambda + K) \cdot B = 0 \quad [3]$$

$$-(c \cdot \lambda + K) \cdot A + (m_2 \cdot \lambda^2 + (c_2 + c) \cdot \lambda + (K_2 + K)) \cdot B = 0$$

que es un sistema de dos ecuaciones algebraicas con las incognitas A y B.

Para que el sistema tenga solución su determinante ha de ser cero:

$$\begin{vmatrix} m_1 \cdot \lambda^2 + (c_1 + c) \cdot \lambda + (K_1 + K) & -(c \cdot \lambda + K) \\ -(c \cdot \lambda + K) & m_2 \cdot \lambda^2 + (c_2 + c) \cdot \lambda + (K_2 + K) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollándolo, obtenemos la ecuación característica:

$$(m_1 \cdot \lambda^2 + (c_1 + c) \cdot \lambda + (K_1 + K)) \cdot (m_2 \cdot \lambda^2 + (c_2 + c) \cdot \lambda + (K_2 + K)) - (c \cdot \lambda + K)^2 = 0 \quad [4]$$

Las cuatro raíces de esta ecuación son de la forma:

$$\lambda_1 = -p_1 + h_1$$

$$\lambda_2 = -p_1 - h_1$$

$$\lambda_3 = -p_2 + h_2$$

$$\lambda_4 = -p_2 - h_2$$

Aunque no lo demostremos, todos los valores de p son siempre negativos, mientras que los valores de h pueden ser reales o

imaginarios, aunque siempre superiores que p , de manera que los valores de x_1 son siempre negativos.

El movimiento completo del sistema vendrá dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + A_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + A_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot t} \\ x_2 &= B_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + B_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + B_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + B_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot t} \end{aligned} \quad [5]$$

En donde los ocho coeficientes A_i y B_i no son todos independientes, siendo $B_1 = \mu_1 \cdot A_1$; $B_2 = \mu_2 \cdot A_2$; $B_3 = \mu_3 \cdot A_3$ y $B_4 = \mu_4 \cdot A_4$.

Estas relaciones se obtienen al sustituir los cuatro valores de λ_i en las ecuaciones [3], resultando: (genéricamente)

$$\begin{aligned} B_i &= A_i \cdot \frac{m_i \cdot \lambda_i^2 + (c_i + c) \cdot \lambda_i + (K_i + K)}{c \cdot \lambda_i + K} = \\ &= A_i \cdot \frac{c \cdot \lambda_i + K}{m_i \cdot \lambda_i^2 + (c_i + c) \cdot \lambda_i + (K_i + K)} = \mu_i \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

Volviendo al análisis de las raíces, si h_1 y h_2 son valores reales, distintos de cero, los cuatro valores de λ son reales, y el movimiento de x_1 y de x_2 será sobreamortiguado.

Si $h_1 = h_2 = 0$, se estará en el caso de amortiguamiento crítico para ambas masas.

Si h_1 y h_2 son valores imaginarios, se estará en el caso de movimiento de x_1 y de x_2 subamortiguados.

-Suponiendo que dos de las raíces sean complejas, entonces deberán existir las correspondientes raíces conjugadas:

$$\lambda_1 = -(p_1 + i \cdot h_1)$$

$$\lambda_2 = -(p_1 - i \cdot h_1)$$

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} & A_1 \cdot e^{-(p_1 + i \cdot h_1) \cdot t} + A_2 \cdot e^{-(p_1 - i \cdot h_1) \cdot t} = \\ & = e^{-p_1 \cdot t} (A_1 \cdot e^{-i \cdot h_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{i \cdot h_1 \cdot t}) = \\ & = e^{-p_1 \cdot t} (A_1 \cdot \cos h_1 \cdot t - i \cdot A_1 \cdot \text{Sen } h_1 \cdot t + A_2 \cdot \cos h_1 \cdot t + \\ & + i \cdot A_2 \cdot \text{Sen } h_1 \cdot t) = C \cdot e^{-p_1 \cdot t} \cdot \text{Sen } (h_1 \cdot t + \vartheta) \end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned} & B_1 \cdot e^{-(p_1 + i \cdot h_1) \cdot t} + B_2 \cdot e^{-(p_1 - i \cdot h_1) \cdot t} = \\ & = D \cdot e^{-p_1 \cdot t} \cdot \text{Sen } (h_1 \cdot t + \vartheta) \end{aligned}$$

Por tanto, el movimiento en este caso es del tipo:

$$x_1 = C \cdot e^{-p_1 \cdot t} \cdot \text{Sen } (h_1 \cdot t + \vartheta) + A_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + A_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot t}$$

$$x_2 = D \cdot e^{-p_1 \cdot t} \cdot \text{Sen } (h_1 \cdot t + \vartheta) + B_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + B_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot t}$$

que como se ve, son dos movimientos oscilatorios, no periódicos, de amplitudes decrecientes.

-En el caso de que las cuatro raíces sean complejas, serán conjugadas dos a dos, y la solución será del tipo:

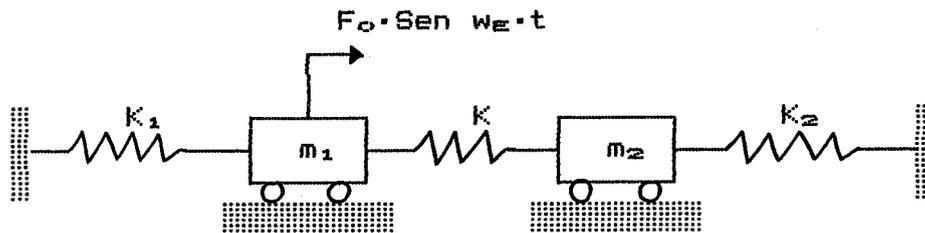
$$x_1 = C_1 \cdot e^{-p_1 \cdot t} \cdot \text{Sen } (h_1 \cdot t + \vartheta_1) + C_2 \cdot e^{-p_2 \cdot t} \cdot \text{Sen } (h_2 \cdot t + \vartheta_2)$$

$$x_2 = \mu_1 \cdot C_1 \cdot e^{-p_1 \cdot t} \cdot \text{Sen } (h_1 \cdot t + \vartheta_1) + \mu_2 \cdot C_2 \cdot e^{-p_2 \cdot t} \cdot \text{Sen } (h_2 \cdot t + \vartheta_2)$$

En donde las constantes C_1 , C_2 , ϑ_1 y ϑ_2 depende las condiciones iniciales.

4.- VIBRACIONES FORZADAS EN SISTEMAS DE 2 GDL, SIN AMORTIGUAMIENTO.

Sea el sistema mostrado en la figura, sometida la masa m_1 a la fuerza $F_0(t) = F_0 \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t$



El sistema de ecuaciones que definen el movimiento será:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K & -K \\ -K & K_2 + K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t$$

o también:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (K_1 + K) \cdot x_1 - K \cdot x_2 = F_1 \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + (K_2 + K) \cdot x_2 - K \cdot x_1 = 0$$

[11]

Como sabemos, la solución de ambas ecuaciones diferenciales será la suma de la solución de la correspondiente homogénea, más una solución particular de la completa.

La solución de las homogéneas ya la hemos discutido.

La solución particular de la completa ha de ser del tipo:

$$x_{p1} = X_1 \cdot \text{Sen } (\omega_E \cdot t + \vartheta)$$

$$x_{p2} = X_2 \cdot \text{Sen } (\omega_E \cdot t + \vartheta)$$

Derivando:

$$\ddot{x}_{p1} = -\omega_E^2 \cdot X_1 \cdot \text{Sen } (\omega_E \cdot t + \vartheta)$$

$$\ddot{x}_{p2} = -\omega_E^2 \cdot X_2 \cdot \text{Sen } (\omega_E \cdot t + \vartheta)$$

Sustituyendo en [1] y operando:

$$\begin{aligned} (-m_1 \cdot \omega_E^2 + K_1 + K) \cdot X_1 - K \cdot X_2 &= F_1 \\ -K \cdot X_1 + (-m_2 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K) \cdot X_2 &= 0 \end{aligned} \quad [2]$$

En efecto, se ha desarrollado $\text{Sen}(\omega_E \cdot t + \delta)$, y se puede comprobar que $\delta = 0$, con lo que quedan las expresiones anteriores.

Resolviendo por Cramer:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\begin{vmatrix} F_1 & -K \\ 0 & -m_2 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m_1 \cdot \omega_E^2 + K_1 + K & -K \\ -K & -m_2 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{F_1 \cdot (-m_2 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K)}{(-m_1 \cdot \omega_E^2 + K_1 + K) \cdot (-m_2 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K) - K^2} \\ X_2 &= \frac{-K \cdot F_1}{(-m_1 \cdot \omega_E^2 + K_1 + K) \cdot (-m_2 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K) - K^2} \end{aligned}$$

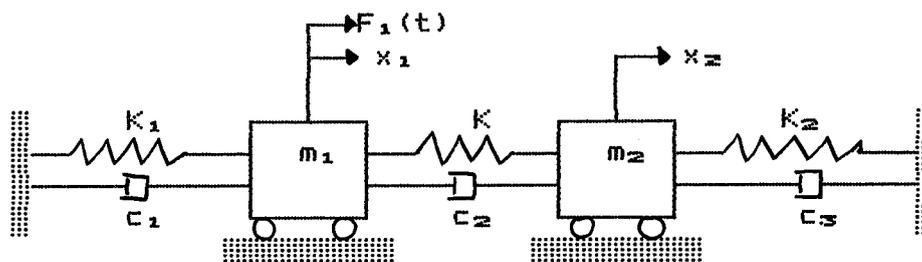
Por consiguiente, la vibración del estado estacionario (superpuesto al movimiento libre, que por no estar amortiguado también será estacionario), vendrá dada por:

$$\begin{aligned} x_{p1} &= \frac{F_1 \cdot (-m_2 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K)}{\Delta} \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t \\ x_{p2} &= \frac{-K \cdot F_1}{\Delta} \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t \end{aligned}$$

Como se observa, las amplitudes de ambos movimientos dependen del valor de la frecuencia circular de la fuerza de excitación ω_E , y de los parámetros m_1 y K_1 del sistema.

5.- VIBRACIONES FORZADAS EN SISTEMAS CON 2 GDL, AMORTIGUADOS.

Sea el sistema de la figura, sometido a la fuerza exterior $F_1(t) = F_0 \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t$



El sistema de ecuaciones que define el movimiento es, según vimos:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c & -c \\ -c & c_2 + c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K & -K \\ -K & K_2 + K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t \quad [1]$$

Que equivale al sistema de ecuaciones:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (c_1 + c) \cdot \dot{x}_1 - c \cdot \dot{x}_2 + (K_1 + K) \cdot x_1 - K \cdot x_2 = F_0 \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t \quad [2]$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + (c_2 + c) \cdot \dot{x}_2 - c \cdot \dot{x}_1 + (K_2 + K) \cdot x_2 - K \cdot x_1 = 0$$

La solución de este sistema está formada por la suma de la solución del sistema homogéneo, más una solución particular del sistema completo.

La solución del sistema homogéneo ya la estudiamos, y desaparece con el tiempo por estar amortiguado.

El movimiento permanente vendrá dado por la solución particular del sistema completo, que es la que vamos a calcular a continuación.

Para ello lo más sencillo es emplear la notación compleja, tal como se vió en la página ---- (59)----.

$$F(t) = F_0 \cdot \text{Sen } \omega_E \cdot t = \text{Im} \cdot (\tilde{F}_0 \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t})$$

$$x_{p1} = \text{Im} \cdot (\tilde{X}_1 \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t})$$

$$x_{p2} = \text{Im} \cdot (\tilde{X}_2 \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t})$$

en donde \tilde{X}_1 y \tilde{X}_2 pueden ser valores reales o complejos.

$$\dot{x}_{p1} = i \cdot \omega_E \cdot \tilde{X}_1 \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t}$$

$$\dot{x}_{p2} = i \cdot \omega_E \cdot \tilde{X}_2 \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t}$$

$$\ddot{x}_{p1} = i \cdot \omega_E^2 \cdot \tilde{X}_1 \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t}$$

$$\ddot{x}_{p2} = i \cdot \omega_E^2 \cdot \tilde{X}_2 \cdot e^{i \cdot \omega_E \cdot t}$$

Sustituyendo y ordenando:

$$[-m_1 \cdot \omega_E^2 + (c_1 + c) \cdot i \cdot \omega_E + (K_1 + K)] \cdot \tilde{X}_1 - (c \cdot i \cdot \omega_E + K) \cdot \tilde{X}_2 = \tilde{F}_0$$

$$-(c \cdot i \cdot \omega_E + K) \cdot \tilde{X}_1 + [-m_2 \cdot \omega_E^2 + (c_2 + c) \cdot i \cdot \omega_E + (K_2 + K)] \cdot \tilde{X}_2 = 0$$

[3]

Resolviendo por Cramer, queda la expresión:

$$\tilde{X}_1 = \frac{(-m_2 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K) + i \cdot (c_2 + c) \cdot \omega_E}{[(-m_1 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K) + i \cdot \omega_E \cdot (c_1 + c)] \cdot [(-m_2 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K) + i \cdot \omega_E \cdot (c_2 + c)] - (K + i \cdot c \cdot \omega_E)^2} \cdot \tilde{F}_0$$

$$\tilde{X}_2 = \frac{(-m_2 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K) + i \cdot (c_2 + c) \cdot \omega_E}{[(-m_1 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K) + i \cdot \omega_E \cdot (c_1 + c)] \cdot [(-m_2 \cdot \omega_E^2 + K_2 + K) + i \cdot \omega_E \cdot (c_2 + c)] - (K + i \cdot c \cdot \omega_E)^2} \cdot \tilde{F}_0$$

Como se ve, \tilde{X}_1 y \tilde{X}_2 son números complejos que podemos representar por:

$$\tilde{X}_1 = \frac{A_1 + B_1 \cdot i}{C_1 + D_1 \cdot i} \cdot \tilde{F}_0 = (E_1 + F_1 \cdot i) \cdot \tilde{F}_0$$

$$\tilde{X}_2 = \frac{A_2 + B_2 \cdot i}{C_2 + D_2 \cdot i} \cdot \tilde{F}_0 = (E_2 + F_2 \cdot i) \cdot \tilde{F}_0$$

que también se podría escribir:

$$\tilde{X}_1 = |X_1| \cdot e^{i \cdot \vartheta_1}$$

$$\tilde{X}_2 = |X_2| \cdot e^{i \cdot \vartheta_2}$$

en donde:

$$|X_1| = \sqrt{E_1^2 + F_1^2} \quad \text{y} \quad \vartheta_1 = \text{Tang}^{-1} \cdot (F_1/E_1)$$

$$|X_2| = \sqrt{E_2^2 + F_2^2} \quad \text{y} \quad \vartheta_2 = \text{Tang}^{-1} \cdot (F_2/E_2)$$

Con lo cual, las soluciones serían del tipo:

$$x_{p1} = \text{Im} \cdot (\tilde{X}_1 \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t}) = |X_1| \cdot \text{Sen} (\omega_e \cdot t + \vartheta_1)$$

$$x_{p2} = \text{Im} \cdot (\tilde{X}_2 \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t}) = |X_2| \cdot \text{Sen} (\omega_e \cdot t + \vartheta_2)$$

6.- CALCULO DE LA RESPUESTA POR METODOS NUMERICOS

El cálculo de la respuesta de un sistema con 2 GDL puede resolverse en forma sencilla por métodos numéricos, como por ejemplo, el de la diferencia central.

Sea el sistema de la figura,

en el que:

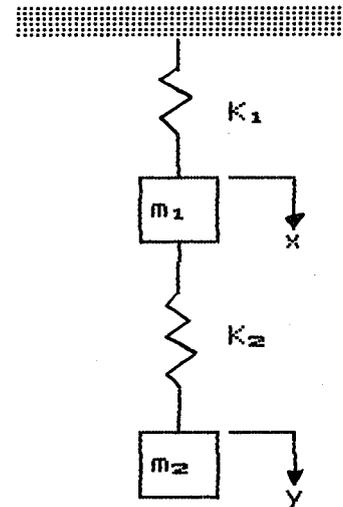
$$K_1 = 36 \text{ KN/m}$$

$$K_2 = 18 \text{ KN/m}$$

$$m_1 = 100 \text{ Kg}$$

$$m_2 = 25 \text{ Kg}$$

$$F = \begin{cases} 400 \text{ N para } t > 0 \\ 0 \text{ para } t < 0 \end{cases}$$



Condiciones iniciales:

$$x = \dot{x}_0 = 0$$

$$y = \dot{y}_0 = 0$$

Las ecuaciones de movimiento son:

$$100 \ddot{x} + 36.000 x - 18.000 (y - x) = 0$$

$$25 \ddot{y} + 18.000 (y - x) = 400$$

que puede escribirse también:

$$\ddot{x} = -540 x + 180 y$$

$$\ddot{y} = 720 (x - y) + 16$$

Las ecuaciones de recurrencia son, según vemos en la página -----(89)----:

$$x_{i+1} = \ddot{x}_i \cdot \Delta t^2 + 2 \cdot x_i - x_{i-1}$$

$$y_{i+1} = \ddot{y}_i \cdot \Delta t^2 + 2 \cdot y_i - y_{i-1}$$

Para establecer el valor de $\Delta t \leq T/10$, observamos que:

$$\sqrt{K_1/m_1} = 18,97 \implies T_1 = 0,327 \text{ s.}$$

$$\sqrt{K_2/m_2} = 26,83 \implies T_2 = 0,234 \text{ s.}$$

Tomamos $\Delta t = 0.020 \text{ s.}$

Como las condiciones iniciales hacen:

$$\ddot{x}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{y}_1 = 16$$

hemos de utilizar la ecuación $x_2 = (\Delta t^2/6) \cdot \ddot{x}_2$ para calcular x_1 y la $y_2 = y_1 + \Delta t \cdot \dot{y}_1 + (\Delta t^2/2) \cdot f(y_1, t)$ para hallar y_1 .

$$\text{Para } \ddot{y}_1 = 16, \quad y_2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \Delta t^2 = 0,0032$$

Las cantidades x_2 y \ddot{x}_2 se obtienen de la resolución simultánea de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_2 &= (1/6) \cdot \ddot{x}_2 \cdot \Delta t^2 \\ \ddot{x}_2 &= -540 \cdot x_2 + 180 y_2 \end{aligned}$$

de donde se obtiene:

$$x_2 = \frac{30 \cdot y_2 \cdot \Delta t^2}{1 + 90 \cdot \Delta t^2}$$

A partir de aquí, el cálculo de los valores sucesivos de x_1 e y_1 sigue la fórmula de recurrencia conocida.

APLICACIONES PRACTICAS DE VIBRACIONES EN SISTEMAS DE 2 GDL.-

1.-Sistemas masa-resorte

1-1.- Vibración de una masa sujeta por varios resortes.

Ortogonalidad de los modos.

1-2.- Vibraciones en automóviles.

1-3.- Transmisibilidad de las vibraciones en soportes móviles.

1-4.- Aislamiento de las vibraciones

1-4-1.- Amortiguador dinámico de vibraciones,
no amortiguado.

1-4-2.- Amortiguador dinámico de vibraciones,
amortiguado.

2.- Sistemas de torsión

2-1.- Vibración de torsión en árboles.

2-2.- Sistemas semidefinidos.

2-3.- Vibraciones en engranajes.

2-4.- Absorvedor de vibraciones de péndulo centrífugo.

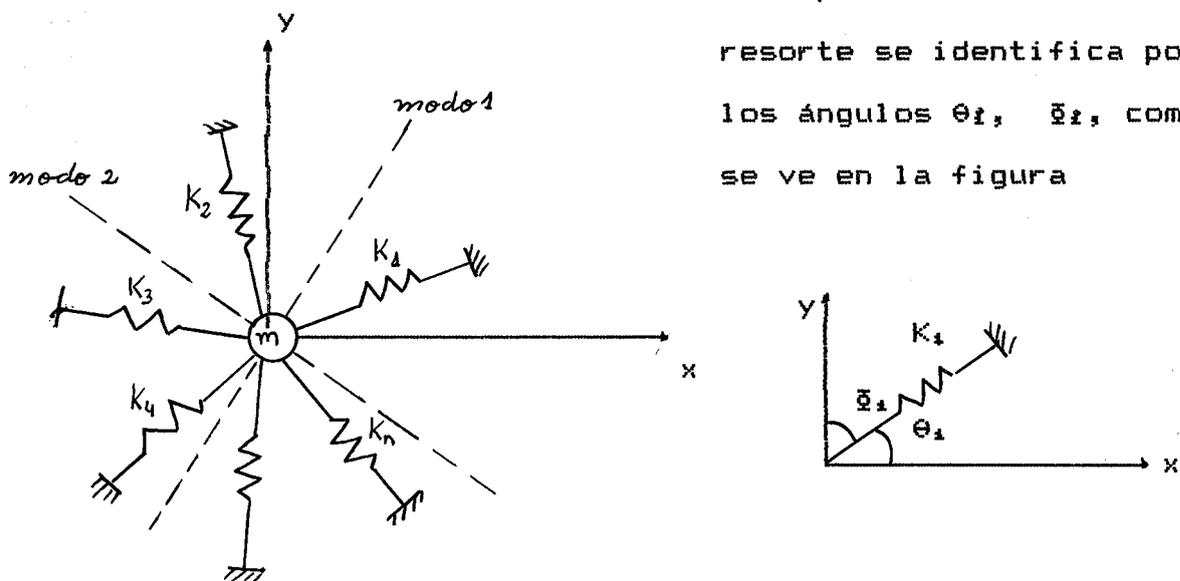
3.- Sistemas de flexión

3-1.- Cabeceo de árboles. Velocidades críticas.

1-1.- VIBRACION DE UNA MASA SUJETA POR VARIOS RESORTES.
ORTOGONALIDAD DE LOS MODOS.

-Sea la masa m , sujeta por los resortes de rigideces K_1, K_2, \dots, K_n , y que está restringida a moverse en el plano XY . La posición de la masa viene determinada por 2 coordenadas x , e y , por lo que se trata de un sistema con 2 GDL. Supondremos que los desplazamientos de la masa son lo suficientemente pequeños, de manera que la fuerza provocada por los resortes deformados, tienen la misma dirección que estos en la posición de equilibrio (la mostrada en la figura).

La posición de cada resorte se identifica por los ángulos $\theta_i, \bar{\theta}_i$, como se ve en la figura



-Para calcular las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del sistema daremos a la masa un desplazamiento cualquiera (dado por las coordenadas x e y) y calcularemos las fuerzas que sobre ella actúan.

a.- Desplazamiento x a m :

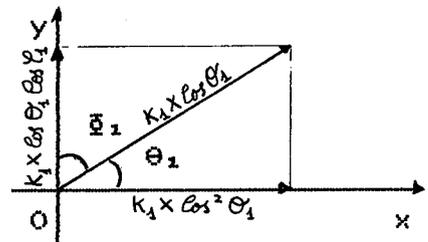
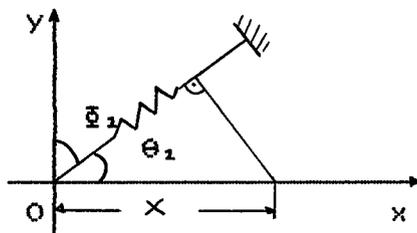
En este caso, el resorte K_1 se deforma como se ve en la figura, en la cantidad $x \cdot \cos \theta_1$.

Tal desplazamiento da lugar a una fuerza en la dirección del eje Ox , de valor

$$K_1 \cdot (x \cdot \cos \theta_1) \cdot (\cos \theta_1) = K_1 \cdot x \cdot \cos^2 \theta_1$$

De igual forma, tal deformación origina una fuerza en la dirección Oy de valor

$$K_1 \cdot (x \cdot \cos \theta_1) \cdot (\cos \bar{\theta}_1)$$



Lo mismo podría decirse con los demás resortes:

$$\text{Dirección } Ox \implies K_1 \cdot x \cdot \cos^2 \theta_1$$

$$\text{Dirección } Oy \implies K_1 \cdot (x \cdot \cos \theta_1) \cdot (\cos \bar{\theta}_1)$$

Por consiguiente, la resultante en la dirección Ox valdrá:

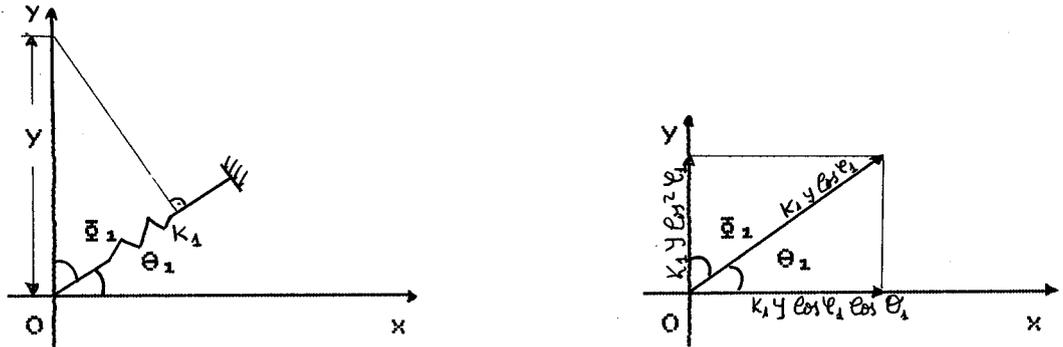
$$x \cdot (K_1 \cdot \cos^2 \theta_1 + K_2 \cdot \cos^2 \theta_2 + \dots + K_n \cdot \cos^2 \theta_n) = K_{Kx} \cdot x$$

Igualmente la componente en la dirección Oy valdrá:

$$x \cdot (K_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \bar{\theta}_1 + K_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \bar{\theta}_2 + \dots + K_n \cdot \cos \theta_n \cdot \cos \bar{\theta}_n) = K_{yK} \cdot x$$

b.- Desplazamiento y a m:

En este caso, el resorte K_1 se deforma como se ve en la figura, en la cantidad $y \cdot \cos \bar{\alpha}_1$



Tal deformación da lugar a una fuerza en la dirección del eje OX de valor

$$K_1 \cdot (y \cdot \cos \bar{\alpha}_1) \cdot (\cos \theta_1)$$

De igual forma, tal deformación da lugar a una fuerza en la dirección del eje OY de valor:

$$K_1 \cdot y \cdot \cos^2 \bar{\alpha}_1$$

Lo mismo podría hacerse para todos los demás resortes:

$$\text{Dirección OX} \implies K_1 \cdot y \cdot \cos \bar{\alpha}_1 \cdot \cos \theta_1$$

$$\text{Dirección OY} \implies K_1 \cdot y \cdot \cos^2 \bar{\alpha}_1$$

En consecuencia, la resultante en la dirección OX será:

$$y \cdot (K_1 \cdot \cos \bar{\alpha}_1 \cdot \cos \theta_1 + K_2 \cdot \cos \bar{\alpha}_2 \cdot \cos \theta_2 + \dots + K_n \cdot \cos \bar{\alpha}_n \cdot \cos \theta_n) = K_{xy} \cdot y$$

Igualmente la componente en la dirección OY valdrá:

$$y \cdot (K_1 \cdot \cos^2 \bar{\alpha}_1 + K_2 \cdot \cos^2 \bar{\alpha}_2 + \dots + K_n \cdot \cos^2 \bar{\alpha}_n) = K_{yy} \cdot y$$

-Teniendo todo ello en cuenta, las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del sistema serán:

$$m \cdot \ddot{x} + K_{xx} \cdot x + K_{xy} \cdot y = 0$$

$$m \cdot \ddot{y} + K_{yx} \cdot x + K_{yy} \cdot y = 0$$

(sistema en vibración libre no amortiguada)

-Tal como hemos visto para sistemas de 2 GDL, la respuesta de este sistema vendrá dada por:

$$x = A_1 \cdot \text{Sen} (w_1 t + \bar{\varphi}_1) + A_2 \cdot \text{Sen} (w_2 t + \bar{\varphi}_2)$$

$$y = \lambda_1 \cdot A_1 \cdot \text{Sen} (w_1 t + \bar{\varphi}_1) + \lambda_2 \cdot A_2 \cdot \text{Sen} (w_2 t + \bar{\varphi}_2)$$

siendo w_1 y w_2 las frecuencias principales y λ_1 y λ_2 las relaciones entre amplitudes.

Cuando la masa vibra en el primer modo principal (w_1), la respuesta será:

$$x = A_1 \cdot \text{Sen} (w_1 t + \bar{\varphi}_1)$$

$$y = B_1 \cdot \text{Sen} (w_1 t + \bar{\varphi}_1) \quad \text{siendo } B_1 = \lambda_1 \cdot A_1$$

Cuando la masa vibra en el segundo modo principal (w_2), la respuesta será:

$$x = A_2 \cdot \text{Sen} (w_2 t + \bar{\varphi}_2)$$

$$y = B_2 \cdot \text{Sen} (w_2 t + \bar{\varphi}_2) \quad \text{siendo } B_2 = \lambda_2 \cdot A_2$$

Sustituyendo en las ecuaciones del movimiento, se obtiene para el primer modo

$$-m \cdot \omega_1^2 \cdot A_1 + K_{xx} \cdot A_1 + K_{xy} \cdot B_1 = 0 \quad [1]$$

$$-m \cdot \omega_1^2 \cdot B_1 + K_{yy} \cdot B_1 + K_{yx} \cdot A_1 = 0 \quad [2]$$

Haciendo lo mismo para el segundo modo:

$$-m \cdot \omega_2^2 \cdot A_2 + K_{xx} \cdot A_2 + K_{xy} \cdot B_2 = 0 \quad [3]$$

$$-m \cdot \omega_2^2 \cdot B_2 + K_{yy} \cdot B_2 + K_{yx} \cdot A_2 = 0 \quad [4]$$

Multiplicando [1] por $(-A_2)$ y [2] por $(-B_2)$; [3] por (A_1) y [4] por (B_1) , se tienen:

$$m \cdot \omega_1^2 \cdot A_1 \cdot A_2 - K_{xx} \cdot A_1 \cdot A_2 - K_{xy} \cdot A_2 \cdot B_1 = 0$$

$$m \cdot \omega_1^2 \cdot B_1 \cdot B_2 - K_{yy} \cdot B_1 \cdot B_2 - K_{yx} \cdot A_1 \cdot B_2 = 0$$

$$-m \cdot \omega_2^2 \cdot A_1 \cdot A_2 + K_{xx} \cdot A_1 \cdot A_2 + K_{xy} \cdot A_1 \cdot B_2 = 0$$

$$-m \cdot \omega_2^2 \cdot B_1 \cdot B_2 + K_{yy} \cdot B_1 \cdot B_2 + K_{yx} \cdot A_2 \cdot B_1 = 0$$

Sumandolas:

$$m \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2) + m \cdot B_1 \cdot B_2 \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2) = 0$$

lo que implica:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

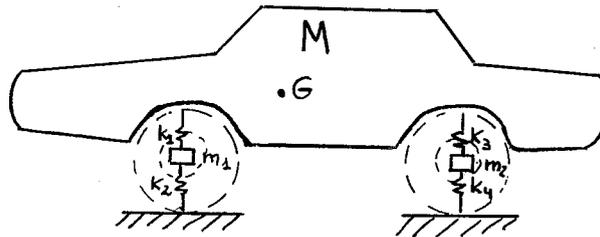
Ecuación que expresa la ortogonalidad de los modos, es decir que las dos líneas rectas a lo largo de las cuales vibra la masa en los modos principales son perpendiculares.

1-2.-VIBRACIONES EN AUTOMOVILES

-Un automóvil es un sistema mecánico complejo que posee muchos grados de libertad.

En forma simplificada podemos suponer que sólo se mueve en el plano del papel, y que su movimiento consiste en:

- a.- Carrocería: Traslación vertical (arriba y abajo) y rotación alrededor de su centro de gravedad.
- b.- Ruedas: Traslación vertical solamente.



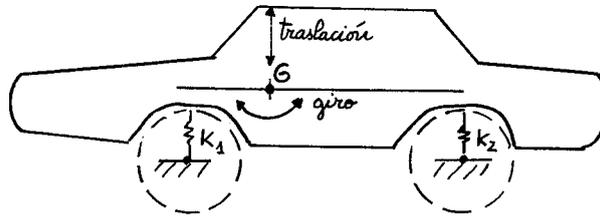
Si m_1 y m_2 son las masas de las ruedas, y M es la masa del resto del vehículo y sus pasajeros, y si además despreciamos los efectos de la amortiguación, el sistema puede simplificarse como se ve en la figura, en donde K_1 y K_3 son las rigideces de la suspensión, y K_2 y K_4 las de los neumáticos.

Evidentemente es un sistema de más de 2 GDL.

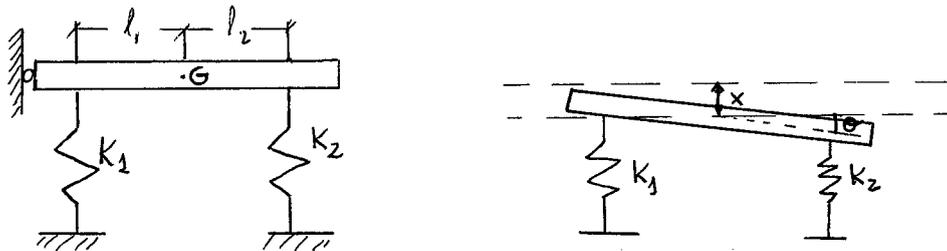
Sin embargo, si la frecuencia de excitación debida a la rugosidad del camino es alta, las ruedas se mueven arriba y abajo con gran rapidez. En este caso, y siempre que la frecuencia natural de la carrocería sea baja en comparación con aquella, una muy pequeña porción del movimiento de las ruedas se trasladará a la carrocería.

En consecuencia, el movimiento de las ruedas y el de la carrocería pueden estudiarse separadamente.

-Centrándonos en este último, el sistema puede quedar reducido al de la figura:



Cuyo modelo matemático es el siguiente:



-Para estudiar el movimiento, y evitar el acoplamiento inercial, puede tomarse el c.d.g. como origen de coordenadas, siendo estas el movimiento vertical de G, $x(t)$, y la rotación alrededor de G, $\theta(t)$.

-Las ecuaciones que definen el movimiento se obtienen inmediatamente:

$$\Sigma F = 0 \implies m \cdot \ddot{x} = -K_1 \cdot (x - l_1 \cdot \theta) - K_2 \cdot (x + l_2 \cdot \theta)$$

$$\Sigma M = 0 \implies I_G \cdot \ddot{\theta} = K_1 \cdot (x - l_1 \cdot \theta) \cdot l_1 - K_2 \cdot (x + l_2 \cdot \theta) \cdot l_2$$

Expresadas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_{\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -(K_1 \cdot l_1 - K_2 \cdot l_2) \\ -(K_1 \cdot l_1 - K_2 \cdot l_2) & K_1 \cdot l_1^2 + K_2 \cdot l_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que para esta vibración libre el movimiento es de tipo armónico:

$$x(t) = X \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\theta(t) = \Theta \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Derivando, sustituyendo y operando llegamos a la siguiente ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} -m \cdot \omega^2 + K_1 + K_2 & -K_1 \cdot l_1 + K_2 \cdot l_2 \\ -K_1 \cdot l_1 + K_2 \cdot l_2 & -I_{\theta} \cdot \omega^2 + K_1 \cdot l_1^2 + K_2 \cdot l_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

De donde se obtienen las dos frecuencias naturales $\omega_1/2\pi$ y $\omega_2/2\pi$.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{K_1 + K_2}{m} + \frac{K_1 \cdot l_1^2 + K_2 \cdot l_2^2}{I_{\theta}} \pm \sqrt{\left[\frac{K_1 + K_2}{m} + \frac{K_1 \cdot l_1^2 + K_2 \cdot l_2^2}{I_{\theta}} \right]^2 - \frac{4K_1 \cdot K_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{m \cdot I_{\theta}}} \right]$$

-Conocidas las frecuencias naturales pueden hallarse los modos principales de vibración, o relaciones de amplitud (respecto al giro, por ejemplo) para cada una de las frecuencias naturales.

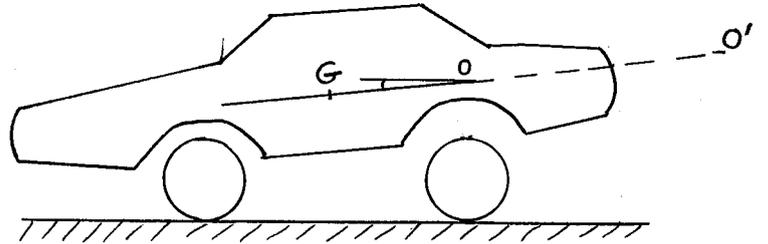
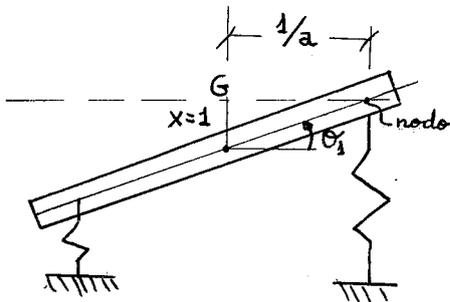
$$\left| \begin{array}{c} X \\ \Theta \end{array} \right|_{w_1} = \frac{(K_1 \cdot l_1 - K_2 \cdot l_2)/m}{(K_1 + K_2)/m - w_1^2} = \frac{1}{a}$$

$$\left| \begin{array}{c} X \\ \Theta \end{array} \right|_{w_2} = \frac{(K_1 \cdot l_1 - K_2 \cdot l_2)/m}{(K_1 + K_2)/m - w_2^2} = \frac{1}{b}$$

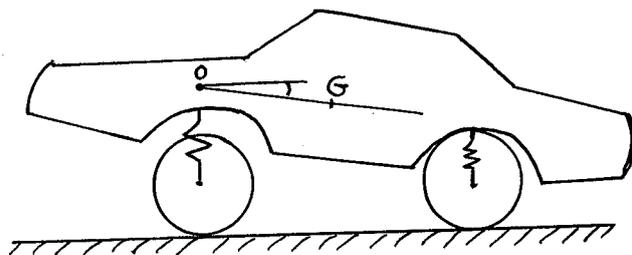
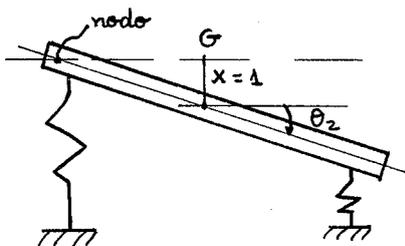
Tales modos principales (que no son las verdaderas amplitudes X y Θ) se han representado en las figuras, y permiten calcular los nodos (o puntos que no vibran) para cada una de las frecuencias naturales.

(Obsérvese que si los desplazamientos y los giros son pequeños, $1/a$ y $1/b$ representan las distancias desde el c.d.g. hasta el correspondiente modo - la tangente es aproximadamente igual al ángulo. -)

Modo 1 (w_1)



Modo 2 (w_2)



Obsérvese que si O , en algunas de las frecuencias naturales, cae fuera del automóvil (por ejemplo, O' en la figura) el efecto físico sería que a esa frecuencia natural, la carrocería de tal automóvil sufriría fuertes traslaciones verticales, y sin embargo pequeñas rotaciones.

Así mismo, si el nodo O para la frecuencia fundamental w_1 cae dentro del automóvil, en la zona de los asientos, el auto sería "más confortable".

-Naturalmente, la respuesta del sistema será del tipo:

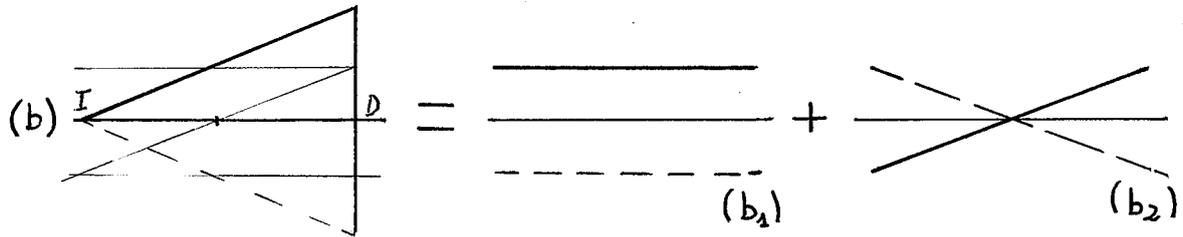
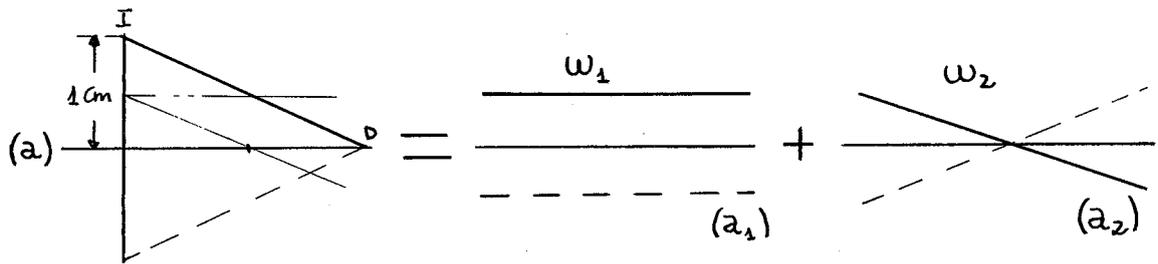
$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} \cdot X_1 \cdot \cos(w_1 \cdot t + \bar{\varphi}_1) + \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \cdot X_2 \cdot \cos(w_2 \cdot t + \bar{\varphi}_2)$$

en donde X_1 , X_2 , $\bar{\varphi}_1$ y $\bar{\varphi}_2$ son ctes. a determinar en función de las condiciones iniciales.

El movimiento resultante del automóvil es un movimiento complejo, combinación lineal del correspondiente a los dos modos principales.

-Cuando w_1 y w_2 están muy próximas, se produce en el automóvil en vibración libre el fenómeno de batimiento.

En efecto, supongamos que el extremo izquierdo del chasis se separa 1 cm. de su posición de equilibrio, mientras que el extremo derecho se mantienen en su lugar. Si a partir de esa posición se libera el sistema, y considerando el movimiento total como suma del correspondiente a las dos frecuencias naturales, el movimiento transcurriría como se ve en las figuras (suponiendo $w_2 > w_1$)



NOTA: Se ha tomado $K_1 = K_2$ y $l_1 = l_2$. En estas condiciones, el modo 1 es una traslación pura y el modo 2 una rotación pura.

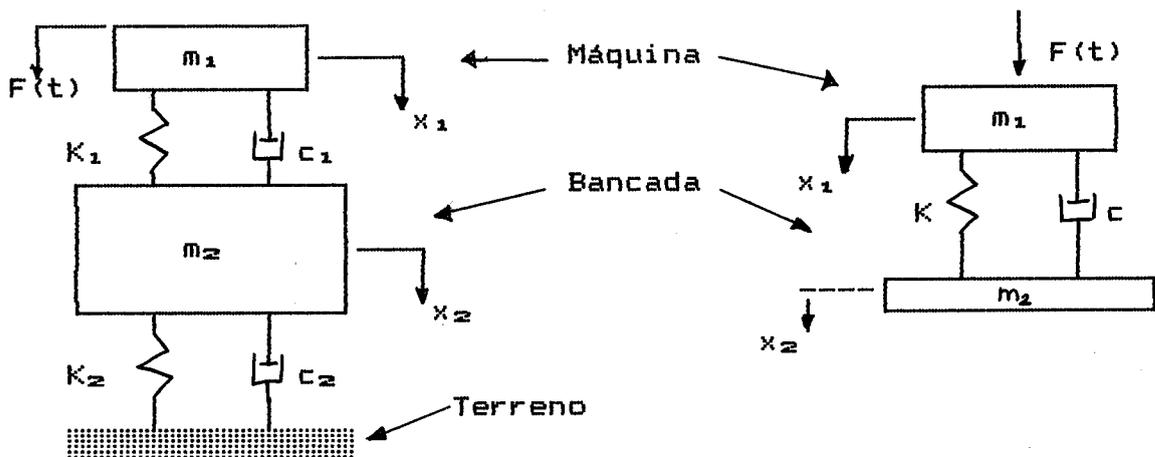
Al soltar el lado izquierdo, el automóvil vibra como se ve en la figura (a) (manteniéndose D fijo)

Pasado un cierto tiempo, al ser $\omega_2 > \omega_1$, el sumando correspondiente al giro adoptará la forma que se ve en la figura (b₂), con lo cual el automóvil vibrará como se ve en la figura (b). El extremo I será el "inmóvil".

1-3.-TRANSMISIBILIDAD DE VIBRACIONES SOBRE SOPORTES LIBRES

En el caso de que el sistema vibrante no se una a un soporte rígido pueden presentarse dos casos:

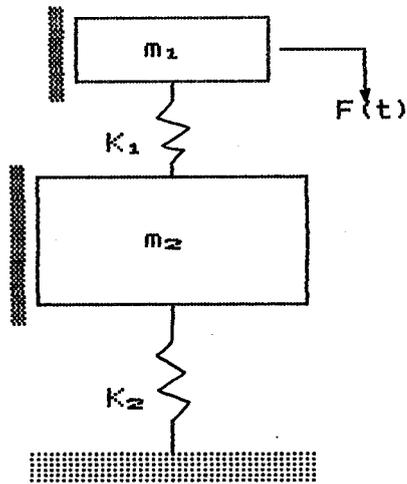
a.-Que la masa m_1 se una por medio de un resorte y amortiguador K_1, c_1 a la fundación, de masa m_2 , la cual a su vez se supone unida al soporte rígido por el resorte y amortiguador K_2, c_2 (este es el caso de un motor unido a una bancada, la cual está descansando sobre la tierra)



b.-La masa m_1 se une a la masa m_2 por medio del resorte K y el amortiguador c . (Este es el caso de motores de avión o barco, unidos a la estructura soporte, ala, casco, de menor masa)

En ambos casos el movimiento de la masa excita otro en el soporte, de modo que se trata de sistemas vibrantes con 2 GDL

-Para simplificar la exposición vamos a realizar el estudio de ambos casos en el supuesto de ausencia de amortiguamiento.

Caso a.-

Suponiendo que sobre m_1 actúe la fuerza $F(t) = F_0 \cdot \text{Sen } \omega t$ las ecuaciones del movimiento serán

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 - K_1 \cdot (x_2 - x_1) &= F_0 \cdot \text{Sen } \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + K_2 \cdot x_2 + K_1 \cdot (x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Partiendo de unas condiciones iniciales nulas, podemos

prescindir del término obtenido de la resolución del sistema homogéneo, quedando la respuesta del sistema forzado reducida al análisis de la solución particular del sistema completo.

Tal solución es del tipo

$$x_1 = X_1 \cdot \text{Sen } (\omega t + \phi)$$

$$x_2 = X_2 \cdot \text{Sen } (\omega t + \phi)$$

Como:

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 \cdot X_1 \cdot \text{Sen } (\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega^2 \cdot X_2 \cdot \text{Sen } (\omega t + \phi)$$

Queda, sustituyendo y operando:

$$(-m_1 \cdot \omega^2 + K_1) \cdot X_1 - K_1 \cdot X_2 = F_0$$

$$-K_1 \cdot X_1 + (-m_2 \cdot \omega^2 + K_2 + K_1) \cdot X_2 = 0$$

De donde se obtiene:

$$X_2 = \frac{F_0 \cdot K_1}{(K_1 - m_1 \cdot \omega^2) \cdot (K_1 + K_2 - m_2 \cdot \omega^2) - K_1^2}$$

La fuerza transmitida a la base será:

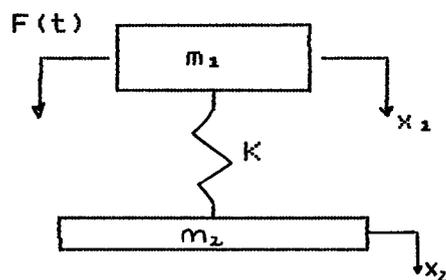
$$F_{TR} = K_2 \cdot X_2 = \frac{F_0 \cdot K_1 \cdot K_2}{(K_1 - m_1 \cdot \omega_e^2) \cdot (K_1 + K_2 - m_2 \cdot \omega_e^2) - K_1^2}$$

y la transmisibilidad será:

$$TR = \frac{F_{TR}}{F_0} = \frac{K_2}{(1 - m_1 \cdot \omega_e^2 / K_1) \cdot (K_1 + K_2 - m_2 \cdot \omega_e^2) - K_1}$$

(Si $m_2 < m_1$, la cimentación se denomina ligera. Caso contrario, pesada)

Caso b.-



Suponiendo que sobre m_1 actúe la fuerza:

$$F(t) = F_0 \cdot \text{Sen } \omega_e t$$

Las ecuaciones de movimiento serán:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + K \cdot (x_1 - x_2) = F_0 \cdot \text{Sen } \omega_e t$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + K \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

Las soluciones particulares (régimen permanente) serán del tipo:

$$x_1 = X_1 \cdot \text{Sen } \omega_e t$$

$$x_2 = X_2 \cdot \text{Sen } \omega_e t$$

Sustituyendo y ordenando:

$$X_1 \cdot (K - m_1 \cdot \omega_e^2) - K \cdot X_2 = F_0$$

$$X_1 \cdot (-K) + (K - m_2 \cdot \omega_e^2) \cdot X_2 = 0$$

De donde se obtiene:

$$X_2 = \frac{F_0 \cdot K}{m_1 \cdot m_2 \cdot \omega_e^4 - K \cdot (m_1 + m_2) \cdot \omega_e^2}$$

Que también puede escribirse:

$$X_2 = \frac{F_0}{(m_1 + m_2) \cdot \omega_E^2 \cdot [(\omega_E^2 / \omega_1^2) - 1]}$$

Siendo ω_1 la frecuencia propia fundamental, obtenida de la resolución de la ecuación característica, y de valor:

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m_1 \cdot m_2 / (m_1 + m_2)}$$

En este caso particular, la fuerza transmitida al soporte libre (casco) será, precisamente, equivalente a su fuerza de inercia, es decir:

$$F_{TR} = m_2 \cdot \omega_E^2 \cdot X_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{F_0}{(\omega_E^2 / \omega_1^2) - 1} \quad [11]$$

Y la transmisibilidad será:

$$T.R. = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{(\omega_E^2 / \omega_1^2) - 1} \quad [2]$$

Como puede observarse, esta expresión [2] es la misma que la [3] para soportes rígidos con 1 GDL, con amortiguamiento nulo ($\xi = 0$), sólo que allí la $\omega_n = \sqrt{(K/m)}$, y aquí:

$$\omega_1 = \sqrt{K / (m_1 \cdot m_2 \cdot (m_1 + m_2))}$$

Tal diferencia lleva a una interesante conclusión: en efecto, en soportes fijos el resorte debería tomarse, para lograr una baja transmisibilidad, de manera que se logre una frecuencia natural ω_n alrededor de 1/3 de la frecuencia perturbadora ω_E .

En nuestro caso, y suponiendo un motor 10 veces más pesado que la cimentación (ala de avión, por ejemplo)

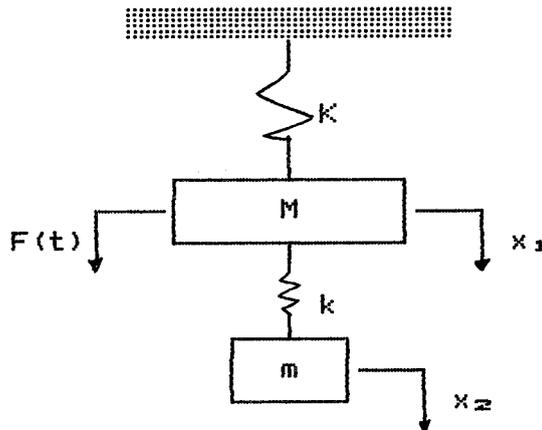
$$w_1^2 = \frac{K}{m_1 \cdot m_2 / (m_1 + m_2)} = \frac{K}{m_1} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2} = \frac{K}{m_1} \cdot \frac{10 + 1}{1} = 11 \frac{K}{m}$$

lo que indica que para conseguir la misma protección, el resorte debe ser 11 veces más flexible que si la cimentación fuera fija. (Por ejemplo, utilizando un mismo tipo de resorte, para conseguir idéntico aislamiento de un motor sobre el suelo fijo, o sobre un casco de barco, habría de ser 11 veces más largo en el segundo supuesto, lo cual, obviamente, acarrearía graves problemas de estabilidad para el mismo)

1-4.- AISLAMIENTO DE LAS VIBRACIONES.-

1-4-1.- AMORTIGUADOR DINAMICO DE VIBRACIONES, NO AMORTIGUADO

-El absorvedor de vibraciones más simple es el mostrado en la figura:



Consta de una pequeña masa m unida por un resorte k a la gran masa M , unida a su vez al soporte por medio del resorte K .

-La única condición impuesta, como luego veremos, es que la frecuencia natural del absorber (o amortiguador) acoplado $\omega_n = \sqrt{k/m}$ sea igual a la frecuencia ω_e de la fuerza de excitación.

En este caso, como vamos a comprobar, la masa principal M no vibra en absoluto, y el pequeño sistema $k \div m$ vibra de tal manera que la fuerza del resorte es, en todo instante, igual y contraria a $F_0 \cdot \text{Sen } \omega_e t$

-Las ecuaciones que rigen el movimiento de las dos masas m y M , del sistema de la figura, vienen dadas por:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K + k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \text{Sen } \omega_e t \quad [1]$$

o también:

$$\begin{aligned} M \cdot \ddot{x}_1 + (K + 1) \cdot x_1 - k \cdot x_2 &= F_0 \cdot \text{Sen } \omega t \\ m \cdot \ddot{x}_2 - k \cdot x_1 + k \cdot x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Partiendo de unas condiciones iniciales nulas la vibración completa del sistema quedará reducida a la solución particular de las dos ecuaciones anteriores, que como sabemos son de la forma:

$$x_1 = X_1 \cdot \text{Sen } \omega t$$

$$x_2 = X_2 \cdot \text{Sen } \omega t$$

Sabiendo que:

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 \cdot X_1 \cdot \text{Sen } \omega t$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega^2 \cdot X_2 \cdot \text{Sen } \omega t$$

Sustituyendo y operando, queda:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot (-M \cdot \omega^2 + K + k) - k \cdot X_2 &= F_0 \\ -k \cdot X_1 + X_2 \cdot (-m \cdot \omega^2 + k) &= 0 \end{aligned} \quad [2]$$

Llamando para simplificar:

$$X_{est} = F_0/K = \text{flecha estática de } M$$

$$\omega_a^2 = k/m = \text{Frecuencia natural del amortiguador}$$

$$\Omega_n^2 = K/M = \text{Frecuencia natural de la masa principal}$$

$$\mu = m/M = \text{Relación de masas}$$

Entonces, las ecuaciones pueden escribirse:

$$X_1 \cdot \left[1 + \frac{k}{K} + \frac{\omega^2}{\Omega_n^2} \right] - X_2 \cdot \frac{k}{K} = X_{est} \quad [3]$$

$$X_1 = X_2 \cdot \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2} \right]$$

Despejando X_1 y X_2 queda;

$$\frac{X_1}{X_{1est}} = \frac{1 - (w_E^2/w_a^2)}{[1 - (w_E^2/w_a^2)] \cdot [1 + (k/K) - (w_E^2/\Omega_n^2)] - (k/K)} \quad [4]$$

$$\frac{X_2}{X_{2est}} = \frac{1}{[1 - (w_E^2/w_a^2)] \cdot [1 + (k/K) - (w_E^2/\Omega_n^2)] - (k/K)}$$

De la primera de estas dos ecuaciones [4] se observa que cuando $w_E = w_a$, $X_1 = 0$, para cualquier valor de Ω_n .

En este caso,

$$X_2 = -\frac{K}{k} \cdot X_{2est} = -\frac{F_0}{k}$$

Es decir, cuando $w_E = w_a$,

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -(F_0/k) \cdot \text{Sen } w_E t$$

(Como se observa, la fuerza en el resorte amortiguador varía en $-F_0 \cdot \text{Sen } w_E t$, que es igual y contraria a la exterior aplicada).

-Como el efecto del amortiguador dinámico de vibraciones es eliminar estas en las frecuencias de resonancia o próximas a ella, es importante analizar el comportamiento del conjunto para tales valores de la w_E de la fuerza de excitación.

Por ello es interesante analizar el caso en que $w_a = \Omega_n$, valores para los cuales es fácil comparar la respuesta del conjunto a la frecuencia de excitación w_E .

En este caso, $k/m = K/M$ ó $k/K = m/M = \mu$.

Las ecuaciones [4] resultan entonces:

$$\frac{X_1}{X_{1est}} = \frac{1 - (w_E^2/w_a^2)}{[1 - (w_E^2/w_a^2)] \cdot [1 + \mu - (w_E^2/w_a^2)] - \mu} \quad [5]$$

$$\frac{X_2}{X_{2est}} = \frac{1}{[1 - (w_E^2/w_a^2)] \cdot [1 + \mu - (w_E^2/w_a^2)] - \mu}$$

Para obtener los valores de las frecuencias de resonancia del sistema, basta con igualar a cero los denominadores de las expresiones [5] (que, evidentemente, son iguales)

$$[1 - (w_E^2/w_a^2)] \cdot [1 + \mu - (w_E^2/w_a^2)] - \mu = 0$$

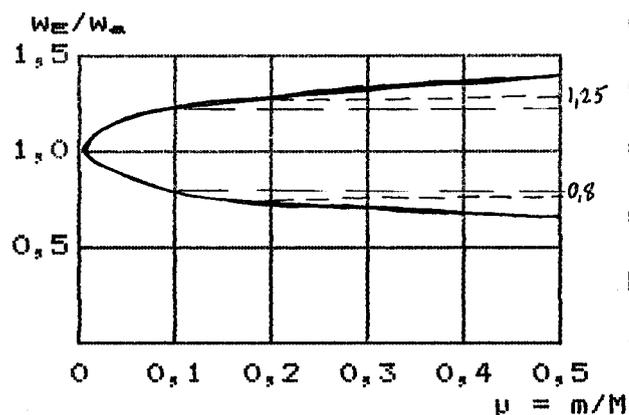
o también

$$(w_E/w_a)^4 - (w_E/w_a)^2 \cdot (2 + \mu) + 1 = 0 \quad [6]$$

Ecuación de 4º grado, o de 2º grado en $(w_E/w_a)^2$, y cuyas soluciones son:

$$(w_E/w_a)^2 = [1 + (\mu/2)] \pm \sqrt{\mu + (\mu^2/4)} \quad [7]$$

Esta ecuación se puede representar gráficamente como se ve



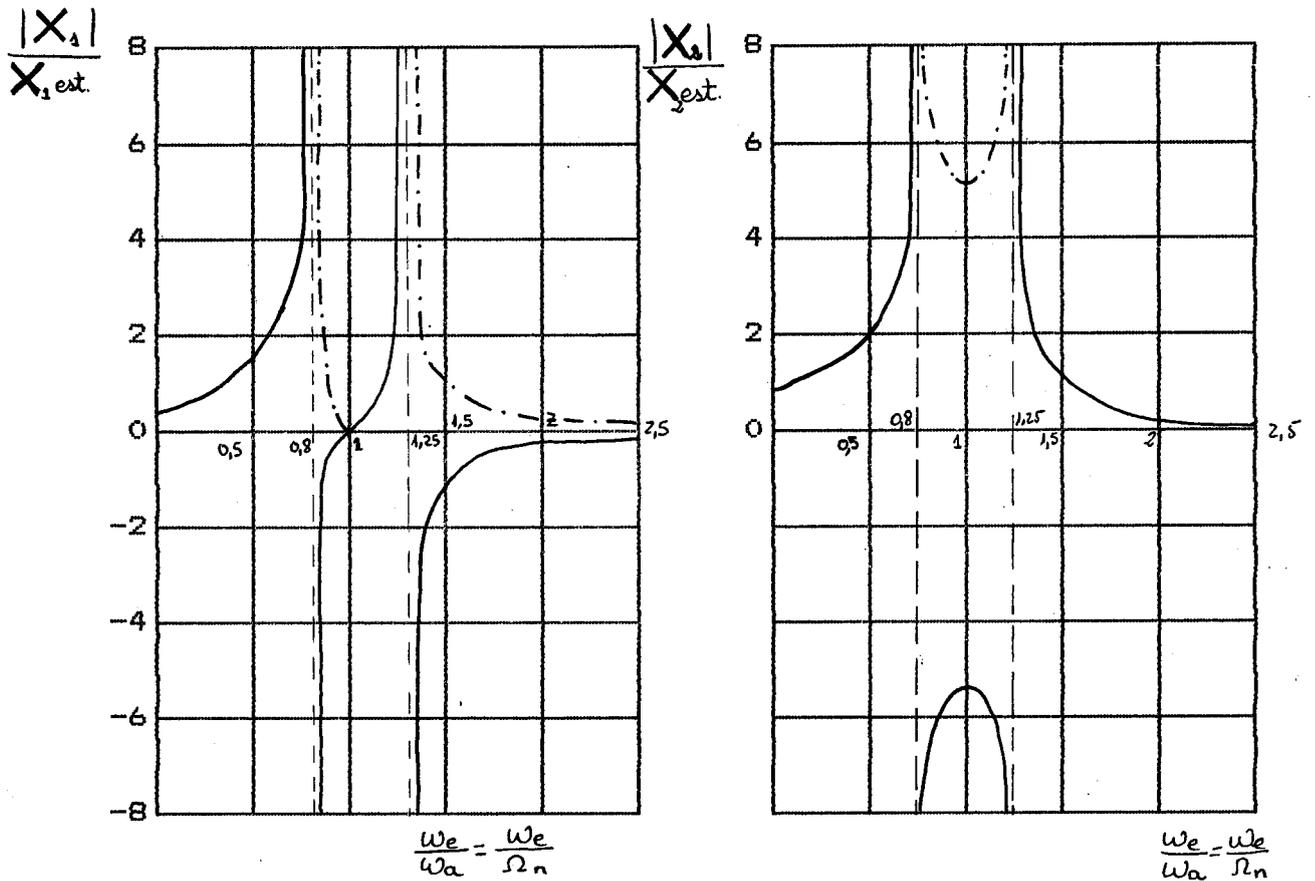
en la figura. En ella se observa, por ejemplo, que un amortiguador con una masa décima parte de la principal, origina dos frecuencias de resonancia

del sistema combinado de 1,17 y 0,85 veces el valor de la frecuencia de excitación

$$w_E/w_a = 1,17 \implies w_E = 1,17 \cdot w_a = 1,17 \cdot \Omega_n$$

(pues hemos supuesto $w_a = \Omega_n$)

Las ecuaciones [5] se representan en las figura para $\mu = 0,2 = 1/5$ y $w_a = \Omega_n$



Movimiento de x_1 :

-Para $w_E = 0$, $X_1 = X_{1est}$

-Para $w_E > 0$, pero pequeños, X_1 es positivo, al serlo el numerador y denominar de [5].

-Para $w_E = 0,8 \cdot w_a = 0,8 \cdot \Omega_n$ aparece la primera resonancia. X_1 se hace infinito.

-Para $w_E > 0,8 \cdot w_a$, pero próximo a este valor, el denominador se hace negativo (lo cual significa un desfase

"instantáneo" entre el movimiento de la masa X_1 y el de la fuerza aplicada $F(t)$.

-Para $w_E = w_n = \Omega_n$, $X_1 = 0$ La masa no se mueve.

-Para $w_E = 1,25 \cdot w_n = 1,25 \cdot \Omega_n$ Aparece la segunda resonancia. X_1 vuelve a hacerse infinito.

-Para $w_E > 1,25 w_n$, adquiere de nuevo valores negativos (se origina un nuevo cambio de fase).

-Para valores grandes de w_E , la X_1 se va haciendo cada vez más pequeña.

Movimiento de x_2 :

En este caso el comportamiento es el descrito en la figura.

Como el numerador es constante (igual a uno), los cambios de signo se deben a los cambios del denominador de [5], es decir, sólo en los puntos de resonancia (y no como x_1 , también en $w_E/w_n = 1$)

NOTA: Por lo expuesto es evidente que un amortiguador dinámico de vibraciones sólo es útil en los casos en que la frecuencia circular de la fuerza de excitación es constante.

Entonces puede trabajarse con un amortiguador dinámico dado por $w_n = \Omega_n$ con amplitudes de x_1 nulas (y x_2 pequeñas), en las proximidades o en el punto de resonancia.

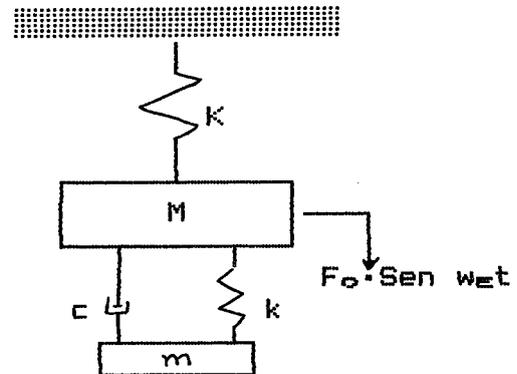
Este es el caso de las máquinas acopladas a motores eléctricos de velocidad constante.

Tal dispositivo es totalmente inútil en máquinas de velocidad variable (automóviles, etc.), pues sólo lograríamos reemplazar una velocidad de resonancia por otras dos.

Pero aún así, puede lograrse una cierta utilidad a estos amortiguadores dinámicos, si introducimos un amortiguamiento c en la masa compensatoria, como veremos más adelante.

1-4-2.-AMORTIGUADOR DINAMICO DE VIBRACIONES, AMORTIGUADO

Responde al esquema representado en la figura. Las ecuaciones que dan el movimiento de las masas M y m pueden escribirse:



$$M \cdot \ddot{x}_1 + K \cdot x_1 + k \cdot (x_1 - x_2) + c \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_0 \cdot \text{Sen } w_e t$$

$$m \cdot \ddot{x}_2 + k \cdot (x_2 - x_1) + c \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0$$

En principio, vamos a olvidarnos del movimiento transitorio (vibración amortiguada) y analizar solamente el movimiento permanente o vibración forzada.

Ensayando soluciones particulares del tipo:

$$x_1 = X_1 \cdot e^{i \cdot w_e \cdot t}$$

$$x_2 = X_2 \cdot e^{i \cdot w_e \cdot t}$$

queda, después de sustituir y agrupar términos:

$$(-M \cdot w_e^2 + K + k + i \cdot w_e \cdot c) \cdot X_1 - (k + i \cdot w_e \cdot c) \cdot X_2 = F_0$$

$$- (k + i \cdot w_e \cdot c) \cdot X_1 + (-m \cdot w_e^2 + k + i \cdot w_e \cdot c) \cdot X_2 = 0$$

Resolviendo para X_1 , ya que el movimiento de m no tiene en principio mucho interés, tendríamos:

$$X_1 = F_0 \cdot \frac{(k - m \cdot w_e^2) + i \cdot w_e \cdot c}{[(-M \cdot w_e^2 + K) \cdot (-m \cdot w_e^2 + k) - m \cdot w_e^2 \cdot k] + i \cdot w_e \cdot c \cdot (-M \cdot w_e^2 + K - m \cdot w_e^2)} \quad [1]$$

Que también se puede escribir:

$$X_1 = \frac{F_0 \cdot (A + Bi)}{(C + Di)} = F_0 \cdot \frac{(A \cdot C + B \cdot D) + i \cdot (B \cdot C - A \cdot D)}{C^2 + D^2}$$

Con lo cual el módulo será

$$|X_1| = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}}$$

que queda al sustituir:

$$\frac{|X_1|^2}{F_0^2} = \frac{(k - B \cdot \omega_E^2) + \omega_E^2 \cdot c^2}{[(-M \cdot \omega_E^2 + K) \cdot (-B \cdot \omega_E^2 + k) - B \cdot \omega_E^2 \cdot k] + \omega_E^2 \cdot c^2 \cdot (-M \cdot \omega_E^2 + K - B \cdot \omega_E^2)^2} \quad [2]$$

Como vemos, la amplitud del movimiento de m , $|X_1|$, depende de 7 variables: F_0 , ω_E , c , K , k , M y m .

Pasando a valores adimensionales, y llamando:

$$\mu = m/M$$

$$\omega_n^2 = k/m = \text{frecuencia natural del absorber}$$

$$\Omega_n^2 = K/M = \text{frecuencia natural sistema principal}$$

$$f = \omega_n/\Omega_n = \text{razón de frecuencias naturales}$$

$$g = \omega_E/\omega_n = \text{relación de la frecuencia forzada con la del absorber}$$

$$X_{est} = F_0/K = \text{deformación estática del sistema principal}$$

$$C_c = 2m \cdot \omega_n = \text{amortiguamiento crítico del absorber}$$

Con esta nomenclatura, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{|X_1|}{X_{est}} = \sqrt{\frac{[2 \cdot (C/C_c) \cdot g]^2 + (g^2 - f^2)^2}{[2 \cdot (C/C_c) \cdot g]^2 \cdot (g^2 - 1 + \mu \cdot g^2)^2 + [\mu \cdot f^2 \cdot g^2 - (g^2 - 1) \cdot (g^2 - f^2)]^2}} \quad [3]$$

Con lo que queda la relación de amplitudes $|X_1|/X_{est}$ en función de cuatro variables, μ , C/C_c , f y g .

La figura muestra la gráfica de $|X_1|/X_{est}$ frente a g (o lo que es lo mismo, w_e) para un sistema con $f = 1$ (o sea, $w_a = \Omega_n$) y $\mu = 1/20$ y, diferentes valores de C/C_c .

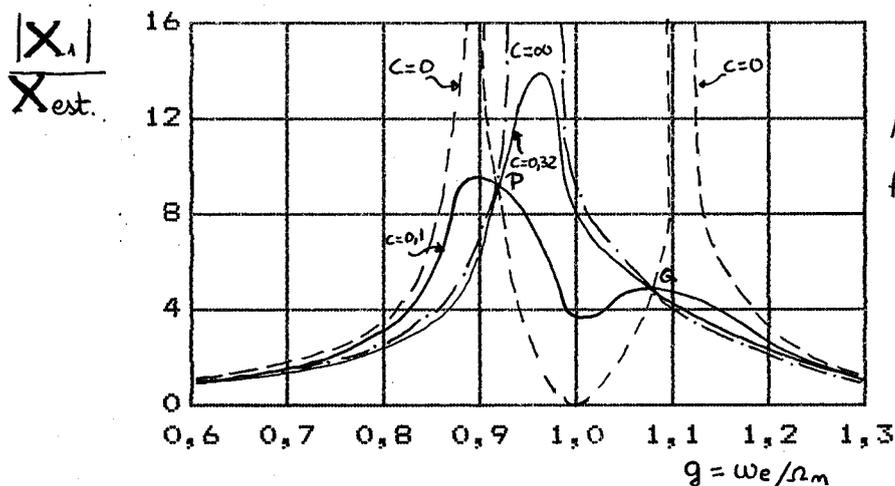
Como se ve, para $C = 0$ estamos en el mismo caso anterior, de vibración libre no amortiguada. La gráfica presenta dos picos de resonancia, de amplitud ∞ , y una amplitud nula para $w_e = \Omega_n = w_a$.

Para $C = \infty$, la ecuación que da $|X_1|/X_{est}$ se reduce a:

$$\left[\frac{|X_1|}{X_{est}} \right]^2 = \frac{1}{(1 - g^2 - \mu \cdot g^2)^2}$$

Con una asíntota para: $g^2 = 1/(1 + \mu) = w_e^2/w_a^2$

En esta situación, $w_e^2 = (m \cdot \Omega_n^2)/(m + M) = K/(m + M)$, es decir, el sistema se comporta como una sola masa ($m + M$) sometida a vibración forzada, presentando una amplitud infinita para ese valor de w_e .



En la figura se han representado los valores de X_1/X_{est} para $C/C_c = 0,10$ y $C/C_c = 0,32$.

Como puede observarse, todas las curvas se cortan en dos puntos P y Q, con independencia del valor de C.

Además, para valores de C diferentes de 0 ó ∞ , las amplitudes de M son siempre finitas.

-El problema que se presenta en el diseño de un absorbente de este tipo es el lograr que los picos de respuesta sean lo más bajo posible.

Para ello, en primer lugar, podríamos ir variando el amortiguamiento C/C_c , hasta lograr que la curva tenga un máximo en el punto P (tangente horizontal en P).

En segundo lugar también podría modificarse el valor de $f = \omega/\omega_n$, puesto que con ello, los puntos P y Q van cambiando de posición (uno de ellos "asciende" y el otro, "desciende").

Obviamente, el diseño más favorable es aquel que conjuga ambos supuestos, que en todo caso serán:

- a.- Puntos P y Q a la misma altura
- b.- Curvas con máximo en P o en Q (tangentes horizontales en esos puntos)

-Para calcular todo lo expuesto, volvamos de nuevo a la ecuación que da $|X_1|/X_{est}$.

Los puntos P y Q serán aquellos cuyas abscisas que hagan que $|X_1|/X_{est}$ sea independiente de C/C_c .

La ecuación [3] puede escribirse:

$$\frac{|X_1|}{X_{est}} = \sqrt{\frac{A \cdot (C/C_c)^2 + B}{C \cdot (C/C_c)^2 + D}}$$

que será independiente de C/C_e cuando sea $A/C = B/D$, o sea, cuando:

$$\left[\frac{1}{g^2 - 1 + \mu \cdot g^2} \right]^2 = \left[\frac{g^2 - f^2}{\mu \cdot f^2 \cdot g^2 - (g^2 - 1) \cdot (g^2 - f^2)} \right]^2$$

que podemos escribir también:

$$\frac{1}{g^2 - 1 + \mu \cdot g^2} = \pm \frac{g^2 - f^2}{\mu \cdot f^2 \cdot g^2 - (g^2 - 1) \cdot (g^2 - f^2)}$$

a.- Tomando el signo (-) queda:

$$\mu \cdot f^2 \cdot g^2 - (g^2 - 1) \cdot (g^2 - f^2) = -(g^2 - f^2) \cdot (g^2 - 1 + \mu \cdot g^2)$$

$$\mu \cdot f^2 \cdot g^2 = -\mu \cdot g^2 \cdot (g^2 - f^2)$$

$$f^2 = -g^2 + f^2 \implies g^2 = 0$$

que quiere decir que para $g = 0 \implies w_E = 0$, la $|X_1|$ es independiente de C/C_e . (Resultando trivial).

b.- Tomando el signo (+), queda:

$$g^4 - 2 \cdot g^2 \cdot \frac{1 + f^2 + \mu \cdot f^2}{2 + \mu} + \frac{2f^2}{2 + \mu} = 0 \quad [4]$$

que es una ecuación de segundo grado en g^2 , con dos raíces, que son las abscisas de los puntos P y Q buscadas.

-Para modificar la "altura" de los puntos P y Q podemos modificar f . Para saber cual valor de f hace que P y Q tengan la misma altura podíamos sustituir los valores de g_1 y g_2 obtenidos de [4] en la ecuación [3], y después, igualando las dos expresiones así obtenidas, calcular f .

Podemos abreviar el cálculo si pensamos que P y Q no dependen de C/C_e . Por tanto, podemos operar con la ecuación [3] en la que $C = \infty$.

Entonces, [3] queda reducida a :

$$\frac{X_1}{X_{est}} = \frac{1}{1 - g^2 \cdot (1 + \mu)}$$

Sustituyendo g_1 y g_2 queda:

$$\frac{1}{1 - g_1^2 \cdot (1 + \mu)} = \frac{-1}{1 - g_2^2 \cdot (1 + \mu)}$$

(El signo (-) se debe a que en realidad la curva debería ser negativa para valores de g mayores que los de resonancia - página ---- 48 ----).

Operando:

$$g_1^2 + g_2^2 = \frac{2}{1 + \mu} \quad [5]$$

Como en una ecuación de 2º grado, $ax^2 + bx + c = 0$, el coeficiente $-b$ es igual a la suma de las raíces, podemos poner, en [4]

$$g_1^2 + g_2^2 = \frac{2 \cdot (1 + f^2 + \mu \cdot f^2)}{2 + \mu}$$

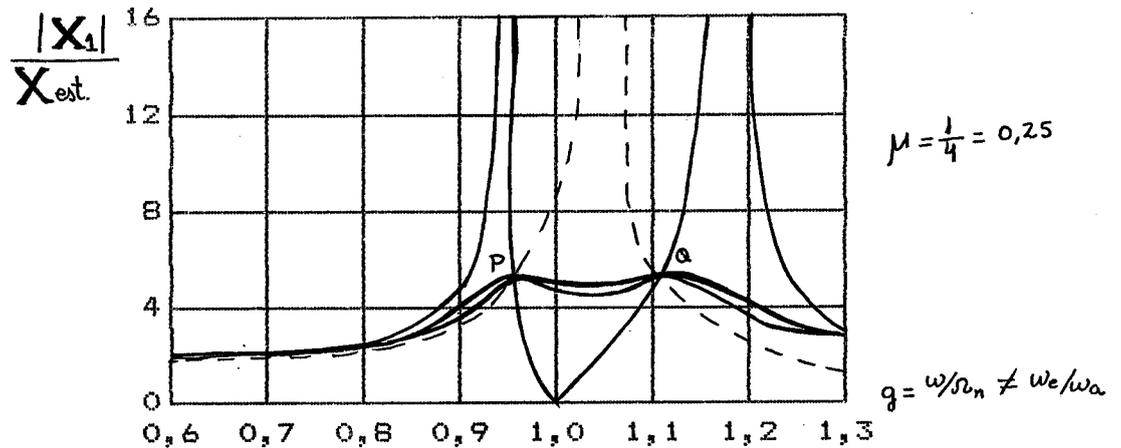
que por comparación con [5] da:

$$\frac{w_a}{\Omega_n} = f = \frac{1}{1 + \mu} \quad [6]$$

Tal es el valor de f que hace que P y Q tengan la misma "altura".

Una vez hallados P y Q , e igualados en altura a base de una relación conveniente entre w_a y Ω_n , hemos de ir variando C/C_c hasta lograr que en uno de los dos puntos la tangente sea horizontal (en ambos puntos P y Q nunca pueden ser simultáneamente máximos en tales puntos).

En la figura se han representado dos curvas, para dos valores de C/C_c . Una es máxima en P, pero no en Q, y la otra, al revés.



Para calcular $|X_1|$ en los puntos P y Q, y dado que en esos puntos, $|X_1|$ es independiente del amortiguamiento, podemos sustituir los valores de g_1 y g_2 en la ecuación:

$$\frac{|X_1|}{X_{est}} = \frac{1}{1 - g^2 \cdot (1 + \mu)}$$

queda, finalmente:

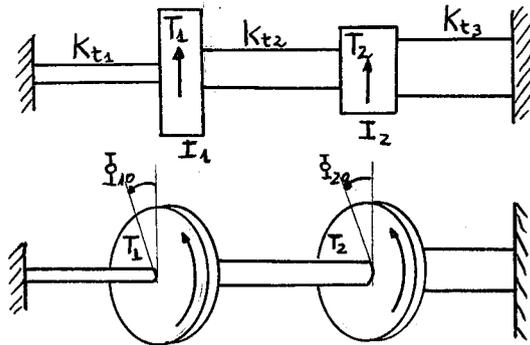
$$|X_1| = X_{est} \cdot \sqrt{1 + (2/\mu)}$$

(Recuérdese que se tiene que cumplir que $f = 1/(1 + \mu)$)

2.-SISTEMAS DE TORSION

2-1.-VIBRACION DE TORSION EN EJES, CON 2 GDL

-Supongamos el eje de la figura, con 2GDL.



-Sean K_{t1} , K_{t2} y K_{t3} las rigideces a torsión de cada uno de los tramos (que se suponen de inercia despreciable frente a la de las masas concentradas).

-Sean I_1 e I_2 las inercias de las masas rotatorias.

-Cuando al sistema se le aparta de su posición de equilibrio (por ejemplo, girando el disco 1 el ángulo θ_{10} y al disco 2 el ángulo θ_{20}), y luego se le deja libre, las dos masas iniciarán un movimiento vibratorio.

Si los pares exteriores son nulos (vibración libre), las ecuaciones diferenciales serán:

$$I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 = -K_{t1} \cdot \theta_1 - K_{t2} \cdot (\theta_1 - \theta_2) \quad [1]$$

$$I_2 \cdot \ddot{\theta}_2 = -K_{t2} \cdot (\theta_2 - \theta_1) - K_{t3} \cdot \theta_2$$

Ecuaciones que también pueden escribirse:

$$I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + (K_{t1} + K_{t2}) \cdot \theta_1 - K_{t2} \cdot \theta_2 = 0 \quad [2]$$

$$I_2 \cdot \ddot{\theta}_2 - K_{t2} \cdot \theta_1 + (K_{t2} + K_{t3}) \cdot \theta_2 = 0$$

Si el movimiento resultante es de tipo armónico, las soluciones serán del tipo:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= A \cdot \cos(\omega t + \delta) \\ \theta_2 &= B \cdot \cos(\omega t + \delta)\end{aligned}\quad [3]$$

Derivando, sustituyendo en [2] y operando se obtiene:

$$\begin{aligned}(K_{t1} + K_{t2} - I_1 \cdot \omega^2) \cdot A - K_{t2} \cdot B &= 0 \\ -K_{t2} \cdot A + (K_{t2} + K_{t3} - I_2 \cdot \omega^2) \cdot B &= 0\end{aligned}\quad [4]$$

Sistema de ecuaciones algebraicas en A y B.

La solución no trivial implica:

$$\begin{vmatrix} K_{t1} + K_{t2} - I_1 \cdot \omega^2 & -K_{t2} \\ -K_{t2} & K_{t2} + K_{t3} - I_2 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad [5]$$

De lo cual se obtienen la ecuación característica:

$$\begin{aligned}(\omega^2)^2 - \left[\frac{K_{t1} + K_{t2}}{I_1} + \frac{K_{t2} + K_{t3}}{I_2} \right] \cdot \omega^2 + \\ + \frac{K_{t1} \cdot K_{t2} + K_{t2} \cdot K_{t3} + K_{t3} \cdot K_{t1}}{I_1 \cdot I_2} = 0\end{aligned}$$

Que nos da los dos valores de las frecuencias circulares naturales ω_1 y ω_2 .

Por consiguiente, la respuesta del sistema será de la forma:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \delta_1) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \delta_2) \\ \theta_2(t) &= B_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \delta_1) + B_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \delta_2)\end{aligned}\quad [6]$$

en donde A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , δ_1 y δ_2 son constantes arbitrarias. a determinar.

Las razones de amplitud o modos principales pueden hallarse fácilmente, resultando:

$$A_1/B_1 = \frac{K_{t2}}{K_{t1} + K_{t2} - I_1 \cdot \omega_1^2} = \frac{K_{t2} + K_{t3} - I_2 \cdot \omega_1^2}{K_{t2}} = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$A_2/B_2 = \frac{K_{t2}}{K_{t1} + K_{t2} - I_1 \cdot \omega_2^2} = \frac{K_{t2} + K_{t3} - I_2 \cdot \omega_2^2}{K_{t2}} = \frac{1}{\lambda_2}$$

En consecuencia, las ecuaciones [6] pueden escribirse:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \bar{\varphi}_1) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \bar{\varphi}_2) \\ \theta_2(t) &= \lambda_1 \cdot A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \bar{\varphi}_1) + \lambda_2 \cdot A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \bar{\varphi}_2) \end{aligned} \quad [7]$$

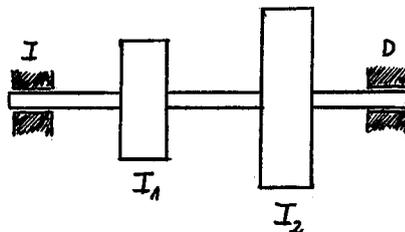
Las constantes A_1 , A_2 , $\bar{\varphi}_1$ y $\bar{\varphi}_2$ pueden ahora determinarse en función de las condiciones iniciales.

En el ejemplo que venimos desarrollando:

$$t = 0 \quad \left| \quad \begin{array}{l} \theta_1 = \bar{\varphi}_{10} \quad \dot{\theta}_1 = 0 \\ \theta_2 = \bar{\varphi}_{20} \quad \dot{\theta}_2 = 0 \end{array} \right.$$

NOTA: Todo lo expuesto también puede ser aplicado a árboles rotatorios.

En efecto, supongamos el árbol de la figura, girando a velocidad constante $\dot{\theta}_0$.



Si en un instante cualquiera se aplica un freno en D, que impida el giro, el sistema iniciará un movimiento vibratorio, bajo las condiciones iniciales.

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_0 \end{array}$$

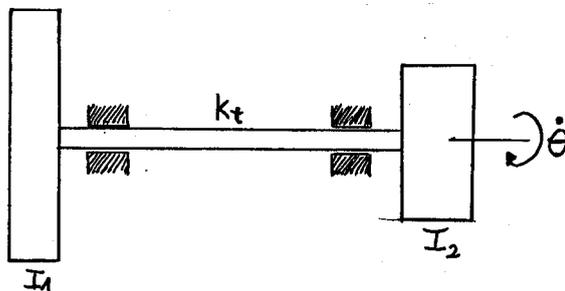
Siendo las ecuaciones del sistema las mismas de
antes.

2-2.-SISTEMAS DE TORSION SEMIDEFINIDOS

-Un sistema de torsión se dice que es "semidefinido" cuando una de las frecuencias naturales es cero. En tal caso, no hay movimiento relativo entre las masas. El sistema no vibra y se comporta como si fuera rígido.

-En la figura se ha representado uno de estos sistemas, de 2 GDL, que puede representar en esquema un grupo motor-alternador, unidos por un árbol de rigidez K_t .

I_1 e I_2 representan las inercias del motor y del generador respectivamente.



Si θ_1 y θ_2 son los desplazamientos angulares debidos a la vibración del sistema, las ecuaciones diferenciales del movimiento serán:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 &= -K_t \cdot (\theta_1 - \theta_2) \\ I_2 \cdot \ddot{\theta}_2 &= -K_t \cdot (\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad [1]$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_t & -K_t \\ -K_t & K_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al ser el movimiento de tipo armónico:

$$\theta_1(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\theta_2(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Derivando y sustituyendo en [1], tenemos:

$$\begin{bmatrix} K_t - w^2 \cdot I_1 & -K_t \\ -K_t & K_t - w^2 \cdot I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual la ecuación característica se obtendrá de

$$\begin{vmatrix} K_t - w^2 \cdot I_1 & -K_t \\ -K_t & K_t - w^2 \cdot I_2 \end{vmatrix} = 0$$

Operando, obtenemos:

$$w^2 \cdot \left[w^2 - \left(\frac{K_t}{I_1} + \frac{K_t}{I_2} \right) \right] = 0$$

De donde se obtiene las frecuencias naturales circulares:

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = \sqrt{K_t \cdot \left[\left(\frac{1}{I_1} \right) + \left(\frac{1}{I_2} \right) \right]}$$

Las relaciones de amplitudes para cada frecuencia natural o modos principales serán:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}_1 = \frac{K_t}{K_t - w_1^2 \cdot I_1} = \frac{K_t - w_1^2 \cdot I_2}{K_t} = 1 \quad \text{para } w_1 = 0$$

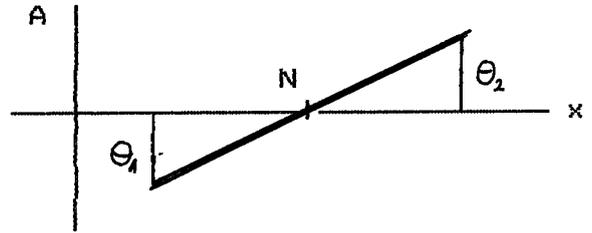
$$\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}_2 = \frac{K_t}{K_t - w_2^2 \cdot I_1} = \frac{K_t - w_2^2 \cdot I_2}{K_t} = - \frac{I_2}{I_1}$$

$$\text{para } w_2 = \sqrt{K_t \cdot \left[\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right]}$$

-Como se ve, para $w_1 = 0$, $\Theta_1/\Theta_2 = 1$, es decir, no hay desplazamiento relativo entre los discos. Se mueven como un todo. Este modo se denomina "modo cero".

-Para w_2 , ambos discos oscilan en direcciones contrarias, como se ve en la figura.

El punto N no vibra, y es el modo de la vibración.

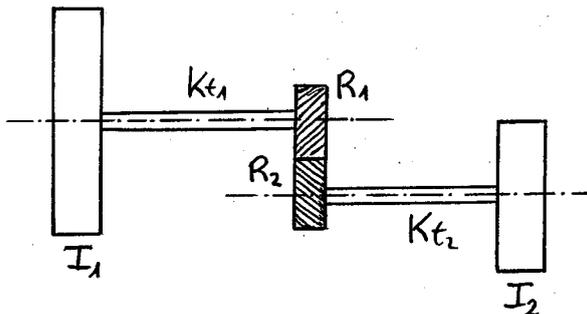


-Las verdaderas amplitudes del giro de cada disco se obtendrá en función de las condiciones iniciales.

2-3.-VIBRACIONES EN ENGRANAJES

-En muchos casos se tienen sistemas vibrantes de 2 GDL, del tipo motor-alternador, por ejemplo, que giran a diferentes velocidades, es decir, que están conectados por un conjunto de engranajes.

En la figura se ha representado uno de estos, en donde se supone que la inercia de las ruedas dentadas es despreciable frente a las de las masas 1 y 2.

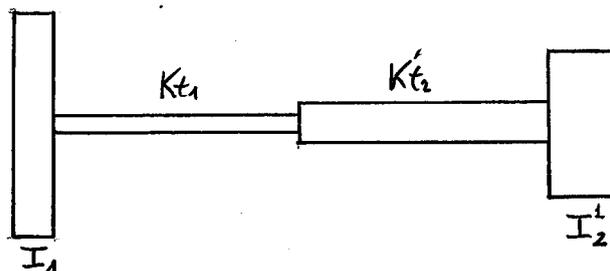


Si n es la relación de transmisión entre las dos ruedas dentadas, podemos reducir la inercia de 2 al eje 1, así como la rigidez (según vimos en dinámica de máquinas).

$$I_2^1 = n^2 \cdot I_2 \quad (\text{momento de inercia de 2 reducido a 1})$$

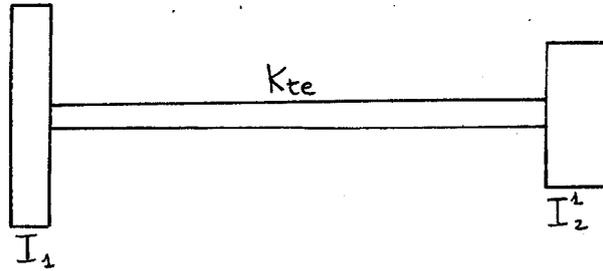
$$K_{t2}^1 = n^2 \cdot K_{t2} \quad (\text{rigidez de 2 reducida a 1})$$

Según esto, tendremos el siguiente sistema equivalente:



Que a su vez equivale (poniendo la rigidez suma) al sistema:

$$\frac{1}{K_{tE}} = \frac{1}{K_{t1}} + \frac{1}{K_{t2}^1} ; \quad K_{tE} = \frac{n^2 \cdot K_{t1} \cdot K_{t2}}{K_{t1} + n^2 \cdot K_{t2}}$$



Sistema que es exactamente igual al estudiado anteriormente.
Las frecuencias naturales serán (en Hz)

$$f_1 = 0$$

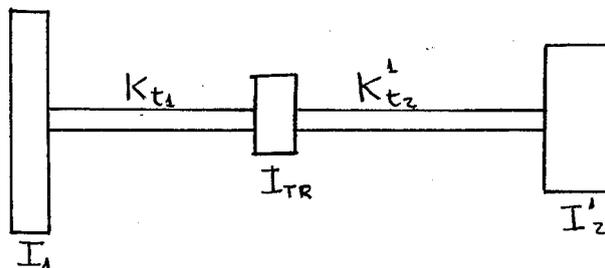
$$f_2 = 1/2\pi \cdot \sqrt{\frac{n^2 \cdot K_{t1} \cdot K_{t2}}{K_{t1} + n^2 \cdot K_{t2}} \cdot \left| \frac{1}{I_1} + \frac{1}{n^2 \cdot I_2} \right|}$$

NOTA: Si se incluyeran las inercias de las ruedas dentadas, podríamos reducir la inercia de la rueda R2 al eje 1, y luego suponer la inercia suma.

$$I_{R2}^1 = n^2 \cdot I_{R2}$$

$$I_{TR} = I_{R1} + n^2 \cdot I_{R2} \quad (\text{inercia total del conjunto ruedas})$$

El sistema equivalente será:



que es un sistema de 3 GDL, que será estudiado en el siguiente tema.

3-1-.CABECEO DE ARBOLES. VELOCIDADES CRITICAS.-

-Con el desarrollo de máquinas de alta velocidad surgió un fenómeno "peculiar" en los árboles rotatorios:

Estos se "arqueaban", tanto más cuanto mayor era su velocidad de rotación, de manera que su eje geométrico no coincidía con la línea que unía los apoyos.

Por otro lado, el plano formado por el eje geométrico del árbol deformado y la línea de apoyos también iba girando (fenómeno conocido en inglés por "whirling" y que nosotros denominamos "cabeceo") siendo su velocidad de rotación igual a la de giro del árbol sobre sí mismo, o incluso diferente.

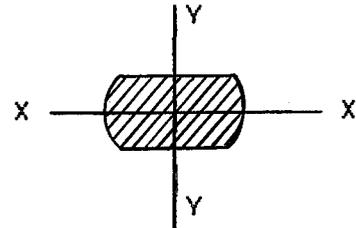
También se observó, (en un plano transversal a la línea de apoyos) que el centro geométrico del árbol describía unas veces una circunferencia, y otras una elipse. Incluso, a ciertas velocidades de rotación (llamadas críticas) tal elipse se alarga fuertemente según uno de sus ejes, de modo que la trayectoria del centro del árbol tiende a ser prácticamente una línea recta: el árbol vibra violentamente y puede llegar a romperse.

-Todos estos fenómenos son el resultado de varias causas obrando conjuntamente, entre las que cabe mencionar el desequilibrio de la propia masa del árbol (que actúa como una fuerza excitadora, de la misma frecuencia que la rotación del árbol), el amortiguamiento interno o histerético, el amortiguamiento externo (rozamiento con el aire), fricción fluida en los cojinetes, rigideces de estos, fuerzas giroscópicas, etc., etc..

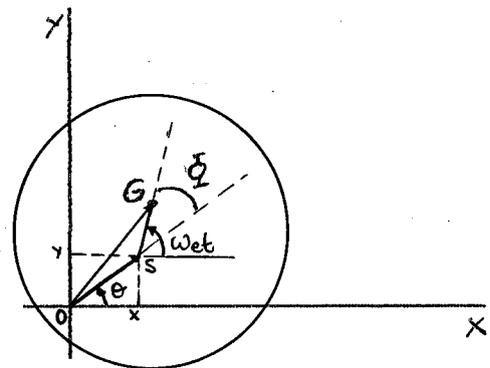
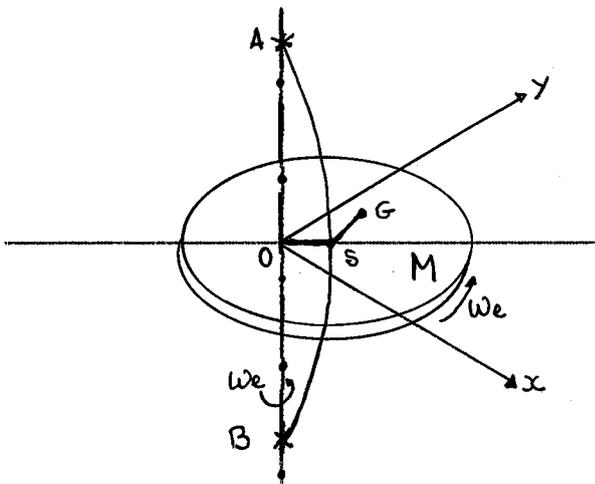
-A continuación vamos a realizar un estudio de estos fenómenos en el caso hipotético de un árbol ideal, con su masa concentrada en un disco central de masa M y centro de masas G , desplazada la distancia $e = SG$ de su centro geométrico (s) por motivo de un equilibrado imperfecto, y que gira sobre sí mismo con la velocidad angular ω_e .

Supondremos para generalizar que la sección recta del árbol es tal que su rigidez a flexión es diferente en dos planos perpendiculares.

También supondremos despreciable el amortiguamiento interno, pero no así el externo, cuya constante llamaremos c .



-En la figura se ha representado el árbol giratorio ya arqueado, así como unos ejes X - Y fijos a los apoyos del árbol. Dado que la posición del disco viene dada en cada instante por las dos coordenadas x e y de su centro geométrico, se trata de un sistema vibrante de 2 GDL.



Obsérvese que el ángulo θ define la posición del plano ASB respecto al eje OX, de manera que $\dot{\theta}$ será la velocidad con la que gira tal plano (whirling). El ángulo ξ da, en cada instante, la posición del centro de gravedad G respecto de la línea OS.

-En tal sistema de coordenadas puede escribirse:

$$\vec{r}_G = \vec{OG} = (x + e \cdot \cos w_E \cdot t) \cdot \vec{i} + (y + e \cdot \sin w_E \cdot t) \cdot \vec{j}$$

Derivando dos veces:

$$\vec{r}_G'' = (\ddot{x} - e \cdot w_E^2 \cdot \cos w_E \cdot t) \cdot \vec{i} + (\ddot{y} - e \cdot w_E^2 \cdot \sin w_E \cdot t) \cdot \vec{j}$$

que es la aceleración de G.

Tal acción es contrarrestada por la elasticidad del árbol flexionado y por las fuerzas debidas al amortiguamiento.

Estas dos últimas actúan sobre el centro geométrico S.

Aplicando la segunda ley de Newton ($\Sigma \vec{F} = 0$), según las componentes x e y, se obtienen:

$$-K_{fx} \cdot x - c \cdot \dot{x} = m \cdot (\ddot{x} - e \cdot w_E^2 \cdot \cos w_E \cdot t)$$

$$-K_{fy} \cdot y - c \cdot \dot{y} = m \cdot (\ddot{y} - e \cdot w_E^2 \cdot \sin w_E \cdot t)$$

que también pueden escribirse:

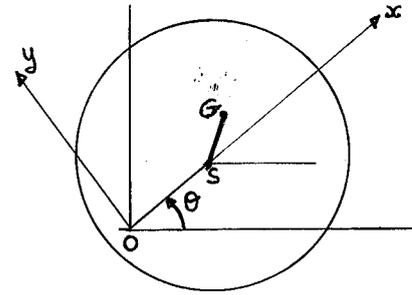
$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K_{fx} \cdot x = m \cdot e \cdot w_E^2 \cdot \cos w_E \cdot t \quad [1]$$

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + K_{fy} \cdot y = m \cdot e \cdot w_E^2 \cdot \sin w_E \cdot t \quad [2]$$

Como se ve, forman un sistema desacoplado, por lo que ambos movimientos, según OX y según OY, pueden estudiarse por separado.

Se observa que la fuerza de excitación es la misma para ambos, pero desfasada $\pi/2$ (La primera es $\cos w_E \cdot t$ y la segunda $\sin w_E \cdot t$).

NOTA: Es fácil comprobar que si se hubiera elegido el sistema de coordenadas de la figura, las ecuaciones del sistema hubieran resultado acopladas.



Las ecuaciones [1] y [2] son idénticas a las que definen la vibración de sistemas de 1 GDL, excitados por un rotor desequilibrado.

Tal como allí vimos, la respuesta permanente del sistema será:

$$x(t) = X \cdot \cos(\omega_E \cdot t - \delta_x) \quad [3]$$

$$y(t) = Y \cdot \sin(\omega_E \cdot t - \delta_y) \quad [4]$$

siendo:

$$X = \frac{e \cdot \Gamma_x^2}{\sqrt{(1 - \Gamma_x^2)^2 + (2 \cdot \xi_x \cdot \Gamma_x)^2}}$$

$$\omega_{nx} = \sqrt{K_{fx}/m}$$

$$\Gamma_x = \omega_E / \omega_{nx}$$

$$\xi_x = c / 2m \cdot \omega_{nx}$$

$$Y = \frac{e \cdot \Gamma_y^2}{\sqrt{(1 - \Gamma_y^2)^2 + (2 \cdot \xi_y \cdot \Gamma_y)^2}}$$

$$\delta_x = \text{tag}^{-1} \cdot \frac{2 \cdot \xi_x \cdot \Gamma_x}{1 - \Gamma_x^2}$$

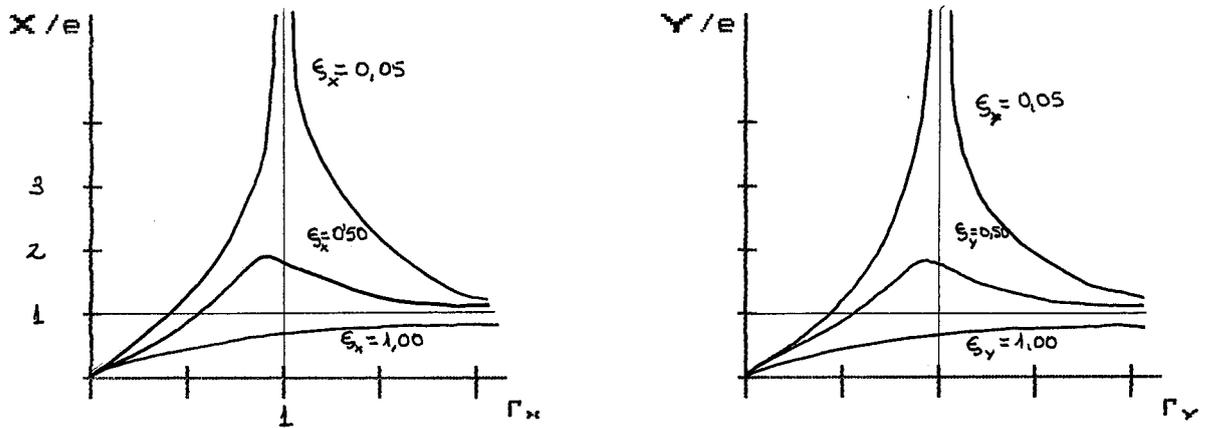
$$\omega_{ny} = \sqrt{K_{fy}/m}$$

$$\Gamma_y = \omega_E / \omega_{ny}$$

$$\xi_y = c / 2m \cdot \omega_{ny}$$

$$\delta_y = \text{tag}^{-1} \cdot \frac{2 \cdot \xi_y \cdot \Gamma_y}{1 - \Gamma_y^2}$$

En forma gráfica:



En consecuencia, el movimiento del centro S del disco es la suma de dos movimientos vibratorios armónicos de igual frecuencia (ω_e), perpendiculares entre sí, y de distintas amplitudes X e Y . Tales amplitudes dependen a su vez de ω_e y de c .

El resultado, como sabemos, puede ser una circunferencia, una elipse e incluso una línea recta, dependiendo de las relaciones entre tales valores.

-Caso en que $K_{fx} = K_{fy} = K_f$ (árbol circular)

En este caso:

$$\omega_{nx} = \omega_{ny} = \sqrt{K_f/m} = \omega_n$$

$$\xi_x = \xi_y = c/2m \cdot \omega_n$$

es decir, las dos frecuencias propias tienen el mismo valor.

En estas condiciones:

$$X = Y = \frac{e \cdot r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} \quad [5]$$

$$\bar{\alpha}_x = \bar{\alpha}_y = \bar{\alpha} = \text{tag}^{-1} \cdot \frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2} \quad [6]$$

Dividiendo la ecuación [4] por la ecuación [5], se tiene, para este supuesto:

$$\text{tag } \theta = Y(t)/X(t) = \text{tag } (\omega_E \cdot t - \delta)$$

es decir:

$$\theta = \omega_E \cdot t - \delta \quad [7]$$

de donde se deduce:

$$\dot{\theta} = \omega_E$$

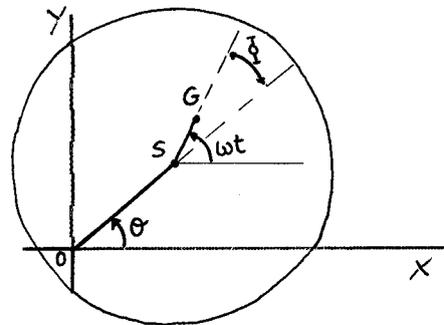
Es decir, cuando $K_{fx} = K_{fy}$, la velocidad con la que gira el plano del árbol (whirling) ($\dot{\theta}$), es igual a la velocidad de giro del propio árbol (ω_E).

Esto se conoce como "cabeceo sincrónico".

En este caso se ve fácilmente que el cambio del árbol describe una circunferencia:

$$\overline{OS} = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{e \cdot r^2}{\sqrt{(1 - r^2) + (2\xi \cdot r)^2}} = \text{cte.} \quad [8]$$

La ecuación [7] indica que en este caso δ es el ángulo entre las rectas OS y SG, como se ve en la figura.



De la ecuación [6] se deduce que para cada ω_E se tiene un ángulo δ diferente:

$$\text{tag } \delta = \frac{2 \cdot \xi \cdot (\omega_E / \omega_n)}{1 - (\omega_E / \omega_n)^2}$$

Cuando $w_e \ll w_n$, $\delta < \pi/2$

Cuando $w_e = w_n$, $\delta = \pi/2$

Cuando $w_e \gg w_n$, $\delta > \pi/2$

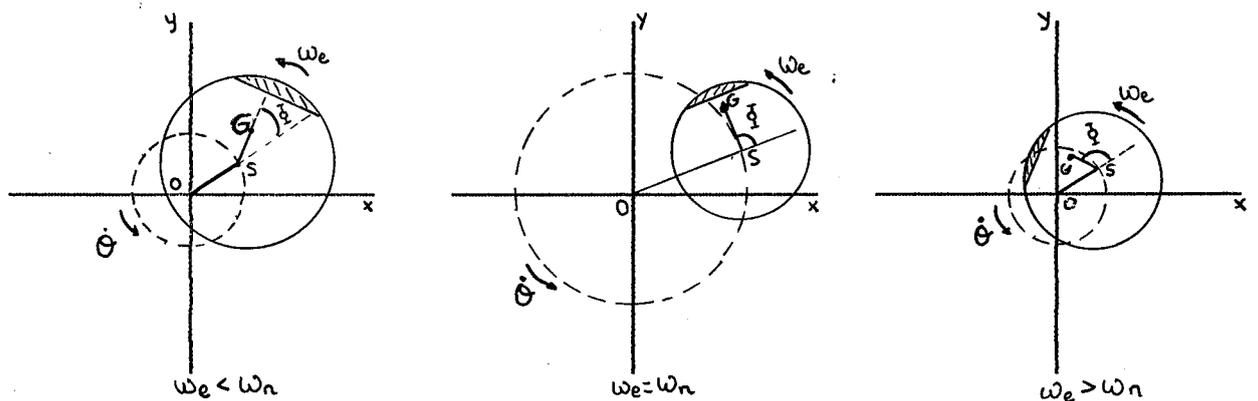
Es decir, a medida que aumenta w_e el centro de gravedad tiende a ir coincidiendo con el eje de los cojinetes.

Si se analiza la ecuación [8], vemos que tiene un máximo para el valor de w_e que hace que la derivada respecto de w_e de tal expresión sea cero:

$$\overline{OS} = \frac{e \cdot (w_e/w_n)^2}{\sqrt{[1 - (w_e/w_n)^2]^2 + [2\xi \cdot (w_e/w_n)]^2}}$$

Para cualquier otro valor de w_e , el radio \overline{OS} es menor.

Para $w_e \gg w_n$, $\overline{OS} \rightarrow e$ y $\delta \rightarrow \pi$, es decir, el centro de masas se sitúa en la línea de cojinetes, sin describir ningún círculo. El árbol flexado, de centro S, gira alrededor de G con $\dot{\theta} = w_e$. Todo lo expuesto se representa en forma gráfica en las figuras:



NOTA: Obsérvese que si un árbol no está sometido a esfuerzos de flexión, su rotación en las condiciones anteriores no introduce tensiones de fatiga, ya que la zona sometida a

tracción (parte rayada en la figura) continúa sometida a tracción durante todo el giro a la velocidad w_E . Igualmente sucede con la parte contraria sometida a compresión.

-Caso en que $K_x \neq K_y$, y $c = 0$:

En estas condiciones, las ecuaciones [3] y [4] se reducen a:

$$x(t) = X \cdot \cos w_E \cdot t \quad [9]$$

$$y(t) = Y \cdot \sin w_E \cdot t \quad [10]$$

en donde:

$$X = \frac{e \cdot r_x^2}{(1 - r_x)^2} \quad [11]$$

$$Y = \frac{e \cdot r_y^2}{(1 - r_y)^2} \quad [12]$$

Operando con estas 4 ecuaciones se obtiene fácilmente:

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2} = 1 \quad [13]$$

Que es la ecuación de la elipse que describe el centro geométrico del disco S.

Igualmente, también puede obtenerse

$$\tan \theta = y(t)/x(t) = (Y/X) \cdot \tan w_E t$$

Derivando ambos miembros de esta ecuación respecto al tiempo, y combinando con las Ecuaciones [9] y [10], se obtiene:

$$\dot{\theta} = \frac{X \cdot Y}{X^2 \cdot \cos^2 w_E t + Y^2 \cdot \sin^2 w_E t} \cdot w_E \quad [14]$$

Ecuación que nos da la velocidad de cabeceo ($\dot{\theta}$) en función de w_E y de los valores de X y de Y .

Como el denominador de esta ecuación es siempre positivo, el signo de $\dot{\theta}$ (suponiendo que w_E es siempre positivo en el sentido contrario al giro de las agujas del reloj) depende del signo del producto $X \cdot Y$.

Según esto, se tendrá:

$w_E < w_{nx}$ $w_E < w_{ny}$	$\implies X \cdot Y > 0$	(El punto S se mueve según una elipse, en el mismo sentido que w_E)
----------------------------------	--------------------------	---

$w_E > w_{nx}$ $w_E < w_{ny}$	$\implies X \cdot Y < 0$	(El punto S se mueve según una elipse, en sentido contrario al de w_E)
----------------------------------	--------------------------	--

o también

$w_E < w_{nx}$ $w_E > w_{ny}$	
----------------------------------	--

$w_E > w_{nx}$ $w_E > w_{ny}$	$\implies X \cdot Y > 0$	(De nuevo se mueve S en el mismo sentido de w_E)
----------------------------------	--------------------------	--

También puede observarse que al ser $c=0$, el ángulo

$$\bar{\alpha}_x = \bar{\alpha}_y = \bar{\alpha} = 0$$

Sin embargo, una interpretación más exacta señala que

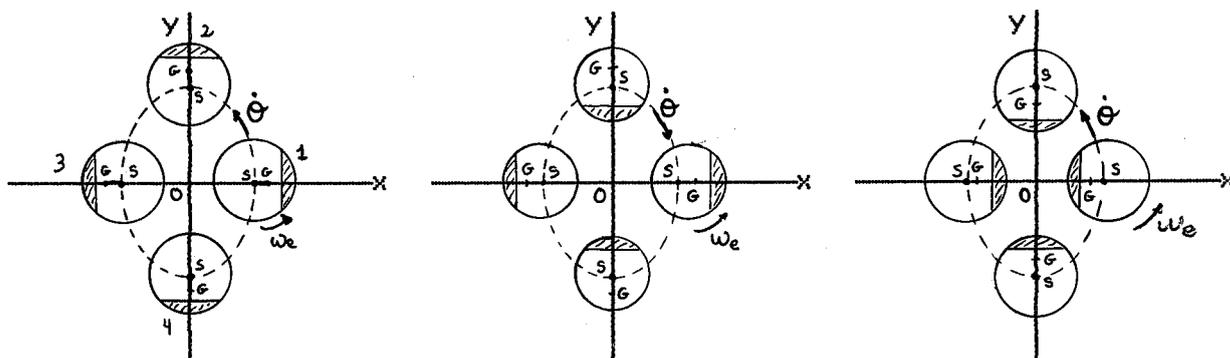
$$\bar{\alpha}_x = 0 \quad \text{para } w_E < w_{nx}$$

$$\bar{\alpha}_x = \pi \quad \text{para } w_E > w_{nx}$$

$$\bar{\alpha}_y = 0 \quad \text{para } w_E < w_{ny}$$

$$\bar{\alpha}_y = \pi \quad \text{para } w_E > w_{ny}$$

En las figuras se han representado 4 posiciones del árbol rotatorio, donde se recogen todos los aspectos anteriormente señalados:



$$\omega_E < \omega_{nx}$$

$$\omega_E < \omega_{ny}$$

(a)

$$\omega_E > \omega_{nx}$$

$$\omega_E < \omega_{ny}$$

(b)

$$\omega_E > \omega_{nx}$$

$$\omega_E > \omega_{ny}$$

(c)

Obsérvese que en ningún caso se trata de un cabeceo sincrónico ($\dot{\theta} \neq \omega_E$)

En el caso (a), $\delta = 0$ y $\dot{\theta}$ y ω_E tienen la misma dirección. El centro del árbol describe una elipse (resultado de la superposición de dos movimientos vibratorios perpendiculares, de igual frecuencia y diferentes amplitudes).

En el caso (c), $\delta = \pi$ y $\dot{\theta}$ y ω_E también tienen el mismo sentido. El centro S también describe una elipse (los tamaños del eje mayor y menor de la elipse dependen de lo que valga ω_E en cada caso).

En el caso (b), $\delta = 0$ para $\omega_E < \omega_{nx}$, es decir, para la componente x de la vibración. Sin embargo, $\delta = \pi$ para $\omega_E > \omega_{ny}$, es decir, para la componente y de la vibración. Además de este caso, $\dot{\theta}$ tiene sentido contrario a ω_E . El movimiento es

bastante complicado, e introduce tensiones de fatiga en el árbol rotatorio. (La tensión en un punto de la periferia del árbol cambia dos veces de sentido en cada rotación)

-Velocidades críticas

Si consideramos la expresiones que dan X e Y veremos que tanto para el caso de amortiguamiento como sin él puede ocurrir el fenómeno de resonancia.

Además, tal fenómeno ocurrirá para las dos frecuencias $w_E = w_{nX}$ y $w_E = w_{nY}$

En el caso de no haber amortiguamiento hemos visto que:

$$X = \frac{e \cdot (w_E/w_{nX})^2}{1 - (w_E/w_{nX})^2} \quad Y = \frac{e \cdot (w_E/w_{nY})^2}{1 - (w_E/w_{nY})^2}$$

siendo la respuesta del sistema del tipo:

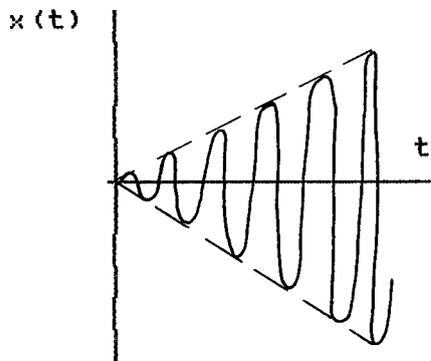
$$x(t) = X \cdot \text{Cos } w_E \cdot t$$

$$y(t) = Y \cdot \text{Sen } w_E \cdot t$$

Aún cuando al sustituir w_E por w_{nX} se obtiene $X = \infty$ e igualmente, cuando $w_E = w_{nY}$ se obtiene $Y = \infty$, puede demostrarse, como se hizo en los sistemas de 1 GDL, con las correspondientes transformaciones matemáticas, que la respuesta para el caso de resonancia viene dada por:

$$x(t) = (e/2) \cdot w_{nX} \cdot t \cdot \text{Sen } w_{nX} \cdot t$$

$$y(t) = (e/2) \cdot w_{nY} \cdot t \cdot \text{Cos } w_{nY} \cdot t$$



Tales expresiones demuestran que las amplitudes X o Y se hacen infinitas sólo para un tiempo t infinito.

(Evidentemente, si el tiempo en que se mantiene el sistema girando

a la frecuencia de resonancia, las amplitudes alcanzadas pueden ser lo suficientemente grandes para que causen la destrucción del árbol)

Cuando el árbol gira a una velocidad igual a una de las frecuencias propias, (por ejemplo, $\omega_E = \omega_{OY}$) lo que es que el eje de la elipse que describe el centro geométrico del disco se va alargando (en el sentido del eje OY en este caso), hasta el punto que la elipse se va convirtiendo en prácticamente una línea recta.

El árbol, aparentemente, da "latigazos" cada vez de mayor amplitud.

Evidentemente, en árboles que tengan $K_x \neq K_y$ se producen dos velocidades críticas.

Si $K_x = K_y = K$, la velocidad crítica se manifiesta por un "arqueado" del árbol cada vez más acusado, cuando se le hace girar a la velocidad crítica.

NOTA: Obsérvese que la presencia de amortiguamiento incrementa el valor de la velocidad crítica, al tiempo que disminuye su amplitud.

-En árboles de máquinas, las velocidades críticas se ven modificadas por varios factores, entre los que cabe mencionar:

- .Longitud de los cojinetes
- .Rigidez de los resortes
- .Efectos giroscópicos
- .Batido del aceite en los cojinetes
- .Efectos de la ruedas caladas

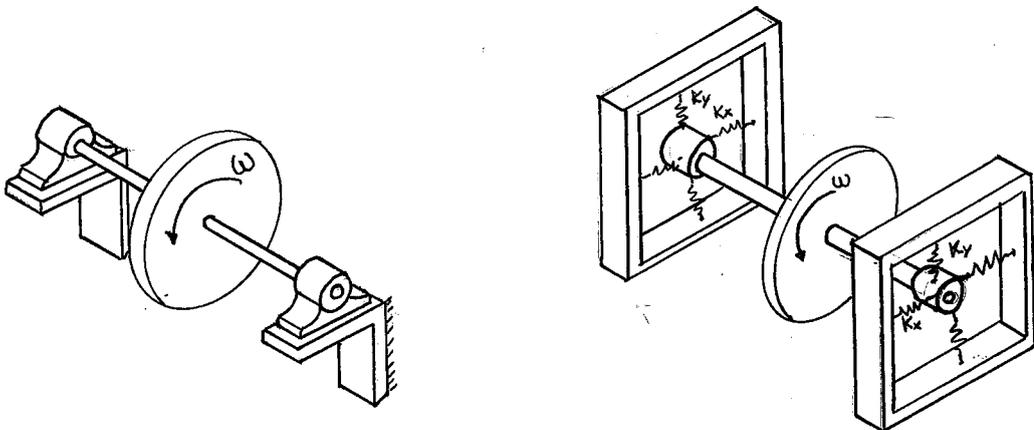
Longitud de los cojinetes:

Si los cojinetes son de tal longitud, y tienen unas fijaciones tales que disminuyan la flecha del árbol, es evidente que aumentará el valor de la velocidad crítica.

Rigidez de los soportes

Tal como se ve en las figuras, el efecto de la elasticidad de los soportes es hacer el sistema menos rígido, y por tanto, disminuir el valor de la velocidad crítica.

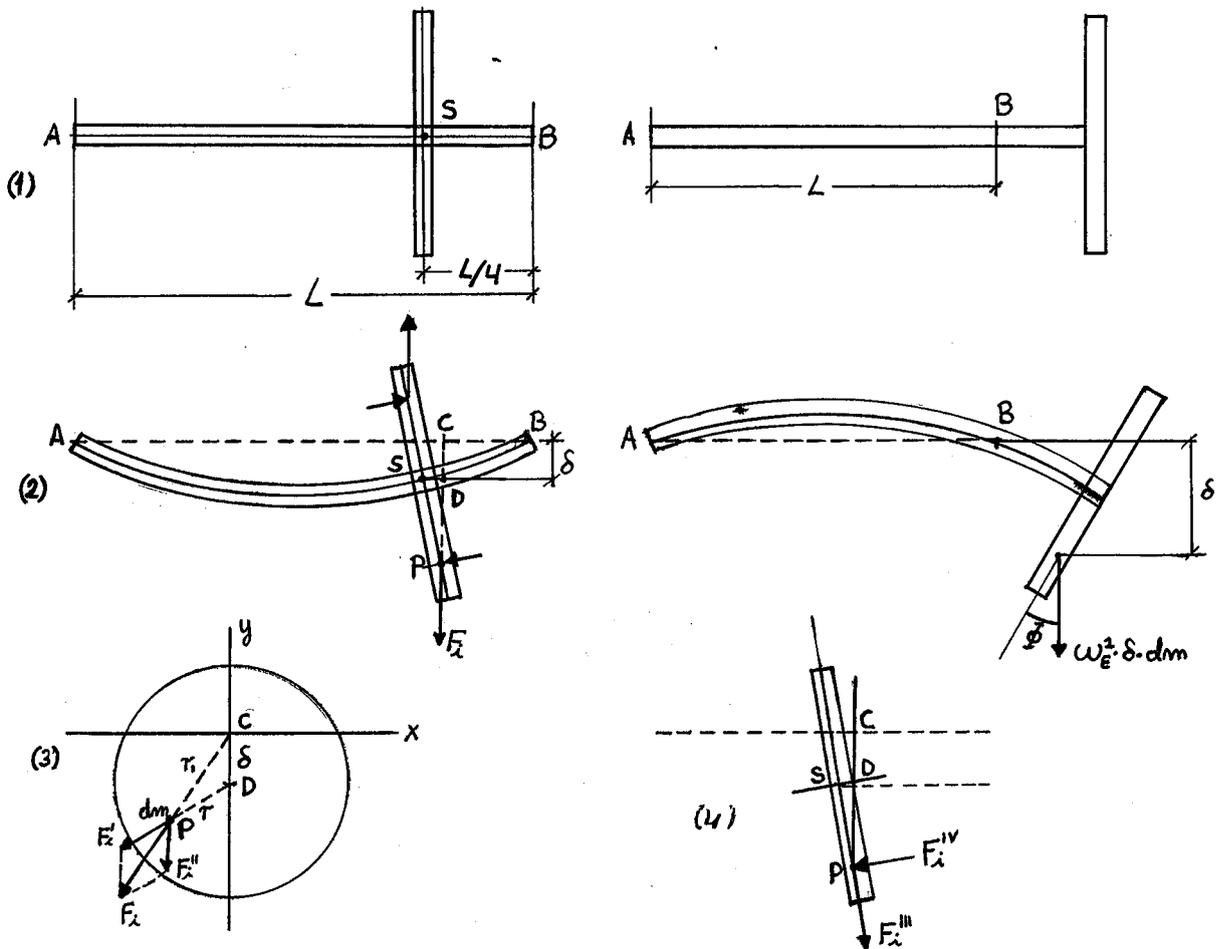
Como además la rigidez de los soportes no suele ser la misma en el plano horizontal que en el vertical, introducen un efecto de $K_x \neq K_y$, aún cuando el árbol (o el disco que lo simula) sea perfectamente circular. Por este motivo las velocidades críticas pueden descender hasta un 25%



Efectos giroscópicos:

Tal como se muestra en la figura, cuando el disco en que se supone se concentra la masa no se encuentra en la mitad de la luz (distancia entre apoyos), o cuando se encuentra en un voladizo (una gran hélice de barco, frente a la cual la masa del árbol es despreciable, por ejemplo), las fuerzas de inercia de sus diferentes partículas no se encuentran en el propio plano del disco.

Como consecuencia, aparece un par que tiende a enderezar el árbol, dando lugar a una modificación de su velocidad crítica.



Si O es el eje de apoyos (eje del árbol sin flexar) y S el centro geométrico del disco, y P un punto cualquiera del mismo de masa dm , se tendrán las fuerzas que se ven en la figura.

Se ha supuesto un cabeceo sincrónico, de modo que el movimiento resultante del disco es un cabeceo alrededor de O, con la velocidad w_e (la misma de giro del árbol).

En estas condiciones la fuerza de inercia elemental $F_i = w_e^2 \cdot r_i \cdot dm$, con la dirección que se aprecia en las figuras [2] y [3]

(Evidentemente, en este movimiento cada punto P del disco se mueve en un plano perpendicular a AB).

Como se ve en la figura [3] esta fuerza puede descomponerse en la $F'_i = w_e^2 \cdot \delta \cdot dm$ y la $F_i^{II} = w_e^2 \cdot r \cdot dm$

La primera es una fuerza vertical, cuya resultante, actuando en el centro S del disco, es una fuerza vertical hacia abajo de módulo $m \cdot w_e^2 \cdot \delta$

La segunda es una fuerza radial, dirigida hacia D (que dada la pequeñez de δ casi coincide con el centro del disco S). Esta fuerza puede descomponerse en una en el plano del disco, F_i^{III} , y otra normal del disco F_i^{IV} como se ve en la figura [4].

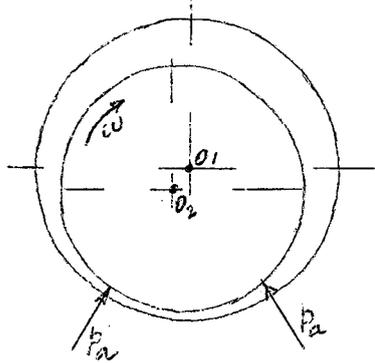
La resultante de las F_i^{III} es cero (para todo el disco), mientras que las F_i^{IV} producen un momento que tiende a "enderezar" el disco.

Aunque no se demuestre, la existencia de este par da lugar a un aumento de la velocidad crítica del árbol, respecto a la que tendría el mismo con un disco de masa concentrada en su centro.

NOTA: El fenómeno no es un verdadero efecto giroscópico, denominándosele así porque se observó por vez primera en discos de alta velocidad.

Batido del aceite en los cojinetes:

En los cojinetes de fricción para árboles horizontales, el centro del gorrón no coincide con el centro del cojinete,



dependiendo la posición del primero de factores tales como carga aplicada, viscosidad del aceite, velocidad de giro, juego radial, etc.

Precisamente tal excentricidad es la que da lugar a una presión P_a del aceite que levanta, materialmente al gorrón.

En cojinetes correspondientes a árboles verticales tal excentricidad no se manifiesta, y por consiguiente, tampoco aparece tal presión de aceite.

Sin embargo, si el árbol vibra sí se produce el fenómeno mencionado, variando la excentricidad del gorrón. Ello origina variaciones en la magnitud y dirección de las fuerzas de presión, que modifican (excitándola) las vibraciones del propio árbol.

Se ha comprobado que la "frecuencia de batido" era ligeramente inferior a la mitad de la rotación y que las amplitudes de vibración debidas a este fenómeno eran bastante superiores a las originadas por el desequilibrado del rotor.

Efecto de las ruedas caladas:

Las ruedas, poleas, etc, fuertemente caladas sobre los árboles, aumentan la rigidez de estos, y en consecuencia, elevan su velocidad crítica.

ESTUDIO GENERAL DE LOS SISTEMAS DE N GDL:

1.-Introducción

- Definición

- Solución general del sistema

- Cálculo de las matrices del sistema por el método de los coeficientes de influencia

2.-Vibraciones libres en sistemas no amortiguados de n GDL

3.-Vibraciones forzadas en sistemas no amortiguados de n GDL

4.-Vibraciones forzadas por movimiento de la base en sistemas no amortiguados de n GDL

5.-Vibraciones amortiguadas en sistemas de n GDL

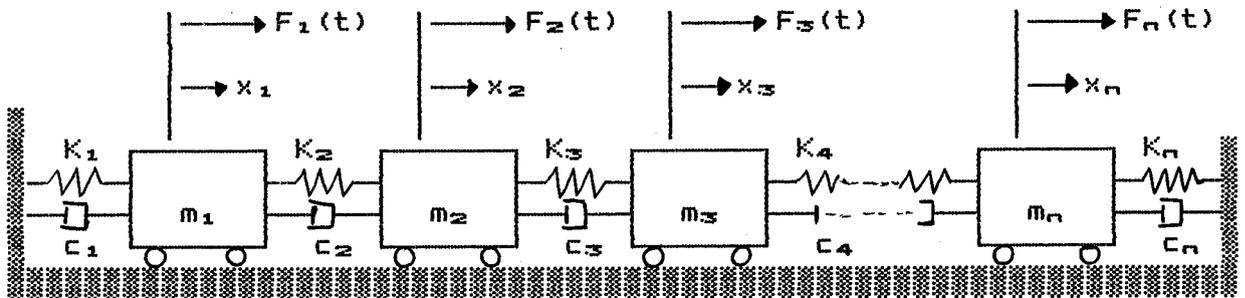
6.-Métodos numéricos para la solución de sistemas de n GDL

1.- INTRODUCCION AL ESTUDIO DE VIBRACIONES EN SISTEMAS MECANICOS DISCRETOS DE N GDL

a.- Definición

Se entiende por sistema mecánico discreto aquellos que tienen más de 1 GDL, y menos de infinitos GDL.

Uno de tales sistemas puede ser el mostrado en la figura:



Como se ve, hacen falta n coordenadas $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ para definir la configuración del sistema en cada instante t.

Por analogía con los sistemas de 2 GDL ya estudiados, el sistema de n ecuaciones diferenciales que definen el movimiento del sistema (con amortiguamiento y excitación) puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots \\ x_1 \\ \ddots \\ x_2 \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \dots \\ F_n(t) \end{bmatrix}$$

O en forma simbólica reducida:

$$\begin{bmatrix} m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

NOTA: En la práctica son pocos los sistemas discretos de n GDL que se presentan con una forma tan definida como la de la figura (otros ejemplos del mismo tipo pueden ser péndulos, discos rotatorios unidos por árboles ideales, etc.)

Por el contrario, los sistemas reales (vigas, árboles rotatorios, etc.) siempre presentan las características de masa, amortiguamiento y rigidez repartidas, dando lugar a sistemas con infinitos GDL.

Sin embargo en muchos casos pueden discretizarse tales sistemas, convirtiéndolos en otros aproximados de un número de GDL finito, por lo que el estudio de estos sistemas de n GDL adquieren una excepcional importancia.

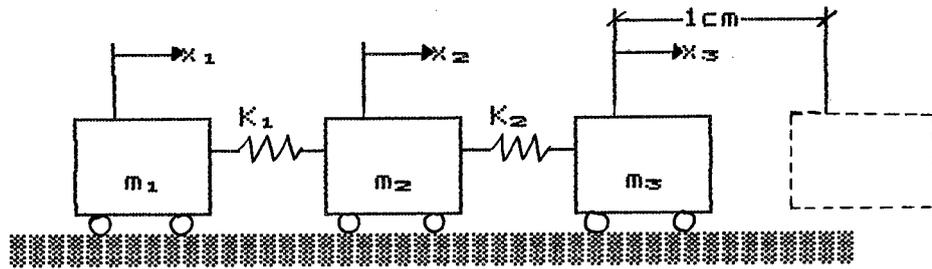
(La forma de discretizar los sistemas continuos será abordada al estudiar estos).

b.- Solución general del sistema:

En principio los sistemas vibrantes de n GDL pueden tratarse por los mismos procedimientos que los sistemas ya estudiados de 2 GDL, como se muestra en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO:

En el sistema de 3 GDL de la figura, en el que $K_1 = K_2 = 1 \text{ kg/m}$ y $m_1 = m_2 = m_3 = 1 \text{ kg}$., determinar el movimiento de cada masa si a m_3 se le da un desplazamiento inicial $x_3(0) = 1 \text{ cm}$.



1º.- Definición de las ecuaciones diferenciales del sistema,

por aplicación de las ecuaciones de Newton a cada masa

$$\begin{aligned} \ddot{m}_1 \cdot x_1 + K \cdot x_1 - K \cdot x_2 &= 0 \\ \ddot{m}_2 \cdot x_2 - K \cdot x_1 + 2K \cdot x_2 - K \cdot x_3 &= 0 \\ \ddot{m}_3 \cdot x_3 - K \cdot x_2 + K \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sutituyendo los valores numéricos queda:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 - x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 - x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ \ddot{x}_3 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2º.- Las soluciones de estas ecuaciones seran de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \cdot \text{Sen} (wt + \vartheta) \\ x_2 &= X_2 \cdot \text{Sen} (wt + \vartheta) \\ x_3 &= X_3 \cdot \text{Sen} (wt + \vartheta) \end{aligned}$$

siendo X_1 , X_2 , X_3 , w , y ϑ valores a determinar.

3º.- Derivando se tendra:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -w^2 \cdot X_1 \cdot \text{Sen} (wt + \vartheta) \\ \ddot{x}_2 &= -w^2 \cdot X_2 \cdot \text{Sen} (wt + \vartheta) \\ \ddot{x}_3 &= -w^2 \cdot X_3 \cdot \text{Sen} (wt + \vartheta) \end{aligned} \quad [11]$$

y sustituyendo estos valores en las ecuaciones del movimiento, queda:

$$\begin{aligned} (1 - w^2) \cdot X_1 - X_2 &= 0 \\ -X_1 + (2 - w^2) \cdot X_2 - X_3 &= 0 \\ -X_2 + (1 - w^2) \cdot X_3 &= 0 \end{aligned} \quad [2]$$

sistema de ecuaciones algebraicas con las incognitas X_1 , X_2 y X_3 .

4º.- Para que el sistema tenga solución distinta de la trivial, el determinante de los coeficientes ha de ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} (1 - w^2) & -1 & 0 \\ -1 & (2 - w^2) & -1 \\ 0 & -1 & (1 - w^2) \end{vmatrix} = 0$$

5.- Desarrollando el determinante se llega a la ecuación de 6º grado siguiente (Ec. característica):

$$(1 - w^2) \cdot (w^2 - 3) \cdot w^2 = 0$$

de la cual se obtienen los valores propios (o frecuencias naturales del sistema)

$$w_1 = 0 \text{ rad/s}$$

$$w_2 = 1 \text{ rad/s}$$

$$w_3 = \sqrt{3} \text{ rad/s}$$

6º.- En función de esto, las ecuaciones que definen el movimiento del sistema pueden escribirse:

$$x_1 = X_{11} \cdot \text{Sen}(w_1 t + \bar{q}_1) + X_{12} \cdot \text{Sen}(w_2 t + \bar{q}_2) + X_{13} \cdot \text{Sen}(w_3 t + \bar{q}_3)$$

$$x_2 = X_{21} \cdot \text{Sen}(w_1 t + \bar{q}_1) + X_{22} \cdot \text{Sen}(w_2 t + \bar{q}_2) + X_{23} \cdot \text{Sen}(w_3 t + \bar{q}_3)$$

$$x_3 = X_{31} \cdot \text{Sen}(w_1 t + \bar{q}_1) + X_{32} \cdot \text{Sen}(w_2 t + \bar{q}_2) + X_{33} \cdot \text{Sen}(w_3 t + \bar{q}_3)$$

significando X_{11} el valor de la amplitud del movimiento de m_1 para el modo 1 (para w_1); X_{12} para el modo 2 (w_2); etc.

7º.- Como solo deben haber 6 ctes. independientes podremos expresar las ctes. X_2 y X_3 en función de la X_1 .

En efecto:

De la primera ecuación [2]

$$\frac{X_2}{X_1} = 1 - w^2$$

$$w_1 = 0 \implies \frac{X_{21}}{X_{11}} = 1 \quad ; \quad w_2 = 1 \implies \frac{X_{22}}{X_{12}} = 0$$

$$w_3 = \sqrt{3} \implies \frac{X_{23}}{X_{13}} = -2$$

De la ecuación primera y tercera de [2]

$$\frac{X_3}{X_1} = \frac{1 - w^2}{1 - w^2}$$

$$w_1 = 0 \implies \frac{X_{31}}{X_{11}} = 1$$

$$w_2 = 1 \implies \frac{X_{32}}{X_{12}} = \frac{0}{0} \text{ (indeterm.)}$$

$$w_3 = \sqrt{3} \implies \frac{X_{33}}{X_{13}} = 1$$

Como $\frac{X_{32}}{X_{12}}$ es indeterminada, podemos utilizar la segunda

ecuación de [2] para hallar

$$-X_{12} + (2 - w_2^2) \cdot X_{22} - X_{32} = 0$$

para $w_2 = 1$

$$-X_{12} + X_{22} - X_{32} = 0$$

que también puede escribirse :

$$-1 + \frac{X_{22}}{X_{12}} - \frac{X_{32}}{X_{12}} = 0$$

de donde resulta:

$$\frac{X_{32}}{X_{12}} = 1$$

8°.- Con tales relaciones, las ecuaciones del desplazamiento de las masas pueden escribirse:

$$x_1 = X_{11} \cdot \text{Sen}(w_1 t + \delta_1) + X_{12} \cdot \text{Sen}(w_2 t + \delta_2) + X_{13} \cdot \text{Sen}(w_3 t + \delta_3)$$

$$x_2 = X_{11} \cdot \text{Sen}(w_1 t + \delta_1) - 2 \cdot X_{13} \cdot \text{Sen}(w_3 t + \delta_3)$$

$$x_3 = X_{11} \cdot \text{Sen}(w_1 t + \delta_1) - X_{12} \cdot \text{Sen}(w_2 t + \delta_2) + X_{13} \cdot \text{Sen}(w_3 t + \delta_3)$$

que como se ve, toman por incógnitas X_{11} , X_{12} , X_{13} , δ_1 , δ_2 y δ_3 .

9º.- Tales incógnitas pueden ser halladas en función de las condiciones iniciales

$$t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1(0) = 0 & \dot{x}_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 & \dot{x}_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1 & \dot{x}_3(0) = 0 \end{array} \right.$$

Sustituyendo:

$$X_{11} \cdot \text{Sen } \delta_1 + X_{12} \cdot \text{Sen } \delta_2 + X_{13} \cdot \text{Sen } \delta_3 = 0 \quad [3]$$

$$X_{11} \cdot \text{Sen } \delta_1 - 2 \cdot X_{13} \cdot \text{Sen } \delta_3 = 0 \quad [4]$$

$$X_{11} \cdot \text{Sen } \delta_1 - X_{12} \cdot \text{Sen } \delta_2 + X_{13} \cdot \text{Sen } \delta_3 = 1 \quad [5]$$

$$X_{11} \cdot \text{Cos } \delta_1 + X_{12} \cdot \text{Cos } \delta_2 + \sqrt{3} \cdot X_{13} \cdot \text{Cos } \delta_3 = 0 \quad [6]$$

$$X_{11} \cdot \text{Cos } \delta_1 - 2\sqrt{3} \cdot X_{13} \cdot \text{Cos } \delta_3 = 0 \quad [7]$$

$$X_{11} \cdot \text{Cos } \delta_1 - X_{12} \cdot \text{Cos } \delta_2 + \sqrt{3} \cdot X_{13} \cdot \text{Cos } \delta_3 = 0 \quad [8]$$

Sumando [6], [7] y [8], tendremos:

$$3 \cdot X_{11} \cdot \text{Cos } \delta_1 = 0 \implies \delta_1 = \pi/2$$

De las ecuaciones [6] y [7]:

$$\delta_2 = \delta_3 = \pi/2$$

De las ecuaciones [3], [4] y [5]:

$$X_{11} = 1/3 \quad ; \quad X_{12} = -1/2 \quad ; \quad X_{13} = 1/6$$

10º.- Por consiguiente, las ecuaciones que definen el movimiento del sistema son:

$$x_1(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \text{Sen} \left[t + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{6} \cdot \text{Sen} \left[\sqrt{3} \cdot t + \frac{\pi}{2} \right]$$

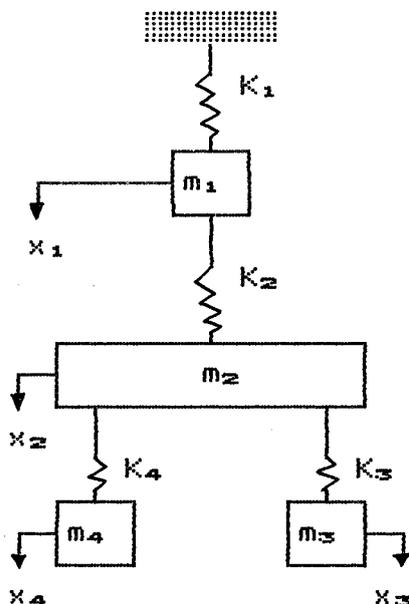
$$x_2(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \text{Sen} \left[\sqrt{3} \cdot t + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$x_3(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \text{Sen} \left[t + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{6} \cdot \text{Sen} \left[\sqrt{3} \cdot t + \frac{\pi}{2} \right]$$

-Sin embargo, es fácil de ver que este método no es viable en cuanto el sistema sea un poco más complejo. En efecto, nos encontraremos con una doble dificultad: por un lado, definir con claridad las ecuaciones diferenciales que definen el sistema vibrante. Por otro, la aparición de ecuaciones características inmanejables.

Ambos casos se ilustran en el ejemplo siguiente, referido a un sistema vibrante sencillo de 4 GDL

EJEMPLO:



Ecuación del movimiento:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (K_1 + K_2) \cdot x_1 - K_2 \cdot x_2 = 0$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + (K_2 + K_3 + K_4) \cdot x_2 - K_3 \cdot x_3 - K_4 \cdot x_4 - K_2 \cdot x_1 = 0$$

$$m_3 \cdot \ddot{x}_3 + K_3 \cdot x_3 - K_3 \cdot x_2 = 0$$

$$m_4 \cdot \ddot{x}_4 + K_4 \cdot x_4 - K_4 \cdot x_2 = 0$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & 0 & 0 \\ -K_2 & (K_2 + K_3 + K_4) & -K_3 & -K_4 \\ 0 & -K_3 & K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

Siguiendo del desarrollo conocido, la ecuación característica (de la que habían de obtenerse los cuatro valores de w) adoptaría la forma:

$$w^6 - \left[\frac{K_1 + K_2}{B_1} + \frac{K_2 + K_3 + K_4}{B_2} + \frac{K_3}{B_3} + \frac{K_4}{B_4} \right] \cdot w^5 + \left[\frac{K_1 \cdot K_2 + K_2 \cdot K_3 + K_3 \cdot K_1 + K_1 \cdot K_4 + K_2 \cdot K_4}{B_1 \cdot B_2} + \frac{K_2 \cdot K_3 + K_3 \cdot K_4}{B_2 \cdot B_3} + \frac{K_1 \cdot K_3 + K_2 \cdot K_3}{B_1 \cdot B_3} + \frac{K_2 \cdot K_4 + K_3 \cdot K_4}{B_2 \cdot B_4} + \frac{K_1 \cdot K_4 + K_2 \cdot K_4}{B_1 \cdot B_4} + \frac{K_3 \cdot K_4}{B_3 \cdot B_4} \right] \cdot w^4 - \left[\frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 + K_3 \cdot K_4 \cdot K_1}{B_1 \cdot B_2 \cdot B_3} + \frac{K_2 \cdot K_3 \cdot K_4}{B_2 \cdot B_3 \cdot B_4} + \frac{(K_1 + K_2) \cdot K_3 \cdot K_4}{B_3 \cdot B_4 \cdot B_1} + \frac{K_4 \cdot (K_1 \cdot K_2 + K_2 \cdot K_3 + K_3 \cdot K_1)}{B_4 \cdot B_1 \cdot B_2} \right] \cdot w^2 + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4}{B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4} = 0$$

-Por consiguiente, ha de recurrirse a métodos más operativos encaminados, tanto a escribir el sistema de ecuaciones

diferenciales que definen el sistema (o mejor, las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento), como la propia resolución de éste.

En el primer caso puede usarse el método de los "coeficientes de influencia", o las ecuaciones de Lagrange.

En el segundo, pueden usarse métodos matriciales para la resolución analítica y exacta del sistema o métodos aproximados como los de Holzer, iteración matricial, Rayleigh, matriz de transferencia, etc).

A parte de ellos, también pueden usarse métodos numéricos (integración paso a paso, Runge-Kutta, etc).

c.- Calculo de las matrices del sistema por el método de los coeficientes de influencia

-Cuando la aplicación de las ecuaciones de Newton a cada masa complican sobremanera la escritura de las ecuaciones diferenciales que definen el sistema, es más práctico partir directamente de la ecuación matricial

$$[m] \cdot \ddot{[x]} + [c] \cdot \dot{[x]} + [k] \cdot [x] = [F]$$

y calcular los términos de las matrices correspondientes $[m]$, $[c]$ o $[k]$, o sea, los términos m_{ij} , c_{ij} y k_{ij} , respectivamente. Tales términos coinciden en valor con los denominados "coeficientes de influencia" amortiguamiento y rigidez de inercia, cuestión que se deduce de la simple definición de "coeficiente de influencia", como veremos a continuación.

En términos generales se definen los coeficientes de influencia m_{ij} , c_{ij} y k_{ij} como las acciones (fuerzas o momentos) que aparecen en el elemento i del sistema cuando se aplica una aceleración, velocidad o desplazamiento (respectivamente) unidad en el elemento j , permaneciendo inmóviles todos los demás elementos del sistema (incluyendo el i).

Los términos m_{ii} , c_{ii} y k_{ii} representan las acciones que aparecen en el elemento i cuando se aplica una aceleración, velocidad o desplazamiento unidad al propio elemento i , permaneciendo los restantes elementos (o coordenadas) del sistema inmóviles.

-Aunque no efectuemos la demostración puede escribirse que:

$$m_{ij} = m_{ji}$$

$$c_{ij} = c_{ji}$$

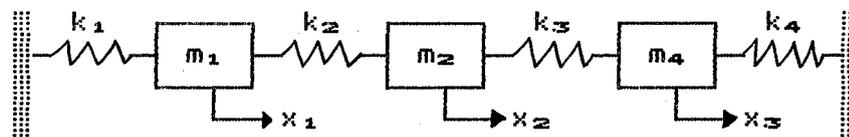
$$k_{ij} = k_{ji}$$

Lo que se conoce por el teorema recíproco de Maxwell.

Ello indica, por otra parte, que las matrices $[m]$, $[c]$ y $[k]$ son siempre simétricas.

-Cálculo de los coeficientes de rigidez:

-En el sistema de 3 GDL de la figura:



La matriz de rigidez puede expresarse por:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

El término k_{11} es la fuerza, que aparece sobre la masa m_1 (debido a la existencia de resortes y sólo a estos), cuando a esta se le da un desplazamiento $x_1 = 1$ cm, permaneciendo las otras dos masas fijas ($x_2 = x_3 = 0$)

En estas condiciones, se aprecia claramente que:

$$k_{11} = (k_1 + k_2) \cdot 1 = k_1 + k_2$$

El término k_{12} es la fuerza que aparece sobre la masa m_1 cuando a la masa m_2 se le da un desplazamiento de 1 cm, manteniendo fijas las masas m_1 y m_3 ($x_1 = x_3 = 0$).

En estas condiciones :

$$k_{12} = (-k_2) \cdot 1 = -k_2$$

Siguiendo de esta manera, podemos resumir:

a.-Configuración $x_1 = 1$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$\text{Fuerza en } m_1 = k_{11} = (k_1 + k_2) \cdot 1$$

$$\text{Fuerza en } m_2 = k_{21} = (-k_2) \cdot 1$$

$$\text{Fuerza en } m_3 = k_{31} = 0$$

b.-Configuración $x_1 = 0$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 0$$

$$\text{Fuerza en } m_1 = k_{12} = (-k_2) \cdot 1$$

$$\text{Fuerza en } m_2 = k_{22} = (k_2 + k_3) \cdot 1$$

$$\text{Fuerza en } m_3 = k_{32} = (-k_3) \cdot 1$$

c.-Configuración $x_1 = 0$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 1$$

$$\text{Fuerza en } m_1 = k_{13} = 0$$

$$\text{Fuerza en } m_2 = k_{23} = (-k_3) \cdot 1$$

$$\text{Fuerza en } m_3 = k_{33} = (k_3 + k_4) \cdot 1$$

Con lo cual, la matriz de rigidez será:

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) \end{bmatrix}$$

-Obviamente, las fuerzas que aparecerán sobre las masas 1, 2 y 3 al darle los desplazamientos x_1 , x_2 y x_3 (no unitarios) serán:

$$f_1 = k_{11} \cdot x_1 + k_{12} \cdot x_2 + k_{13} \cdot x_3$$

$$f_2 = k_{21} \cdot x_1 + k_{22} \cdot x_2 + k_{23} \cdot x_3$$

$$f_3 = k_{31} \cdot x_1 + k_{32} \cdot x_2 + k_{33} \cdot x_3$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

en general, para cualquier sistema

$$[f] = [k] \cdot [x]$$

NOTA: A veces, el cálculo de los coeficientes de influencia de rigidez resulta complicado, y es preferible el cálculo de los coeficientes de influencia de flexibilidad, a_{ij} .

Se define el coeficiente a_{ij} como el desplazamiento que aparece en la masa m_i del sistema cuando se aplica una fuerza (o momento en su caso) unidad en el elemento j (en la masa m_j del sistema), y sólo en ésta (cargas nulas sobre todos los demás elementos que no sean el j , incluyendo el propio i).

Igual que vimos para rigideces, y por el principio de superposición, los desplazamientos de las masa 1, 2 y 3, cuando se aplican las fuerzas no unitarias f_1 , f_2 y f_3 sobre cada una de ellas será:

$$x_1 = a_{11} \cdot f_1 + a_{12} \cdot f_2 + a_{13} \cdot f_3$$

$$x_2 = a_{21} \cdot f_1 + a_{22} \cdot f_2 + a_{23} \cdot f_3$$

$$x_3 = a_{31} \cdot f_1 + a_{32} \cdot f_2 + a_{33} \cdot f_3$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

En general, y para cualquier sistema:

$$[x] = [a] \cdot [f]$$

Siendo $[a]$ la matriz de flexibilidad. Premultiplicando esta ecuación por la inversa de la matriz $[a]$

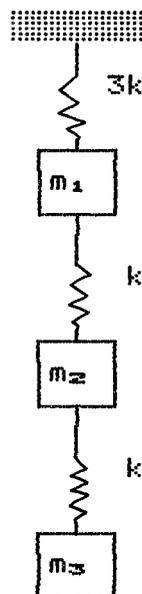
$$[a]^{-1} \cdot [x] = [f]$$

Con lo cual se deduce que la inversa de la matriz de flexibilidad es la de rigidez

$$[a]^{-1} = [k]$$

De ahí que resulte a veces más cómodo hallar directamente la matriz $[a]$ y a partir de ella calcular la matriz $[k]$ que define el sistema vibrante.

EJEMPLO:



Al aplicar una fuerza unidad a la masa m_1 y ninguna a la m_2 y m_3 , se tienen los siguientes desplazamientos:

$$\text{Desplaz. de } m_1 = a_{11} = (1/3k) \cdot 1 = 1/3k$$

$$\text{Desplaz. de } m_2 = a_{21} = (1/3k) \cdot 1 = 1/3k$$

$$\text{Desplaz. de } m_3 = a_{31} = (1/3k) \cdot 1 = 1/3k$$

(Al aplicarse la carga en m_1 y moverse esta hacia abajo, las masa m_2 y m_3 simplemente seguirán este movimiento).

Por consiguiente:

$$a_{11} = 1/3k ; \quad a_{21} = a_{12} = 1/3k ; \quad a_{31} = a_{13} = 1/3k$$

Al aplicar una fuerza unidad a la masa m_2 , y ninguna en m_1 y m_3 , se tendrán los siguientes desplazamientos:

Desplazamiento de $m_1 = a_{21} = 1/3k$ (como ya vimos)

Desplazamiento de $m_2 = a_{22} = 4/3k$

(por estar los resortes $3k$ y k en serie:

$$1/k_{eq} = (1/3k) + (1/k) = 4/3k)$$

Desplazamiento de $m_3 = a_{23} = a_{22} = a_{32} = 4/3k$

Al aplicar una fuerza unitaria a la masa m_3 se tiene:

Desplazamiento de $m_3 = a_{33} = 7/3k$

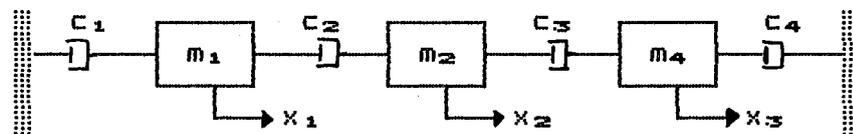
$$[1/k_{eq} = (1/3k) + (1/k) + (1/k) = 7/3k]$$

Por consiguiente, la matriz de flexibilidad para este ejemplo vale:

$$[a] = \begin{bmatrix} 1/3k & 1/3k & 1/3k \\ 1/3k & 4/3k & 4/3k \\ 1/3k & 4/3k & 7/3k \end{bmatrix}$$

-Cálculo de los coeficientes de influencia de amortiguamiento:

-En el sistema de 3 GDL de la figura:



La matriz de amortiguamiento viene determinada:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

El término c_{11} es la fuerza que aparece en la masa 1 (debida a la existencia de amortiguadores interpuestos, y sólo a estos), cuando a la masa 1 se le da una velocidad unidad, manteniendo fija las posiciones de las 2 y 3 ($x_2 = x_3 = 0$)

En estas condiciones, se ve claramente que:

$$c_{11} = (c_1 + c_2) \cdot 1 \text{ cm/s} = c_1 + c_2$$

El término c_{12} es la fuerza que aparece en 1 cuando a la masa 2 se le da una velocidad unidad, manteniendo fijas las posiciones de 1 y 3

$$(x_1 = x_3 = 0)$$

En estas condiciones:

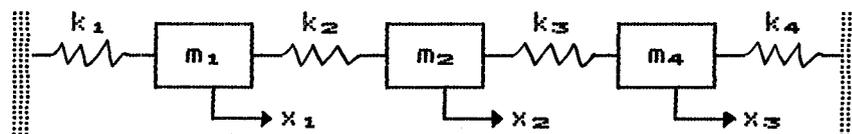
$$c_{12} = -c_2 \cdot 1 \text{ cm/s} = -c_2$$

Siguiendo la misma tónica que para el cálculo de las rigideces, tendríamos finalmente:

$$[c] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 \\ 0 & -c_3 & (c_3 + c_4) \end{bmatrix}$$

-Cálculo de los coeficientes de influencia de inercia:

-En el sistema de 3 GDL de la figura:



La matriz de inercia se define por:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

El término m_{11} es la fuerza que aparece en 1, cuando a la masa 1 se le imprime una aceleración de 1 cm/s^2 , manteniendo fijas las posiciones de las demás masas (es decir, $x_2 = x_3 = 0$)

En estas condiciones:

$$m_{11} = m_1 \cdot 1 \text{ cm/s}^2 = m_1$$

El término m_{12} es la fuerza que aparece en 1, cuando a la masa 2 se le imprime una aceleración de 1 cm/s^2 , manteniendo fijas las posiciones de 1 y 3 (es decir, $x_1 = x_3 = 0$)

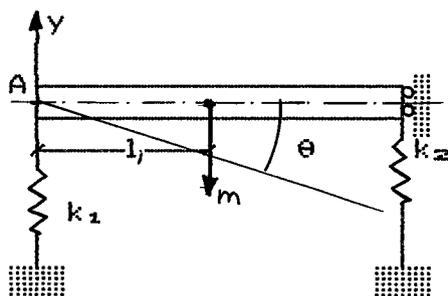
En estas condiciones:

$$m_{12} = 0$$

Siguiendo la misma tónica, llegamos a la matriz:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

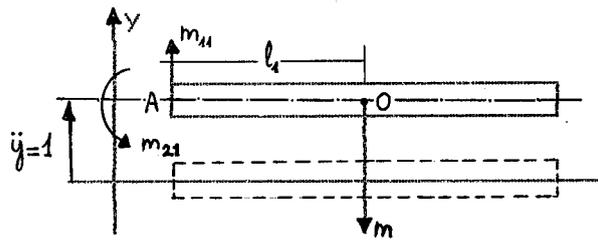
-En el sistema de 2 GDL de la figura:



(Con las coordenadas y , θ referenciadas al punto A, extremo de la barra)

Se tiene como matriz:

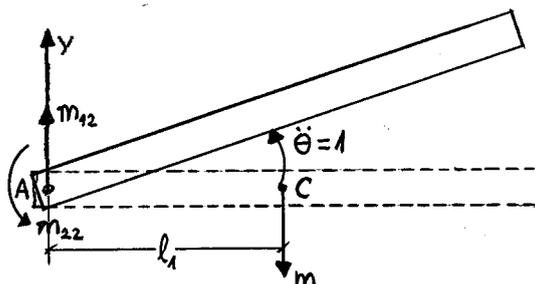
$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$



El término m_{11} es la fuerza que aparece en la coordenada 1 (dirección eje y , en el punto A tomado como referencia para el movimiento) cuando en el punto A se aplica una aceleración unidad, ($\ddot{y}_A = 1$) manteniendo fija la coordenada θ . (sin giro; $\ddot{\theta} = 0$). En estas condiciones,

$$m_{11} = m \cdot 1 \text{ cm/s}^2 = m$$

El término m_{12} es la fuerza (mejor, momento) que aparece según la coordenada y (1) cuando según la coordenada θ (2) se le aplica una aceleración unidad, ($\ddot{\theta}_A = 1$) manteniendo fija la coordenada 1 (es decir, $\ddot{y} = 0$). En estas condiciones



$$m_{12} = m \cdot l_1 \cdot 1 \text{ cm/s}^2 = m \cdot l_1$$

El término m_{22} es el momento que aparece en A según la coordenada 2 (θ) cuando se aplica una aceleración unidad $\ddot{\theta}_A = 1$, mientras se mantiene fija la aceleración en la coordenada 1 ($\ddot{y}_A = 0$). En estas condiciones,

$$m_{22} = (I_0 + m \cdot l_1^2) \cdot \text{cm/s}^2$$

La matriz de inercia será:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & m \cdot l_1 \\ m \cdot l_1 & I_0 + m \cdot l_1^2 \end{bmatrix}$$

2.-VIBRACIONES LIBRES EN SISTEMAS NO AMORTIGUADOS DE N GDL:
ANALISIS MODAL

1.-Definición de las ecuaciones diferenciales del sistema:

Según hemos visto:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots \\ x_1 \\ \ddots \\ x_2 \\ \dots \\ \ddots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = [0]$$

O en forma resumida:

$$[m] \cdot [\ddot{x}] + [k] \cdot [x] = [0] \quad [1]$$

2.- Cálculo de las frecuencias naturales, valores propios o autovalores:

La solución de las n ecuaciones del sistema [1] serán de la forma:

$$x_1 = X_1 \cdot \text{Sen} (wt + \varphi)$$

$$x_2 = X_2 \cdot \text{Sen} (wt + \varphi)$$

.....

$$x_n = X_n \cdot \text{Sen} (wt + \varphi)$$

Siendo X_1, X_2, \dots, X_n, w y φ valores a determinar.

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma matricial:

$$[x] = [X] \cdot \text{Sen} (wt + \varphi) \quad [2]$$

Derivando dos veces:

$$[\ddot{x}] = -w^2 \cdot [X] \cdot \text{Sen}(wt + \delta) \quad [3]$$

Sustituyendo [3] y [2] en [1] queda :

$$(-w^2 \cdot [m] + [k]) \cdot [X] = [0] \quad [4]$$

Que en forma desarrollada será:

$$\begin{bmatrix} k_{11} - w^2 \cdot m_{11} & k_{12} - w^2 \cdot m_{12} & \dots & k_{1n} - w^2 \cdot m_{1n} \\ k_{21} - w^2 \cdot m_{21} & k_{22} - w^2 \cdot m_{22} & \dots & k_{2n} - w^2 \cdot m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} - w^2 \cdot m_{n1} & k_{n2} - w^2 \cdot m_{n2} & \dots & k_{nn} - w^2 \cdot m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad [5]$$

La solución no trivial de este sistema de ecuaciones algebraicas en X_1, X_2, \dots, X_n será aquella que haga nulo al determinante, es decir:

$$\begin{vmatrix} k_{11} - w^2 \cdot m_{11} & k_{12} - w^2 \cdot m_{12} & \dots & k_{1n} - w^2 \cdot m_{1n} \\ k_{21} - w^2 \cdot m_{21} & k_{22} - w^2 \cdot m_{22} & \dots & k_{2n} - w^2 \cdot m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} - w^2 \cdot m_{n1} & k_{n2} - w^2 \cdot m_{n2} & \dots & k_{nn} - w^2 \cdot m_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Que representa una ecuación de grado n en w^2 , llamada "ecuación característica", la cual nos permite hallar $w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2$, y de ellos los n autovalores o frecuencias propias w_1, w_2, \dots, w_n .

3.- Cálculo de los vectores propios, autovectores o formas modales:

Si sustituimos cada uno de estos n valores propios w_i en la ecuación [5] obtendremos n ecuaciones en X_1, X_2, \dots, X_n . La resolución de este sistema no permite hallar los n valores X_1, X_2, \dots, X_n , sino solo $n-1$, o lo que igual, permite calcular las n relaciones de todos ellos respecto a uno cualquiera.

Si tomamos a X_1 como referencia la solución del sistema conducirá a hallar n vectores columna en la forma:

$$\begin{bmatrix} X_1/X_1 \\ X_2/X_1 \\ X_3/X_1 \\ \dots \\ X_n/X_1 \end{bmatrix}_1 \quad \begin{bmatrix} X_1/X_1 \\ X_2/X_1 \\ X_3/X_1 \\ \dots \\ X_n/X_1 \end{bmatrix}_2 \quad \dots \quad \begin{bmatrix} X_1/X_1 \\ X_2/X_1 \\ X_3/X_1 \\ \dots \\ X_n/X_1 \end{bmatrix}_n \quad [6]$$

(Se dice que están normalizadas respecto de X_1)

Estos vectores columna son las "formas modales" y representan las relaciones de amplitudes del movimiento de cada masa, respecto de una cualquiera tomada como referencia, cuando el sistema vibra a una de sus frecuencias naturales.

Estos n vectores columna o formas modales, también llamados "autovectores" o "vectores propios", vamos a representarlos con la siguiente designación:

$$\begin{bmatrix} X_1/X_1 \\ X_2/X_1 \\ X_3/X_1 \\ \dots \\ X_n/X_1 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}_1 = [\mu]_1 \quad (\text{Autovector para el modo } w_1)$$

$$\begin{bmatrix} X_1/X_1 \\ X_2/X_1 \\ X_3/X_1 \\ \dots \\ X_n/X_1 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}_2 = [\mu]_2 \quad (\text{Autovector para el modo } w_2)$$

[7]

$$\begin{bmatrix} X_1/X_1 \\ X_2/X_1 \\ X_3/X_1 \\ \dots \\ X_n/X_1 \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}_n = [\mu]_n \quad (\text{Autovector para el modo } w_n)$$

Es evidente que el número de autovectores para cada modo de vibración puede ser infinito (pues pueden elegirse infinitos valores para X_1 , manteniendo siempre las mismas proporciones $X_2/X_1, X_3/X_1, \dots, X_n/X_1$). Sin embargo, se suelen normalizar haciendo $X_1 = 1$.

En todo caso se comprende claramente que uno de esos infinitos valores que pueden dársele a los autovectores, para cada modo, debe coincidir con los verdaderos valores de la amplitud del movimiento, de manera que podrá ponerse:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad [8]$$

Siendo a la constante de proporcionalidad.

NOTA: Los autovectores también pueden ser hallados del modo siguiente:

En la ecuación [4] llamando:

$$[-\omega^2 \cdot [m] + [k]] = [H]$$

y calculando la matriz adjunta $[H]^*$ (traspuesta de la matriz de los cofactores) podemos poner (por definición de la matriz inversa)

$$[H]^{-1} = [H]^* / |H|$$

o también:

$$[H]^{-1} \cdot |H| = [H]^*$$

premultiplicando por la matriz $[H]$;

$$[H] \cdot [H]^{-1} \cdot |H| = [H] \cdot [H]^*$$

$$[I] \cdot |H| = [H] \cdot [H]^*$$

Como el determinante $|H| = 0$, queda :

$$[H] \cdot [H]^* = 0$$

Comparando esta ecuación con la [4], se ve que cualquier columna no nula de la matriz adjunta $[H]^*$ puede ser considerado un vector propio.

(Se entiende la matriz adjunta correspondiente a cada modo de vibración)

Los vectores de las columnas de esta matriz adjunta son proporcionales, de manera que la "forma modal" será única.

NOTA: Ortogonalidad de los vectores propios.

La ecuación [4] puede escribirse en la forma:

$$[k] \cdot [X] = w^2 \cdot [m] \cdot [X]$$

Para el modo i , la ecuación será:

$$[k] \cdot [X]_i = w_i^2 \cdot [m] \cdot [X]_i \quad (a)$$

Para el modo j la ecuación será:

$$[k] \cdot [X]_j = w_j^2 \cdot [m] \cdot [X]_j \quad (b)$$

Dada la proporcionalidad existente entre las verdaderas amplitudes y los autovectores [8], también puede escribirse:

$$[k] \cdot [\mu]_i = w_i^2 \cdot [m] \cdot [\mu]_i \quad (c)$$

$$[k] \cdot [\mu]_j = w_j^2 \cdot [m] \cdot [\mu]_j \quad (d)$$

Premultiplicando la ecuación (c) por $[\mu]_j^T$

$$[\mu]_j^T \cdot [k] \cdot [\mu]_i = w_i^2 \cdot [\mu]_j^T \cdot [m] \cdot [\mu]_i \quad (e)$$

Calculando la traspuesta de la ecuación (d)

((A·B)^T = B^T·A^T), y considerando que si una matriz es

simétrica resulta ser igual a su traspuesta queda:

$$[\mu]_j^T \cdot [k]^T = w_j^2 \cdot [\mu]_j^T \cdot [m]^T$$

$$[\mu]_j^T \cdot [k] = w_j^2 \cdot [\mu]_j^T \cdot [m] \quad (f)$$

Posmultiplicando (f) por $[\mu]_i$

$$[\mu]_j^T \cdot [k] \cdot [\mu]_i = w_j^2 \cdot [\mu]_j^T \cdot [m] \cdot [\mu]_i \quad (g)$$

Como los primeros miembros de (e) y (g) son iguales,

restándolas queda:

$$(w_i^2 - w_j^2) \cdot [\mu]_j^T \cdot [m] \cdot [\mu]_i = 0 \quad (h)$$

Por otro lado, dividiendo ambos miembros de (e) por w_i^2

y ambos miembros de (g) por w_j^2 y restando queda:

$$[(1/w_i^2) - (1/w_j^2)] \cdot [\mu]_j^T \cdot [k] \cdot [\mu]_i = 0 \quad (i)$$

Para que se satisfagan simultáneamente las ecuaciones

(h) e (i), para todo $i \neq j$, o sea, para $w_i \neq w_j$, a de cumplirse:

$$[\mu]_j^T \cdot [m] \cdot [\mu]_i = [\mu]_i^T \cdot [m] \cdot [\mu]_j = 0 \quad (j)$$

$$[\mu]_j^T \cdot [k] \cdot [\mu]_i = [\mu]_i^T \cdot [k] \cdot [\mu]_j = 0 \quad (k)$$

Las ecuaciones (j) y (k) definen el carácter ortogonal de los modos normales. La ecuación (j) indica que los vectores propios son ortogonales respecto de la matriz de masas, y la ecuación (k) que son ortogonales respecto de la matriz de rigidez.

-Cuando $i = j$, las ecuaciones (h) e (i) se satisfacen para cualquier valor finito de los productos de matrices.

Al resultado del producto $[\mu]_i^T \cdot [k] \cdot [\mu]_i$ que es un número (no otra matriz) le llamaremos M_i , o "masa generalizada" para el modo i .

Al número que resulta del producto $[\mu]_i^T \cdot [k] \cdot [\mu]_i$ le llamaremos K_i o "rigidez generalizada" para el modo i .

$$[\mu]_i^T \cdot [k] \cdot [\mu]_i = M_i \quad (l)$$

$$[\mu]_i^T \cdot [k] \cdot [\mu]_i = K_i \quad (m)$$

4.-Cálculo de la matriz modal:

Llamaremos "matriz modal", o "matriz de los modos", o de los "vectores propios", a la matriz formada por los n vectores propios (vectores columna) de manera que el resultado sea una matriz cuadrada:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix} \\ \hline & 1 & & 2 & & n \end{array} \right] = [[\mu]_1 \quad [\mu]_2 \quad \dots \quad [\mu]_n] = [\mu]$$

En general, la matriz modal adopta la forma:

$$[p] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} \end{bmatrix}$$

5.-Diagonalización de las matrices de masa y rigidez:

Por lo expuesto anteriormente, es evidente que si formamos el producto $[p]^T \cdot [m] \cdot [p]$ el resultado será una matriz diagonal, en la que por las relaciones de ortogonalidad todos los términos que no pertenezcan a la diagonal principal ($i \neq j$) serán nulos, y todos los términos de la diagonal principal serán la masa generalizada correspondiente a cada modo.

$$[p]^T \cdot [m] \cdot [p] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \diagup & & & \\ & M & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Por las mismas razones,

$$[p]^T \cdot [k] \cdot [p] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \diagup & & & \\ & K & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Como se ve, estas operaciones de la matriz modal sobre las matrices de masa y rigidez, diagonalizan a ambas, convirtiéndolas en las matrices diagonales de las masas generalizadas y de las rigideces generalizadas, respectivamente.

6.-Coordenadas principales:

Si en la ecuación [1] que define el sistema:

$$[m] \cdot \ddot{[x]} + [k] \cdot [x] = [0]$$

premultiplicamos por $[p]^T$ e insertamos antes de $\ddot{[x]}$ y $[x]$ la matriz unitaria $[I] = [p] \cdot [p]^{-1}$, tendremos:

$$[p]^T \cdot [m] \cdot [p] \cdot [p]^{-1} \cdot \ddot{[x]} + [p]^T \cdot [k] \cdot [p] \cdot [p]^{-1} \cdot [x] = [0]$$

y teniendo en cuenta las definiciones anteriores de masa y rigidez generalizadas

$$\begin{bmatrix} \backslash & M & / \\ & & \end{bmatrix} \cdot [p]^{-1} \cdot \ddot{[x]} + \begin{bmatrix} \backslash & K & / \\ & & \end{bmatrix} \cdot [p]^{-1} \cdot [x] = [0]$$

Llamando:

$$[x_p] = [p]^{-1} \cdot [x] \quad [9]$$

$$\ddot{[x_p]} = [p]^{-1} \cdot \ddot{[x]} \quad [10]$$

queda finalmente:

$$\begin{bmatrix} \backslash & M & / \\ & & \end{bmatrix} \cdot \ddot{[x_p]} + \begin{bmatrix} \backslash & K & / \\ & & \end{bmatrix} \cdot [x_p] = [0] \quad [11]$$

Las ecuaciones [9] definen un simple cambio de coordenadas. Las nuevas coordenadas, definidas por tales relaciones, se llaman "coordenadas principales", y tienen la propiedad de que en estas coordenadas el sistema de ecuaciones diferenciales [11] resulta estar desacoplado (al ser las matrices de masa y rigidez diagonales). Se trata en realidad de n ecuaciones diferenciales independientes, en la forma:

$$\begin{aligned}
 & \ddots \\
 M_1 \cdot \ddot{x}_{p1} + K_1 \cdot x_{p1} &= 0 \\
 & \ddots \\
 M_2 \cdot \ddot{x}_{p2} + K_2 \cdot x_{p2} &= 0 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \ddots \\
 M_n \cdot \ddot{x}_{pn} + K_n \cdot x_{pn} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Despejando $[x]$ en la ecuación [9] queda:

$$[x] = [\mu] \cdot [x_p] \tag{13}$$

Esta expresión significa que las coordenadas principales x_p operan como unos factores de escala sobre los vectores modales $[\mu]_i$ para producir el valor de desplazamiento x .

7.-Relación entre la masa y la rigidez generalizadas.

La ecuación:

$$[k] \cdot [X] = [m] \cdot [X] \cdot \omega^2$$

puede escribirse para los n modos ω_i en la forma:

$$[k] \cdot [X] = [m] \cdot [X] \cdot [\omega^2]$$

en donde $[\omega^2]$ es una matriz diagonal en la forma:

$$\begin{bmatrix}
 \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & \omega_n^2
 \end{bmatrix}$$

por la proporcionalidad existente, la ecuación [14] también se puede escribir:

$$[k] \cdot [\mu] = [m] \cdot [\mu] \cdot [\omega^2] \tag{15}$$

premultiplicando por $[\mu]^T$:

$$[\mu]^T \cdot [k] \cdot [\mu] = [\mu]^T \cdot [m] \cdot [\mu] \cdot [\omega^2]$$

que resulta:

$$\begin{bmatrix} \backslash \\ K \\ \backslash \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \backslash \\ M \\ \backslash \end{bmatrix} \cdot [\omega^2]$$

Un término cualquiera de ecuación sería:

$$K_i = M_i \cdot \omega_i^2$$

que nos indica que en coordenadas principales, la rigidez generalizada para el modo i es igual al producto de la masa generalizada para ese modo, por ω_i^2 .

8.-Las condiciones iniciales en coordenadas principales:

Por medio de las ecuaciones:

$$[x_p] = [\mu]^{-1} \cdot [x]$$

podemos poner los desplazamientos iniciales $x_i(0)$ en coordenadas principales:

$$[x_p(0)] = [\mu]^{-1} \cdot [x(0)]$$

siendo:

$$[x_p(0)] = \begin{bmatrix} x_{p1}(0) \\ x_{p2}(0) \\ \dots \\ x_{pn}(0) \end{bmatrix} \quad [x(0)] = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

derivando la expresión anterior se obtendrá:

$$[\dot{x}_p(0)] = [\mu]^{-1} \cdot [\dot{x}(0)]$$

9.-Resolución del sistema libre, no amortiguado, de n GDL, en coordenadas principales:

Como hemos visto, en coordenadas principales:

$$[x_p] = [\mu]^{-1} \cdot [x]$$

el sistema puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} \diagup \\ M \\ \diagdown \end{bmatrix} \cdot [\ddot{x}_p] + \begin{bmatrix} \diagup \\ K \\ \diagdown \end{bmatrix} \cdot [x_p] = [0]$$

que puede escribirse:

$$M_1 \cdot \ddot{x}_{p1} + K_1 \cdot x_{p1} = 0$$

$$M_2 \cdot \ddot{x}_{p2} + K_2 \cdot x_{p2} = 0$$

.....

$$M_i \cdot \ddot{x}_{pi} + K_i \cdot x_{pi} = 0$$

.....

$$M_n \cdot \ddot{x}_{pn} + K_n \cdot x_{pn} = 0$$

Como sabemos la solución de una cualquiera de estas ecuaciones:

$$M_i \cdot \ddot{x}_{pi} + K_i \cdot x_{pi} = 0$$

con las condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad \begin{cases} x_{pi} = x_{pi}(0) \\ \dot{x}_{pi} = \dot{x}_{pi}(0) \end{cases}$$

será la de un sistema de 1 GDL, no amortiguado, en vibración libre, con la frecuencia natural:

$$\omega_1^2 = K_1/M_1$$

es decir:

$$x_{p1} = x_{p1}(0) \cdot \cos \omega_1 \cdot t + [\dot{x}_{p1}(0)/\omega_1] \cdot \text{en } \omega_1 \cdot t$$

-La transformación posterior de las coordenadas x_p a las x ha de hacerse por las ecuaciones:

$$[x] = [p] \cdot [x_p]$$

o en forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ \dots \\ x_{pn} \end{bmatrix}$$

que evidentemente conducirán a unos valores de x_1, x_2, \dots, x_n que serán una combinación lineal de los n modos principales w_i .

En efecto, en forma desarrollada:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu_{11} \cdot x_{p1} + \mu_{12} \cdot x_{p2} + \dots + \mu_{1n} \cdot x_{pn} \\ x_2 &= \mu_{21} \cdot x_{p1} + \mu_{22} \cdot x_{p2} + \dots + \mu_{2n} \cdot x_{pn} \\ &\dots \\ x_n &= \mu_{n1} \cdot x_{p1} + \mu_{n2} \cdot x_{p2} + \dots + \mu_{nn} \cdot x_{pn} \end{aligned}$$

que finalmente a:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu_{11} \cdot [x_{p1}(0) \cdot \cos w_1 \cdot t + \dot{x}_{p1}(0) / w_1 \cdot \text{Sen } w_1 \cdot t] + \\ &\quad \mu_{12} \cdot [x_{p2}(0) \cdot \cos w_2 \cdot t + \dot{x}_{p2}(0) / w_2 \cdot \text{Sen } w_2 \cdot t] + \dots \\ x_2 &= \mu_{21} \cdot [x_{p1}(0) \cdot \cos w_1 \cdot t + \dot{x}_{p1}(0) / w_1 \cdot \text{Sen } w_1 \cdot t] + \\ &\quad \mu_{22} \cdot [x_{p2}(0) \cdot \cos w_2 \cdot t + \dot{x}_{p2}(0) / w_2 \cdot \text{Sen } w_2 \cdot t] + \dots \end{aligned}$$

10.-Normalización de las coordenadas principales: coordenadas normales.-

La infinitud de vectores modales (aunque guardando entre sus componentes idénticas relaciones) conduce a una infinitud de matrices modales y, como consecuencia, a una infinitud de coordenadas principales.

Entre todas ellas podrán haber unas, que llamaremos "normalizadas", que convierten a la matriz de masas en la matriz unidad.

En efecto, en la expresión de masa generalizada:

$$[\mu]_i^T \cdot [m] \cdot [\mu]_i = M_i$$

que conduce a la matriz diagonal de masas generalizadas para los n modos w_i .

$$[\mu]^T \cdot [m] \cdot [\mu] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & M & \\ & & / \end{bmatrix}$$

podemos elegir convenientemente los vectores modales (entre los infinitos existentes), llamándoles por ejemplo $[\mu_N]_i$, de manera que se cumpla:

$$[\mu_N]_i^T \cdot [m] \cdot [\mu_N]_i = 1$$

o para los n valores:

$$[\mu_N]^T \cdot [m] \cdot [\mu_N] = [I]$$

siendo $[\mu_N]$ la "matriz modal normalizada".

Para obtener esta normalización de las masas, partiendo de los vectores modales calculados en función de uno de ellos, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} X_1/X_1 \\ X_2/X_2 \\ \dots \\ X_n/X_n \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}_i = [\mu]_i$$

basta con dividir cada columna i de la matriz modal por un coeficiente C_i , definido por:

$$[\mu_N]_i = [\mu]_i / C_i$$

$$C_i = \pm \sqrt{[\mu]_i^T \cdot [m] \cdot [\mu]_i} = \pm \sqrt{M_i}$$

o en forma desarrollada:

$$C_i = \pm \sqrt{\sum_{j=1}^n \mu_{ji} \cdot \left[\sum_{k=1}^n m_{jk} \cdot \mu_{ki} \right]}$$

Si la matriz $[m]$ fuera diagonal, entonces:

$$C_i = \pm \sqrt{\sum_{j=1}^n (m_j \cdot \mu_{ji}^2)}$$

Cuando todos y cada uno de los vectores modales estén normalizados (de esta forma) en la matriz modal, podremos poner:

$$[\mu_N]^T \cdot [m] \cdot [\mu_N] = \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & M_N & \\ & & \diagup \end{bmatrix} = [I]$$

NOTA: Obsérvese que la expresión anterior permite hallar fácilmente la inversa de la matriz modal, sin necesidad de calcular la adjunta de los cofactores.

En efecto de

$$[\mu_N]^T \cdot [m] \cdot [\mu_N] = [I]$$

Se deduce:

$$[\mu_N]^T \cdot [m] = [\mu_N]^{-1}$$

-La aplicación de la matriz modal normalizada, a la matriz de rigidez, conduce a la matriz de los modos propios.

En efecto, antes vimos que:

$$[\mu]^T \cdot [k] \cdot [\mu] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & K & \\ & & / \end{bmatrix}$$

aplicando la matriz normalizada:

$$[\mu_N]^T \cdot [k] \cdot [\mu_N] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & K_N & \\ & & / \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & M_N & \\ & & / \end{bmatrix} \cdot [w^2] = [w^2] \cdot [I] = [w^2]$$

siendo uno cualquiera de sus términos:

$$[\mu_N]^T \cdot [k] \cdot [\mu_N]_i = K_i = w_i^2$$

lo que significa que cuando los autovectores están normalizados respecto de las masas, las rigideces, expresadas en coordenadas normales, son iguales a los valores propios.

-En resumen, las coordenadas normales pueden hallarse por la expresión:

$$[x_N] = [\mu_N]^{-1} \cdot [x]$$

11.-Resolución del sistema libre, no amortiguado, en sistemas de n GDL.

Según todo lo dicho, el sistema de Ecuaciones diferenciales en coordenadas normales, puede escribirse:

$$\ddot{[x_N]} + [w^2] \cdot [x_N] = [0]$$

Una cualquiera de estas n ecuaciones diferenciales independientes será:

$$\ddot{x}_{N_i} + \omega_i^2 \cdot x_{N_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Si para $t = 0$, $x_{N_i} = x_{N_i}(0)$ y $\dot{x}_{N_i} = \dot{x}_{N_i}(0)$ la solución será del tipo:

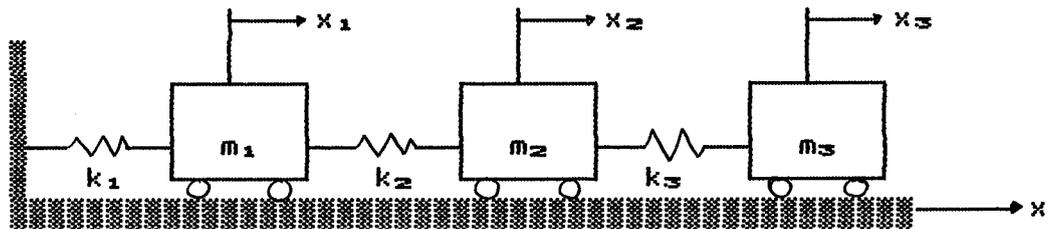
$$x_{N_i} = x_{N_i}(0) \cdot \cos \omega_i \cdot t + (\dot{x}_{N_i}(0) / \omega_i) \cdot \text{Sen } \omega_i \cdot t$$

a la cual, aplicando la transformación inversa:

$$[x] = [\mu_N] \cdot [x_N]$$

conduce a los n valores de x_i .

EJEMPLO: Sea el sistema de 3 GDL de la figura, (libre y no amortiguado).



$$\text{Sea } m_1 = m_2 = m_3 = m$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$

Encontrar las respuestas del sistema en las condiciones iniciales

$$x_{01} = x_{02} = x_{03} = 0$$

$$\dot{x}_{03} = v ; \dot{x}_{02} = \dot{x}_{03} = 0 \text{ (golpe a la masa 1)}$$

1.-Sistema de ecuaciones diferenciales que definen el sistema:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots \\ x_1 \\ \ddots \\ x_2 \\ \ddots \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0]$$

2.-Cálculo de los valores de las matrices de masa y rigidez (por el método de los coeficientes de influencia).

Matriz de masas:

<u>Configuración</u>	<u>Acción</u>	<u>Fuerza en:</u>
$x_1 = \text{libre}$	\ddots $x_1 = 1m/s^2$	$m_1: m_{11} = m_1 \cdot 1m/s^2 = m_1 = m$
$x_2 = 0$		$m_2: m_{21} = m_2 \cdot 0 = 0$
$x_3 = 0$		$m_3: m_{31} = m_3 \cdot 0 = 0$

<u>Configuración</u>	<u>Acción</u>	<u>Fuerza en</u>
$x_1 = 0$	\ddots $x_2 = 1m/s^2$	$m_1: m_{12} = m_1 \cdot 0 = 0$
$x_2 = \text{libre}$		$m_2: m_{22} = m_2 \cdot 1m/s^2 = m_2 = m$
$x_3 = 0$		$m_3: m_{32} = m_3 \cdot 0 = 0$

<u>Configuración</u>	<u>Acción</u>	<u>Fuerza en:</u>
$x_1 = 0$		$m_1: m_{13} = m_1 \cdot 0 = 0$
$x_2 = 0$		$m_2: m_{23} = m_2 \cdot 0 = 0$
$x_3 = \text{libre}$	\ddots $x_3 = 1m/s^2$	$m_3: m_{33} = m_3 \cdot 1m/s^2 = m_3 = m$

Luego la matriz masa será:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez:

<u>Configuración</u>	<u>Acción</u>	<u>Fuerza en:</u>
$x_1 = \text{libre}$	$x_1 = 1\text{cm}$	$m_1: k_{11} = (k_1+k_2) \cdot 1\text{cm} =$ $= k_1+k_2 = 2k$
$x_2 = 0$		$m_2: k_{21} = -k_2 \cdot 1\text{cm} = -k_2 = -k$
$x_3 = 0$		$m_3: k_{31} = 0$

<u>Configuración</u>	<u>Acción</u>	<u>Fuerza en:</u>
$x_1 = 0$		$m_1: k_{12} = -k_2 \cdot 1\text{cm} = -k_2 = -k$
$x_2 = \text{libre}$	$x_2 = 1\text{cm}$	$m_2: k_{22} = (k_2+k_3) \cdot 1\text{cm} =$ $= k_2+k_3 = 2k$
$x_3 = 0$		$m_3: k_{32} = -k_3 \cdot 1\text{cm} = -k_3 = -k$

<u>Configuración</u>	<u>Acción</u>	<u>Fuerza en:</u>
$x_1 = 0$		$m_1: k_{13} = 0$
$x_2 = 0$		$m_2: k_{23} = -k_3 \cdot 1 = -k_3 = -k$
$x_3 = \text{libre}$	$x_3 = 1\text{cm}$	$m_3: k_{33} = k_3 \cdot 1 = k_3 = -k$

Luego la matriz de rigidez será:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.- Cálculo de los autovalores o valores propios o frecuencias naturales del sistema:

Hemos de resolver el determinante:

$$\begin{vmatrix} k_{11} - w^2 \cdot m_{11} & k_{12} - w^2 \cdot m_{12} & k_{13} - w^2 \cdot m_{13} \\ k_{21} - w^2 \cdot m_{21} & k_{22} - w^2 \cdot m_{22} & k_{23} - w^2 \cdot m_{23} \\ k_{31} - w^2 \cdot m_{31} & k_{32} - w^2 \cdot m_{32} & k_{33} - w^2 \cdot m_{33} \end{vmatrix} = 0$$

o sea, en nuestro caso:

$$\begin{vmatrix} 2k - w^2 \cdot m & -k & 0 \\ -k & 2k - w^2 \cdot m & -k \\ 0 & -k & k - w^2 \cdot m \end{vmatrix} = 0$$

que conduce a la ecuación cúbica en:

$$(w^2)^3 - 5 \cdot (k/m) \cdot (w^2)^2 + 6 \cdot (k/m)^2 \cdot w^2 + (k/m)^3 = 0$$

que resuelta por métodos numéricos conduce a las soluciones:

$$w_1^2 = 0,198 \text{ k/m}; \quad w_2^2 = 1,555 \text{ k/m}; \quad w_3^2 = 3,247 \text{ k/m}$$

O sea, las frecuencias naturales serán:

$$w_1 = 0,445 \sqrt{k/m}; \quad w_2 = 1,247 \sqrt{k/m}; \quad w_3 = 1,802 \sqrt{k/m}$$

4.-Cálculo de las formas modales (vectores propios).

Hemos de resolver la ecuación:

$$(w^2 \cdot [m] + [k]) \cdot [X] = [0]$$

para cada valor de w .

Para $w = w_1 \implies w^2 = w_1^2$

$$\begin{bmatrix} 2k - 0,198 \text{ k/m} & -k & 0 \\ -k & 2k - 0,198 \text{ k/m} & -k \\ 0 & -k & k - 0,198 \text{ k/m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = [0]$$

Dando valores y dividiendo por k y $1/m$:

$$\begin{bmatrix} 1,802 & -1 & 0 \\ -1 & 1,802 & -1 \\ 0 & -1 & 0,802 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = [0]$$

Operando:

$$1,802 \cdot X_1 - X_2 = 0$$

$$-X_1 + 1,802 \cdot X_2 - X_3 = 0$$

$$-X_2 + 0,802 \cdot X_3 = 0$$

de donde se obtiene

$$X_2 = 1,082 \cdot X_1$$

$$X_3 = 2,247 \cdot X_1$$

(X_1 no puede hallarse, pues resulta una identidad).

En definitiva, hemos hallado la forma modal para w_1 :

$$X_1 / X_1 = 1 ; X_2 / X_1 = 1,802 ; X_3 / X_1 = 2,247$$

que en forma matricial puede expresarse:

$$\begin{bmatrix} X_1 / X_1 \\ X_2 / X_1 \\ X_3 / X_1 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,802 \\ 2,247 \end{bmatrix}_1$$

Haciendo lo mismo para $w^2 = w_2^2 = 1,555$ k/m y

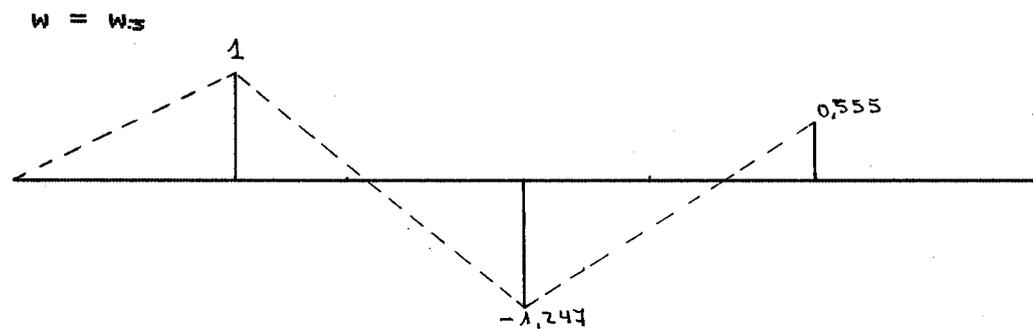
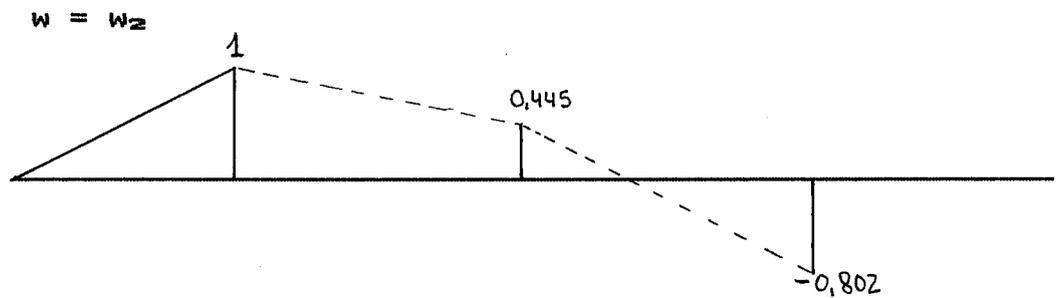
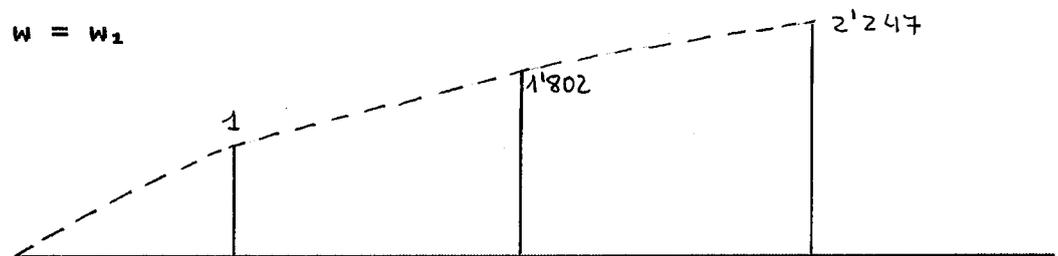
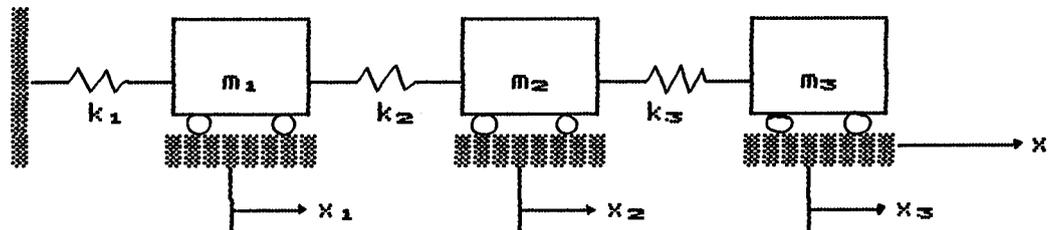
$w^2 = w_3^2 = 3,247$ k/m, se obtienen las otras dos

formas modales:

$$\begin{bmatrix} X_1 / X_1 \\ X_2 / X_1 \\ X_3 / X_1 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,445 \\ -0,802 \end{bmatrix}_2$$

$$\begin{bmatrix} X_2 / X_1 \\ X_3 / X_1 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,247 \\ 0,555 \end{bmatrix}_3$$

Gráficamente puede representarse del modo como se ve en la figura:



NOTA: Recuérdese que las formas modales no son las verdaderas amplitudes de vibración de m_1 , m_2 y m_3 . En este caso decimos que las formas modales están referidas (normalizadas) a la amplitud de la primera masa. Normalmente esta amplitud de referencia se toma igual a 1, pero puede tomarse cualquier otro número.

NOTA: Los vectores propios también pueden hallarse por medio de la matriz adjunta, para cada modo.

$$[H]_1^* = [-\omega_1^2 [m] + [k]]^a$$

Operando, la matriz adjunta vale:

$$[H]_1^* = \begin{bmatrix} (2k - \omega_1^2 \cdot m) \cdot (k - \omega_1^2 \cdot m) - k^2 & k \cdot (k - \omega_1^2 \cdot m) & k^2 \\ k \cdot (k - \omega_1^2 \cdot m) & (2k - \omega_1^2 \cdot m) \cdot (k - \omega_1^2 \cdot m) & k \cdot (2k - \omega_1^2 \cdot m) \\ k^2 & k \cdot (2k - \omega_1^2 \cdot m) & (2k - \omega_1^2 \cdot m)^2 - k^2 \end{bmatrix}$$

Para $\omega^2 = \omega_1^2 = 0,198 \text{ k/m}$, queda:

$$[H]_1^* = k^2 \cdot \begin{bmatrix} 0,445 & 0,802 & 1,000 \\ 0,802 & 1,445 & 1,802 \\ 1,000 & 1,802 & 2,247 \end{bmatrix}$$

Cualquiera de estas columnas representa el autovector para el modo 1 (o cualquier otra proporción que quisiese tomarse sobre estos mismos valores), pues todas ellas guardan las mismas proporciones entre sus valores, como es fácil de comprobar.

Eligiendo la tercera, ya que está normalizada a 1, obtendríamos el correspondiente autovector.

$$\begin{bmatrix} X_1 / X_1 \\ X_2 / X_1 \\ X_3 / X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,802 \\ 2,247 \end{bmatrix}$$

Operando en forma similar para los modos w_2 y w_3 , obtendríamos los mismos valores (en la columna normalizada a 1) que en el caso anterior.

5.-Matriz modal:

$$[p] = [p]_1 \cdot [p]_2 \cdot [p]_3 = \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 & 1,000 \\ 1,802 & 0,445 & -1,247 \\ 2,247 & -0,802 & 0,555 \end{bmatrix}$$

6.-Masa y rigidez generalizada:

Como sabemos:

$$[p]_i^T \cdot [m] \cdot [p]_i = M_i$$

Para el modo 1 ($w = w_1$), se tiene:

$$[1,000 \ 1,802 \ 2,247] \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,802 \\ 2,247 \end{bmatrix} = 9,296 m = M_1$$

Para el modo 2:

$$m[1,000 \ 0,445 \ -0,802] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,445 \\ -0,802 \end{bmatrix} = 1,841m = M_2$$

Para el modo 3:

$$m \begin{bmatrix} 1,000 & -1,247 & 0,555 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,000 \\ -1,247 \\ 0,555 \end{bmatrix} = 2,863m = M_3$$

Calculándolas por medio de la matriz modal tendríamos:

$$[\mu]^T \cdot [m] \cdot [\mu] = \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & M & \\ & & \diagup \end{bmatrix}$$

$$m \cdot \begin{bmatrix} 1,000 & 1,802 & 2,247 \\ 1,000 & 0,445 & -0,802 \\ 1,000 & -1,247 & 0,555 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 & 1,000 \\ 1,802 & 0,445 & -1,247 \\ 2,247 & -0,802 & 0,555 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,296 & 0 & 0 \\ 0 & 1,841 & 0 \\ 0 & 0 & 2,863 \end{bmatrix} \cdot m$$

Haciendo lo mismo con K:

$$[\mu]^T \cdot [k] \cdot [\mu] = \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & K & \\ & & \diagup \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \begin{bmatrix} 1,000 & 1,802 & 2,247 \\ 1,000 & 0,445 & -0,802 \\ 1,000 & -1,247 & 0,555 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 & 1,000 \\ 1,802 & 0,445 & -1,247 \\ 2,247 & -0,802 & 0,555 \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 1,841 & 0 & 0 \\ 0 & 2,863 & 0 \\ 0 & 0 & 9,296 \end{bmatrix}$$

7.-Coordenadas principales:

Se define por:

$$[x_p] = [\mu]^{-1} \cdot [x] \quad [\mu]^{-1} = \frac{1}{|\mu|} \cdot [\mu]^{adj}$$

$$\begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ x_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 & 1,000 \\ 1,802 & 0,445 & -1,247 \\ 2,247 & -0,802 & 0,555 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$Adj [\mu] = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0,445 & -1,247 \\ -0,802 & 0,555 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1,802 & -1,247 \\ 2,247 & 0,555 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1,802 & 0,445 \\ 2,247 & -0,802 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1,000 & 1,000 \\ -0,802 & 0,555 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1,000 & 1,000 \\ 2,247 & 0,555 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1,000 & 1,000 \\ 2,247 & -0,802 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1,000 & 1,000 \\ 0,445 & -1,247 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1,000 & 1,000 \\ 1,802 & -1,247 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1,000 & 1,000 \\ 1,802 & 0,445 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Adj [\mu] = \begin{bmatrix} -0,753 & -3,802 & -2,445 \\ -1,357 & -1,692 & -3,049 \\ -1,692 & 3,049 & -1,357 \end{bmatrix}$$

$$|\mu| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1,802 & 0,445 & -1,247 \\ 2,247 & -0,802 & 0,555 \end{vmatrix} = -7$$

$$[\mu]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,107 & -3,802 & -2,445 \\ 0,193 & -1,692 & -3,049 \\ 0,241 & 3,049 & -1,357 \end{bmatrix}$$

Con lo cual tendremos:

$$\begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ x_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,107 & -3,802 & -2,445 \\ 0,193 & -1,692 & -3,049 \\ 0,241 & 3,049 & -1,357 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

8.-Ecuación del sistema en coordenadas principales:

$$k \cdot \begin{bmatrix} 9,296 & 0 & 0 \\ 0 & 1,841 & 0 \\ 0 & 0 & 2,863 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots \\ x_{p1} \\ \ddots \\ x_{p2} \\ \ddots \\ x_{p3} \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} 1,841 & 0 & 0 \\ 0 & 2,863 & 0 \\ 0 & 0 & 9,296 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ x_{p3} \end{bmatrix} = [0]$$

$$9,296 \cdot \ddots x_{p1} + 1,841 \cdot x_{p1} = 0$$

$$1,841 \cdot \ddots x_{p2} + 2,863 \cdot x_{p2} = 0$$

$$2,863 \cdot \ddots x_{p3} + 9,296 \cdot x_{p3} = 0$$

8.-Las condiciones iniciales en las coordenadas principales serán:

$$\begin{bmatrix} x_{p1}(0) \\ x_{p2}(0) \\ x_{p3}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,107 & -3,802 & -2,445 \\ 0,193 & -1,692 & -3,049 \\ 0,241 & 3,049 & -1,357 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddots x_{p1}(0) \\ \ddots x_{p2}(0) \\ \ddots x_{p3}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,107 & -3,802 & -2,445 \\ 0,193 & -1,692 & -3,049 \\ 0,241 & 3,049 & -1,357 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} 0,107 \\ 0,193 \\ 0,241 \end{bmatrix}$$

9.- Las soluciones de las ecuaciones diferenciales en coordenadas principales serán:

$$x_{p1} = \frac{0,107 \cdot v}{0,455 \cdot \sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(0,445 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t) = \frac{0,240 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(0,445 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t)$$

$$x_{p2} = \frac{0,193 \cdot v}{1,247 \cdot \sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(1,247 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t) = \frac{0,154 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(1,247 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t)$$

$$x_{p3} = \frac{0,241 \cdot v}{1,802 \cdot \sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(1,802 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t) = \frac{0,133 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(1,802 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t)$$

10.- Pasando de nuevo a las coordenadas normales:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 & 1,000 \\ 1,802 & 0,445 & -1,247 \\ 2,247 & -0,802 & 0,555 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ x_{p3} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_{p1} + x_{p2} + x_{p3}$$

$$x_2 = 1,802x_{p1} + 0,445x_{p2} - 1,247x_{p3}$$

$$x_3 = 2,247x_{p1} - 0,802x_{p2} + 0,555x_{p3}$$

$$x_1 = \frac{0,240 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(0,445 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t) + \frac{0,154 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(1,247 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t) + \frac{0,133 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(1,802 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t)$$

$$x_2 = \frac{0,432 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(0,445 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t) + \frac{0,068 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(1,247 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t) - \frac{0,165 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(1,802 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t)$$

$$x_3 = \frac{0,432 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(0,445 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t) - \frac{0,123 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(1,247 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t) + \frac{0,073 \cdot v}{\sqrt{k/m}} \cdot \text{Sen}(1,802 \cdot \sqrt{k/m} \cdot t)$$

3.-VIBRACIONES FORZADAS EN SISTEMAS DE N GDL, NO AMORTIGUADOS.-

En general, un sistema de este tipo vendrá definido por el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$[m] \cdot \ddot{[x]} + [k] \cdot [x] = [F] \quad [1]$$

siendo $[F]$ una matriz columna que representa la acción sobre cada una de las masas del sistema:

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \dots \\ F_n(t) \end{bmatrix}$$

La ecuación [1] puede desacoplarse haciendo el cambio a coordenadas principales, premultiplicando por $[\mu]^T$ y sabiendo que:

$$\begin{aligned} [x_p] &= [\mu]^{-1} \cdot [x] \\ \ddot{[x_p]} &= [\mu]^{-1} \cdot \ddot{[x]} \end{aligned}$$

$$[\mu]^T \cdot [m] \cdot [\mu] \cdot \ddot{[x_p]} + [\mu]^T \cdot [k] \cdot [\mu] \cdot [x_p] = [\mu]^T \cdot [F]$$

que también puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} \backslash \\ M \\ \backslash \end{bmatrix} \cdot \ddot{[x_p]} + \begin{bmatrix} \backslash \\ K \\ \backslash \end{bmatrix} \cdot [x_p] = [F_p]$$

en la cual el vector $[F_p]$ es el vector de cargas aplicadas expresado en coordenadas principales:

$$\begin{bmatrix} F_{p1}(t) \\ F_{p2}(t) \\ \dots \\ F_{pn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \cdot F_1 + \mu_{21} \cdot F_2 + \mu_{31} \cdot F_3 + \dots + \mu_{n1} \cdot F_n \\ \mu_{21} \cdot F_1 + \mu_{22} \cdot F_2 + \mu_{32} \cdot F_3 + \dots + \mu_{n2} \cdot F_n \\ \dots \\ \mu_{n1} \cdot F_1 + \mu_{n2} \cdot F_2 + \mu_{n3} \cdot F_3 + \dots + \mu_{nn} \cdot F_n \end{bmatrix}$$

$$[F_p] = [\mu]^T \cdot [F]$$

Si la matriz modal estuviera normalizada respecto a la matriz de masas, se tendrá:

$$[F_{pN}] = [\mu_N]^T \cdot [F]$$

Una cualquiera de las n ecuaciones expresada en coordenadas principales sería:

$$\ddot{x}_{p1} + \omega_1^2 \cdot x_{p1} = F_{pN1} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad [2]$$

siendo la acción aplicada sobre la masa i la siguiente:

$$F_{pN1} = \mu_{N11} \cdot F_1 + \mu_{N21} \cdot F_2 + \mu_{N31} \cdot F_3 + \dots + \mu_{Nn1} \cdot F_n$$

Evidentemente las n ecuaciones [2] pueden resolverse como sistemas de 1 GDL, sometidos a la acción F_{pN1} .

Una vez resuelto el sistema de ese modo, se procedería a deshacer el cambio de coordenadas, por la expresión:

$$[x] = [\mu_N] \cdot [x_{pN}] \quad [3]$$

-Si las fuerzas $F(t)$ fueran armónicas y todas de frecuencia circular ω_e :

$$[F] = \begin{bmatrix} F_{01} \\ F_{02} \\ \dots \\ F_{0n} \end{bmatrix} \cdot \cos \omega_e \cdot t \quad \text{siendo una de ellas } F_1 = F_{01} \cdot \cos \omega_e \cdot t$$

Conduciría a un conjunto de ecuaciones diferenciales independientes en la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{PN1} + \omega_1^2 \cdot x_{PN1} &= [\mu_{N11} \cdot F_{01} + \mu_{N21} \cdot F_{02} + \dots + \mu_{Nn1} \cdot F_{0n}] \cdot \cos \omega_E \cdot t \\ \ddot{x}_{PN1} + \omega_1^2 \cdot x_{PN1} &= A \cdot \cos \omega_E \cdot t \end{aligned}$$

cuya solución, según sabemos es:

$$x_{PN1} = (E \cdot \cos \omega_1 \cdot t + G \cdot \text{Sen } \omega_1 \cdot t) + \frac{A}{\omega_1^2 \cdot [1 - (\omega_E/\omega_1)^2]}$$

Obviamente, para determinar el movimiento del modo próximo a la resonancia $\omega_1 \approx \omega_E$, sólo tendríamos que usar el término x_{PN1} correspondiente a ω_1 .

La transformación posterior del tipo [3]:

$$[x_i] = [\mu_N]_i \cdot x_{PN1}$$

nos daría el movimiento de cada masa.

-Si las fuerzas fueran periódicas, podríamos poner:

$$F_i(t) = F_{0i} + \sum_{j=1}^n \left[A_j \cdot \cos \frac{2\pi \cdot j}{T} \cdot t + B_j \cdot \text{Sen } \frac{2\pi \cdot j}{T} \cdot t \right]_i$$

Con los valores ya conocidos para F_{0i} , A_j y B_j .

Como es lógico, un sistema de n GDL, no amortiguado, es más propenso a entrar en resonancia (en alguno de sus modos) cuando es excitado por fuerzas tan complejas como las periódicas, aunque resultará difícil averiguar cual de los modos naturales se verá más profundamente afectado.

Evidentemente, no quedará más remedio que comparar los términos $(2\pi \cdot j/T)$ del desarrollo de Fourier para ver cuales son las más próximas a los modos naturales.

-Si las fuerzas aplicadas no fuesen periódicas, aplicaríamos la integral de Duhamel, de manera que la solución de la ecuación (i):

$$\ddot{x}_{PN1} + \omega_1^2 \cdot x_{PN1} = F_{PN1}$$

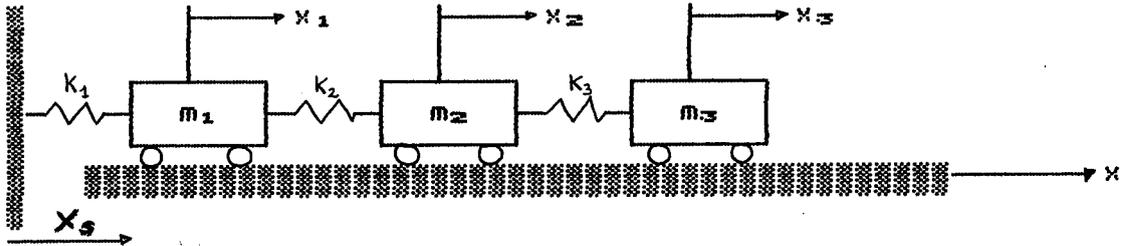
sería:

$$x_{PN1} = E \cdot \cos \omega_1 \cdot t + G \cdot \sin \omega_1 \cdot t + \int_0^t F_{PN1} \cdot h_1 \cdot (t-r) \cdot dr$$

siendo $h_1 \cdot (t-r)$ del impulso en el tiempo r y

$$F_{PN1} = \mu_{N11} \cdot F_1 + \mu_{N21} \cdot F_2 + \dots + \mu_{Nn1} \cdot F_n$$

4.-VIBRACIONES FORZADAS POR MOVIMIENTO DE LA BASE, EN SISTEMA DE N GDL, NO AMORTIGUADOS.-



Supongamos, en el ejemplo de la figura, que la pared (soporte) se desplaza siguiendo la ley:

$$x_s = F_s(t)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento puede escribirse:

$$[m] \cdot [\ddot{x}^*] + [k] \cdot [x^*] = [0] \quad [1]$$

siendo el vector $[x^*]$ los desplazamientos de las masas relativos a la pared:

$$[x^*] = [x] - [1] \cdot x_s$$

desarrolladamente:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_s$$

sustituyendo en [1]:

$$[m] \cdot [\ddot{x}] + [k] \cdot [x] = [k] \cdot [1] \cdot x_s$$

siendo $[k] \cdot [1] \cdot x_s = [Q_s]$ un vector "carga equivalente" correspondiente a las cargas que aparecen sobre cada masa

cuando la pared se desplaza, pudiendo moverse libremente todas las masas.

El sistema de ecuaciones diferenciales resultantes será:

$$[m] \cdot \ddot{[x]} + [k] \cdot [x] = [Q_e]$$

que puede resolverse como vimos en el caso de vibración forzada.

-Si se especificara la aceleración del soporte \ddot{x}_e en lugar del desplazamiento, tendríamos:

$$[x^*] = [x] - [1] \cdot \ddot{x}_e$$

Sustituyendo en la correspondiente ecuación [1] quedaría

$$[m] \cdot \ddot{[x^*]} + [k] \cdot [x^*] = [Q_e^*]$$

siendo $[Q_e^*] = -[m] \cdot [1] \cdot \ddot{x}_e$

Como en este ejemplo la matriz masa es diagonal, se tendrá:

$$[Q_e^*] = \begin{bmatrix} \ddots \\ -m_1 \cdot \ddot{x}_e \\ \ddots \\ -m_2 \cdot \ddot{x}_e \\ \ddots \\ -m_3 \cdot \ddot{x}_e \\ \ddots \end{bmatrix}$$

-En términos generales (no para el caso del ejemplo concreto), y cuando se especifique el movimiento del soporte, podremos poner el sistema de ecuaciones diferenciales en la forma:

$$[m] \cdot \ddot{[x]} + [k] \cdot [x] + [k_e] \cdot x_e = [0] \quad [2]$$

siendo $[k_e]$ un vector de coeficiente de influencia definidos como la fuerza correspondiente cuando se produce la unidad de desplazamiento del soporte, pudiendo moverse libremente todas las masas.

La solución del sistema sigue la misma tónica anterior:

$$[m] \cdot [\ddot{x}] + [k] \cdot [x] = -[k_e] \cdot x_e = [Q_e]$$

-Todo lo anterior se refiere a un sólo movimiento del soporte, y además en la dirección del movimiento de las masas.

En casos más complicados pueden suponerse movimientos del soporte complejos, compuestos por traslaciones (con sus tres componentes) y rotaciones (también con tres componentes), actuando sobre los n componentes del sistema.

En este caso, la matriz $[k_e]$ será una matriz $n \times 6$.

Si un sistema con n GDL tiene r soportes que se pueden mover independientemente la ecuación [2] puede generalizarse

$$[m] \cdot [\ddot{x}] + [k] \cdot [x] + [k_e] \cdot [x_r] = [0]$$

LLamando $[Q_e] = -[k_e] \cdot [x_r]$

siendo $[x_r]$ el vector desplazamiento correspondiente a los r soportes móviles y $[k_e]$ la matriz de rigideces definida como antes.

5.-VIBRACIONES AMORTIGUADAS, EN SISTEMAS DE N GDL.-

-En general un sistema de este tipo puede escribirse:

$$[m] \cdot \ddot{[x]} + [c] \cdot \dot{[x]} + [k] \cdot [x] = [F]$$

siendo la matriz de amortiguamiento, en términos generales:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

(que es una matriz simétrica, calculada por el método de los coeficientes de influencia, por ejemplo)

-Cuando se trata de resolver este sistema nos encontramos que la transformación a coordenadas principales no desacopla el sistema, precisamente debido a esta matriz de amortiguamiento. Sin embargo, existe un caso en que sí puede ser desacoplado el sistema, y se refiere a cuando la matriz de amortiguamiento es una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez, en la forma:

$$[c] = a \cdot [m] + b \cdot [k]$$

siendo a y b constantes.

Este tipo de amortiguamiento se denomina "amortiguamiento proporcional".

El sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas escritas en coordenadas principales será:

$$\begin{bmatrix} \backslash \\ M \\ \backslash \end{bmatrix} \cdot [\ddot{x}_p] + \begin{bmatrix} \backslash \\ C \\ \backslash \end{bmatrix} \cdot [\dot{x}_p] + \begin{bmatrix} \backslash \\ K \\ \backslash \end{bmatrix} \cdot [x_p] = [F_p]$$

en donde la matriz $\begin{bmatrix} \backslash \\ C \\ \backslash \end{bmatrix}$ vale:

$$\begin{bmatrix} \backslash \\ C \\ \backslash \end{bmatrix} = [\mu]^T \cdot [c] \cdot [\mu] = a \cdot \begin{bmatrix} \backslash \\ M \\ \backslash \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} \backslash \\ K \\ \backslash \end{bmatrix}$$

llamada "amortiguamiento generalizado"

Cuando la matriz modal se normaliza respecto a la de masas, la matriz de amortiguamiento vale:

$$\begin{bmatrix} \backslash \\ C \\ \backslash \end{bmatrix} = [\mu_N]^T \cdot [c] \cdot [\mu_N] = a \cdot [I] + b \cdot [w^2]$$

siendo $[w^2]$ la matriz diagonal de los valores propios para el sistema no amortiguado.

Una ecuación cualquiera del sistema puede expresarse:

$$\ddot{x}_{p1} + (a + b \cdot w_1^2) \cdot \dot{x}_{p1} + w_1^2 \cdot x_{p1} = F_{p1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

RECORDATORIO:

En sistemas de 1 GDL, del tipo:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

podemos escribirlo también:

$$\ddot{x} + (c/m) \cdot \dot{x} + (k/m) \cdot x = 0$$

llamando $n = (c/2m)$; $w_n^2 = k/m$;

$$\xi = c/c_c = c/2m \cdot w_n = n/w_n$$

queda:

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + w_n^2 \cdot x = 0$$

Llamando, por semejanza con los sistemas de 1 GDL:

$$\begin{array}{l}
 a + b \cdot \omega_1^2 = 2 \cdot n_1 \\
 \xi_1 = n_1 / \omega_1
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \text{(cte. de amortiguamiento modal} \\
 \text{-correspondiente al modo i-)} \\
 \\
 \text{(relación de amortiguamiento modal} \\
 \text{-correspondiente al modo i-)}
 \end{array}
 \right.$$

queda la ecuación desacoplada:

$$\ddot{x}_{p1} + 2 \cdot n_1 \cdot \dot{x}_{p1} + \omega_1^2 \cdot x_{p1} = F_{p1}$$

En consecuencia, la respuesta del sistema (en coordenadas principales) cuando vibra en este modo i, puede hallarse como si tuviera un sólo GDL.

-Si las fuerzas de excitación fueran de tipo periódico, y todas de la misma frecuencia ω_E :

$$[F(t)] = \begin{bmatrix} F_{01} \\ F_{02} \\ \dots \\ F_{0n} \end{bmatrix} \cdot \text{Cos } \omega_E \cdot t$$

una de las ecuaciones en coordenadas principales (y por tanto, desacoplada) tendría la forma:

$$\ddot{x}_{p1} + 2 \cdot n_1 \cdot \dot{x}_{p1} + \omega_1^2 \cdot x_{p1} = A \cdot \text{Cos } \omega_E \cdot t$$

Siendo A una constante cuyo valor se calculó anteriormente.

En terminos generales, la respuesta del sistema será:

$$\begin{aligned}
 x_p = & e^{-n \cdot t} \cdot (E \cdot \text{Cos } \omega_{d1} \cdot t + G \cdot \text{Sen } \omega_{d1} \cdot t) + \\
 & + \frac{A}{\omega_1^2} \cdot \frac{\text{Sen}(\omega_E \cdot t - \varphi)}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_1)^2]^2 + [2\xi_1 \cdot (\omega/\omega_1)]^2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{siendo } \bar{\xi} = \text{Tag}^{-1} \left[\frac{2\xi_1 \cdot (w_E/w_1)}{1 - (w_E^2/w_1^2)} \right]$$

NOTA: Como hemos visto:

$$\xi_1 = \frac{n_1}{w_1} = \frac{a + b \cdot w_1^2}{2 \cdot w_1}$$

Si $a = 0$, es decir, si en el caso de amortiguamiento proporcional, este lo es sólo a la matriz de rigidez, estamos en el caso de "amortiguamiento relativo" (pues este está asociado con la velocidad relativa del desplazamiento de las coordenadas).

En estas condiciones:

$$\xi_1 = (b/2) \cdot w_1$$

lo que significa que la relación de amortiguamiento modal (para el modo i) es proporcional a la frecuencia circular no amortiguada de ese modo, por lo cual la respuesta a los modos más altos se amortiguará más rápidamente que la de los modos más bajos.

Igualmente si $b = 0$, es decir, si la matriz de amortiguamiento es proporcional a la matriz de masas, se está en el caso de "amortiguamiento absoluto" (pues éste está asociado a la velocidad absoluta del desplazamiento de las coordenadas).

En este caso:

$$\xi_1 = a/2 \cdot w_1$$

lo que significa que la relación de amortiguamiento modal (para el modo i) es inversamente proporcional a la frecuencia w_1 no amortiguada.

En estas condiciones los modos más bajos del sistema serán amortiguados más fuertemente que los modos más altos.

-En el caso general de que el sistema no presente amortiguamiento proporcional, las ecuaciones no pueden ser desacopladas por el cambio a coordenadas principales.

Al igual que vimos en los sistemas de 2GDL, los autovalores pueden ser reales o complejos, con partes reales negativas.

Esto lleva a una extrema complicación que no vamos a abordar.

Sin embargo, los sistemas con amortiguamientos débiles pueden ser tratados en forma más simple, suponiendo que las ecuaciones pueden desacoplarse por aplicación de la matriz modal obtenida del mismo sistema sin considerar el amortiguamiento.

En otras palabras, suponiendo que la matriz modal es ortogonal respecto a la $[m]$, la $[k]$ y también la $[c]$

$$[\mu]_j^T \cdot [c] \cdot [\mu]_i = [\mu]_i^T \cdot [c] \cdot [\mu]_j = 0$$

Esto significa que los términos no nulos que resulten de calcular $[\mu]^T \cdot [c] \cdot [\mu]$ (que si los amortiguamientos son pequeños, también serán pequeños), deben ser despreciados.

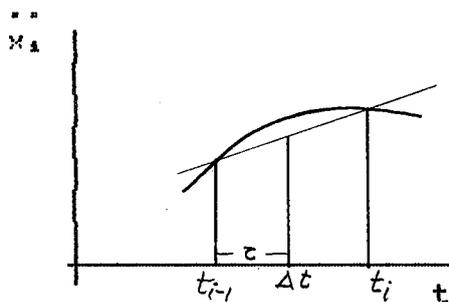
6.-METODOS NUMERICOS PARA LA SOLUCION DE SISTEMAS DE N GDL.-

-Al igual que vimos en sistemas de 1 y 2 GDL, a los sistemas de n GDL pueden aplicárseles los métodos directos (diferencia central, aceleración constante, aceleración lineal, etc.) o métodos indirectos (Runge, Kutta, etc.)

-Así mismo, tales métodos numéricos pueden aplicarse tanto al sistema de ecuaciones diferenciales inicialmente planteado, como al sistema de ecuaciones desacoplado en coordenadas principales o normales.

En el primero de los casos se precisa aplicar un método de resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas (Newton-Kotes, etc.)

-Método de la aceleración lineal.-



El método se basa en suponer que la aceleración de cualquiera de las masas del sistema (m_1 por ejemplo) en un instante, $t_{(i-1+r)}$ comprendido entre $t_{(i-1)}$ y $t_{(i)}$

(i entre paréntesis denota intervalo de tiempo)

$$0 \leq r \leq \Delta t$$

puede expresarse en la forma:

$$\ddot{x}_{1(i-1+r)} = \ddot{x}_{1(i-1)} + \Gamma \cdot \frac{\ddot{x}_{1(i)} - \ddot{x}_{1(i-1)}}{\Delta t}$$

o para las n masas:

$$[\ddot{x}]_{(i-1+r)} = [\ddot{x}]_{(i-1)} + \Gamma \cdot \frac{[\ddot{x}]_{(i)} - [\ddot{x}]_{(i-1)}}{\Delta t} \quad [11]$$

Integrando [1] entre 0 y r

$$\dot{[x]}_{(i-1+r)} = \dot{[x]}_{(i-1)} + r \cdot \ddot{[x]}_{(i-1)} + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\ddot{[x]}_{(i)} - \ddot{[x]}_{(i-1)}}{\Delta t} \quad [2]$$

Integrando 2:

$$\begin{aligned} [x]_{(i-1+r)} &= [x]_{(i-1)} + r \cdot \dot{[x]}_{(i-1)} + \\ &+ \frac{r^2}{2} \cdot \ddot{[x]}_{(i-1)} + \frac{r^3}{6} \cdot \frac{\ddot{[x]}_{(i)} - \ddot{[x]}_{(i-1)}}{\Delta t} \end{aligned} \quad [3]$$

particularizando las ecuaciones [2] y [3] para $r = \Delta t$, y simplificando $[(i-1) + (\Delta t)] = (i)$

$$\dot{[x]}_{(i)} = \dot{[x]}_{(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\ddot{[x]}_{(i)} - \ddot{[x]}_{(i-1)} \right] \quad [4]$$

$$\begin{aligned} [x]_{(i)} &= [x]_{(i-1)} + \Delta t \cdot \dot{[x]}_{(i-1)} + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{6} \cdot \left[\ddot{[x]}_{(i-1)} - \ddot{[x]}_{(i)} \right] \end{aligned} \quad [5]$$

que son las fórmulas de recurrencia a usar (cada una de las cuales implica un sistema de ecuaciones algebraicas).

-El error cometido en esta aproximación (error de truncamiento) puede calcularse sustituyendo en la ecuación [5] $\ddot{[x]}_{(i)}$ por su desarrollo en serie de Taylor

$$\begin{aligned} \ddot{[x]}_{(i)} &= \ddot{[x]}_{(i-1)} + \Delta t \cdot \dddot{[x]}_{(i-1)} + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2!} \cdot [x^{(iv)}]_{(i-1)} + \dots \end{aligned} \quad [6]$$

y comparando el valor obtenido de $[x]_{c_1}$, con el valor exacto obtenido de su correspondiente desarrollo de Taylor:

$$[x]_{c_1} = [x]_{c_1-1} + \Delta t_{c_1} \cdot \dot{[x]}_{c_1-1} + \frac{\Delta t^2_{c_1}}{2!} \cdot [x]_{c_1-1} + \dots$$

NOTA: Si nosotros paramos la serie en el término $\Delta t^3_{c_1}$, el error de truncamiento vale:

$$[E] = [x]_{c_1} \cdot \frac{\Delta t^3_{c_1}}{3!} + [x^{IV}]_{c_1} \cdot \frac{\Delta t^4_{c_1}}{4!}$$

Sustituyendo la ecuación [6] en la [5] y deteniéndola en $\Delta t^4_{c_1}$:

$$[x]_{c_1} = [x]_{c_1-1} + \Delta t \cdot \dot{[x]}_{c_1-1} + [x]_{c_1-1} \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + [x]_{c_1-1} \cdot \frac{\Delta t^3}{3!} + [x^{IV}]_{c_1-1} \cdot \frac{\Delta t^4}{4!}$$

El error de truncamiento será (después de sustituir y operar):

$$[E] = \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{12} \right] \cdot \Delta t^4 \cdot [x^{IV}]_{c_1-1} + \dots$$

es decir, directamente proporcional a Δt^4 .

-El valor de Δt debe tomarse lo suficientemente pequeño para que puedan representarse adecuadamente los modos más altos.

METODOS APROXIMADOS PARA LA SOLUCION DE SISTEMAS DE N GDL

1.-Introducción

2.-Método de iteración matricial

3.-Método de Holzer

-Aplicación a sistemas masa-resorte

-Aplicación a sistemas de torsión

4.-Método de Myklestad

-Aplicación a sistemas en flexión

-Aplicación a sistemas en flexión, giratorios (alabes de turbinas

-Aplicación a sistemas en flexión y torsión acopladas

5.-Método de la matriz de transferencia

-Aplicación a sistemas masa-resorte no amortiguados

-Idem amortiguados

-Aplicación a sistemas de torsión, no amortiguados

-Idem amortiguados

-Aplicación a sistemas dentados

-Aplicación a sistemas en flexión

6.-Método de Dunkerley

7.-Método de Rayleigh

1.-INTRODUCCION AL ANALISIS DE VIBRACIONES EN SISTEMAS DE N GDL,
POR METODOS APROXIMADOS.-

-El método general que hemos estudiado para sistemas de n GDL, conocido como "Análisis modal", en un método muy laborioso, sobre todo en sistemas de gran número de GDL.

Aparte de los métodos numéricos, que resuelven estos sistemas en forma aproximada utilizando un ordenador, es de interés conocer métodos más simples, y ello por dos razones: por simplificar el método y posibilitar su resolución exacta, o por disminuir el tiempo de computación en el caso de emplear métodos numéricos.

-Por otro lado, no siempre interesa conocer la respuesta completa del sistema, y ni siquiera hallar todas sus frecuencias naturales y modos propios. Muchas veces estamos interesados en conocer sólo las bajas (si por ejemplo, éstas son las que pueden ser excitadas por una perturbación exterior), o las más altas.

-Teniendo todo ello en cuenta se han desarrollado varios métodos que calculan las frecuencias y modos principales en forma aproximada.

Todos ellos podemos dividirlos en dos grandes grupos: uno compuesto por métodos que sólo calculan la frecuencia fundamental, y otro grupo de métodos que permitan calcular todas las frecuencias y modos propios del sistema.

Entre los primeros se encuentra el método de Rayleigh (que sólo puede aplicarse a sistemas no amortiguados en vibración libre, y que permite encontrar la frecuencia fundamental de vibración, en forma aproximada "por exceso").

Tal método puede ser completado por el de Dunkerley, (que da el límite inferior para la frecuencia fundamental).

Entre los segundos se encuentra el método de iteración matricial directa e inversa, (con el mismo fin), el método de Holzer, (de especial aplicación a sistemas rotatorios), el método de Myklestad, (de especial aplicación en vigas) y el método de la matriz de transferencia

2.-METODO DE LA ITERACION MATRICIAL.-

Este método permite calcular las frecuencias y modos principales de sistemas de n GDL, no amortiguados, en vibración libre.

Como hemos visto:

$$[k] \cdot [X] = \omega^2 \cdot [m] \cdot [X]$$

premultiplicando por $[k]^{-1}$ y dividiendo por ω^2

$$(1/\omega^2) \cdot [X] = [k]^{-1} \cdot [m] \cdot [X]$$

llamando "matriz dinámica" a:

$$[D] = [k]^{-1} \cdot [m]$$

queda el sistema de ecuaciones algebraicas:

$$[D] \cdot [X] = (1/\omega^2) \cdot [X] \quad [1]$$

Sistema de ecuaciones que se cumple para todos los valores de $1/\omega^2$ obtenidos de la ecuación característica:

$$\left| [D] - (1/\omega^2) \cdot [I] \right| = 0$$

En particular, para el modo ω_1 el sistema de ecuaciones queda:

$$[D] \cdot [X]_1 = (1/\omega_1^2) \cdot [X]_1 \quad [2]$$

siendo $[X]_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}_1$ un vector proporcional a la correspondiente

forma modal $[\mu]_1$

Llamando $[D] \cdot [X]_i = [Y]_i$, queda el sistema en la forma:

$$[Y]_i = (1/w_i^2) \cdot [X]_i \quad [3]$$

o en forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix}_i = (1/w_i^2) \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}_i =$$

lo que significa que ha de verificarse:

$$\begin{aligned} & Y_1 = (1/w_i^2) \cdot X_1 \\ \text{ó} & Y_2 = (1/w_i^2) \cdot X_2 \\ & \dots \dots \dots \\ \text{ó} & Y_n = (1/w_i^2) \cdot X_n \end{aligned}$$

La ecuación [2] (o la [3]) posibilitan un modo de calcular w_i y $[X]_i$ por tanteos sucesivos, sin necesidad de resolver la ecuación característica.

En efecto, se trata de ir dando valores a $[X]_i$ a los que llamaremos vectores de ensayo $\overline{[X]}_i$, hasta que se consigue la entidad expresada por la ecuación [2].

-Supongamos que damos a $[X]_i$ un primer valor (en forma arbitraria) $\overline{[X]}_i^1$

Realizando el producto por [D], tendremos:

$$[D] \cdot \overline{[X]}_i^1 = \overline{[Y]}_i^1 \quad [4]$$

Si el valor ensayado $[\bar{X}]_1^1$ no coincide con un vector propio, al sustituir [4] en [2] no se producirá la entidad

$$[\bar{Y}]_1^1 \neq (1/w_1^2) \cdot [\bar{X}]_1^1$$

Evidentemente, si $[\bar{X}]_1^1$ hubiera coincidido con un vector propio, se hubiera verificado la igualdad al sustituir [4] en [2]

$$[\bar{Y}]_1^1 = (1/w_1^2) \cdot [\bar{X}]_1^1$$

de la cual se podría calcular el correspondiente valor propio w_1 por cualquiera de las relaciones:

$$\frac{1}{w_1^2} = \frac{\bar{Y}_{11}}{X_{11}} = \frac{\bar{Y}_{21}}{X_{21}} = \dots$$

-Si $[\bar{X}]_1^1$ no coincidiese con un vector propio procederíamos a una segunda iteración.

Para ello normalizamos el vector $[\bar{Y}]_1^1$ (dividiendo todos sus elementos por el primero, o por una constante b), y obtendríamos así el segundo vector de ensayo

$$[\bar{X}]_1^2 = (1/b_1) \cdot [\bar{Y}]_1^1 \quad [3]$$

Premultiplicándolo por [D], obtendríamos:

$$[\bar{Y}]_1^2 = [D] \cdot [\bar{X}]_1^2 \quad [4]$$

que al sustituirlo en la ecuación [1] puede ser que $[\bar{Y}]_1^2 = (1/w_1^2) \cdot [\bar{X}]_1^2$ o no serlo.

Si es una igualdad, podremos calcular el valor de w_1 por una cualquiera de las igualdades siguientes

$$\frac{1}{w_1^2} = \frac{\bar{Y}_{11}}{\bar{X}_{11}} = \frac{\bar{Y}_{21}}{\bar{X}_{21}} = \dots\dots$$

y evidentemente, el vector $[\bar{X}]_1^2$ sería el vector propio correspondiente a esa frecuencia w_1 .

Caso de no cumplirse la igualdad anterior se repetiría el procedimiento hasta que se cumpliera la igualdad (o se aproximase dentro de un error prefijado).

-A continuación vamos a probar que esta técnica de iteración converge al valor $(1/w_1^2)$ más alto.

Para ello podemos representar la verdadera amplitud del movimiento de cada masa (X_1, X_2, \dots, X_n) como una combinación lineal de las amplitudes obtenidas para los modos principales:

$$[X] = a_1 \cdot [X]_1 + a_2 \cdot [X]_2 + \dots + a_1 \cdot [X]_1 + \dots + a_n \cdot [X]_n$$

$$[X] = \sum_{i=1}^n a_i \cdot [X]_i \quad [5]$$

siendo a_1, a_2, \dots, a_n las correspondientes constantes de proporcionalidad y $[X]_1, [X]_2, \dots$ las amplitudes correspondientes a los modos de vibración normales w_1, w_2, \dots, w_n .

La expresión anterior, aplicada al vector de ensayo $[\bar{X}]^2$ conduce a:

$$[\bar{X}]^2 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot [X]_i$$

con lo cual queda al sustituir en [2]:

$$[\bar{Y}]^1 = [D] \cdot [\bar{X}]^1 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot [D][X]_i = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (1/w_i^2) \cdot [X]_i$$

En la segunda iteración tendremos:

$$\begin{aligned} [\bar{Y}]^2 &= [D] \cdot [\bar{X}]^2 = [D] \cdot (1/b_1) \cdot [\bar{Y}]_1 = \\ &= [D] \cdot (1/b_1) \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot (1/w_i^2) \cdot [X]_i \end{aligned}$$

Como $[D] \cdot [X]_i = (1/w_i^2) \cdot [X]_i$

queda al sustituir:

$$[\bar{Y}]^2 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (1/b_1) \cdot (1/w_i^2)^2 \cdot [X]_i$$

en la iteración k se tendrá:

$$[\bar{Y}]^k = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (1/w_i^2)^k \cdot [X]_i \cdot \frac{1}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{k-1}}$$

Sacando factor común $(1/w_1^2)^k$, tendremos:

$$[\bar{Y}]^k = \frac{(1/w_1^2)^k}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{k-1}} \cdot \left[a_1 \cdot [X]_1 + \sum_{i=2}^n a_i \cdot \left[\frac{1/w_i^2}{1/w_1^2} \right]^k \cdot [X]_i \right] \quad [6]$$

Si suponemos que:

$$(1/w_1^2) > (1/w_2^2) > (1/w_3^2) > \dots > (1/w_n^2)$$

En la expresión [6] el factor $\left[\frac{1/w_i^2}{1/w_1^2} \right]^k$ tiende a cero cuando k aumenta.

En consecuencia, [6] se puede escribir:

$$[\bar{Y}]^k \approx \frac{(1/w_1^2)^k}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{k-1}} \cdot a_1 \cdot [X]_1 \quad [7]$$

expresión que muestra que la iteración k converge hacia el primer modo $[\bar{Y}]^k \approx [X]_1$, pues todos los demás términos son constantes.

Sacando factor común $1/w_1^2$, tendremos:

$$\begin{aligned} [\bar{Y}]^k &= (1/w_1^2) \cdot \left[a_1 \cdot (1/w_1^2)^{k-1} \cdot [X]_1 \cdot \frac{1}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{k-1}} \right] = \\ &= (1/w_1^2) \cdot [\bar{X}]^k \end{aligned}$$

De donde resulta:

$$1/w_1^2 = [\bar{Y}]^k / [\bar{X}]^k$$

lo que demuestra que esta técnica de iteración converge hacia el valor más alto de $1/w^2$, o en otras palabras, hacia la frecuencia fundamental más baja (w_1)

-Una vez determinado el modo fundamental es posible obtener los autovalores y autovectores para los modos más altos.

En efecto, si el primer modo es suprimido introduciendo unas restricciones al movimiento apropiadas, el segundo modo pasa a ser el fundamental, y a este tenderá el procedimiento iterativo descrito.

Igualmente, la supresión de los modos primero y segundo conduce a la obtención del tercero, y así sucesivamente.

(Como el número de modos es igual al de grados de libertad, es lógico que cada restricción vaya reduciendo los grados de libertad).

Las restricciones modales pueden introducirse haciendo que ciertas coordenadas principales sean nulas.

Según hemos visto:

$$[x_p] = [\mu]^{-1} \cdot [x] \quad [1]$$

Por otra parte, la ecuación:

$$[\mu]^T \cdot [m] \cdot [\mu] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & M & \\ & & \backslash \end{bmatrix}$$

postmultiplicando por $[\mu]^{-1}$ queda:

$$[\mu]^T \cdot [m] \cdot [\mu][\mu]^{-1} = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & M & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \cdot [\mu]^{-1}$$

$$[\mu]^T \cdot [m] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & M & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \cdot [\mu]^{-1}$$

premultiplicando por $\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & M & \\ & & \backslash \end{bmatrix}^{-1}$ queda:

$$\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & M & \\ & & \backslash \end{bmatrix}^{-1} \cdot [\mu]^T \cdot [m] = [\mu]^{-1} \quad [2]$$

Sustituyendo [2] en [1], queda:

$$[x_p] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & M & \\ & & \backslash \end{bmatrix}^{-1} \cdot [\mu]^T \cdot [m] \cdot [x] \quad [3]$$

expresión que relaciona las coordenadas principales x_p con las ordinarias x , en otra forma.

Par eliminar el primer modo, puede hacerse x_{p1} en la ecuación [3] igual a cero:

(Recuérdese que en coordenadas principales el sistema de ecuaciones diferenciales está formado por n ecuaciones diferenciales independientes, correspondiendo la primera al primer modo)

Si la matriz $[m]$ fuese diagonal, la expresión [3] podría ponerse en forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ \dots \\ x_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & M_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} & \dots & \mu_{n1} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \dots & \mu_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{1n} & \mu_{2n} & \dots & \mu_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Operando y llamando M_{ii}^{-1} a los elementos de la matriz

diagonal $\begin{bmatrix} \diagdown \\ M \\ \diagup \end{bmatrix}^{-1}$ tendremos:

$$\begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ \dots \\ x_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^{-1} \cdot \mu_{11} \cdot m_{11} & M_{11}^{-1} \cdot \mu_{21} \cdot m_{22} & \dots & M_{11}^{-1} \cdot \mu_{n1} \cdot m_{nn} \\ M_{22}^{-1} \cdot \mu_{12} \cdot m_{11} & M_{22}^{-1} \cdot \mu_{22} \cdot m_{22} & \dots & M_{22}^{-1} \cdot \mu_{n2} \cdot m_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{nn}^{-1} \cdot \mu_{1n} \cdot m_{11} & M_{nn}^{-1} \cdot \mu_{2n} \cdot m_{22} & \dots & M_{nn}^{-1} \cdot \mu_{nn} \cdot m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

De donde resulta:

$$x_{p1} = M_{11}^{-1} \cdot (\mu_{11} \cdot m_{11} \cdot x_1 + \mu_{21} \cdot m_{22} \cdot x_2 + \dots + \mu_{n1} \cdot m_{nn} \cdot x_n)$$

Igualando a cero, y teniendo en cuenta la proporcionalidad entre los vectores modales y las amplitudes correspondientes a cada modo, queda:

$$m_{11} \cdot X_{11} \cdot x_1 + m_{22} \cdot X_{21} \cdot x_2 + m_{33} \cdot X_{31} \cdot x_3 + \dots + m_{nn} \cdot X_{n1} \cdot x_n = 0$$

Despejando, por ejemplo, x_1 en función de x_2 , x_3 , etc, se tendrá

$$x_1 = - \frac{m_{22} \cdot X_{21}}{m_{11} \cdot X_{11}} \cdot x_2 - \frac{m_{33} \cdot X_{31}}{m_{11} \cdot X_{11}} \cdot x_3 \dots - \frac{m_{nn} \cdot X_{n1}}{m_{11} \cdot X_{11}} \cdot x_n$$

ecuación que garantiza la correspondencia lineal de x_1 con todas las demás variables x_2 , x_3 ... x_n .

La expresión anterior puede ser expresada en forma matricial (introduciendo las identidades $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$... $x_n = x_n$) de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

siendo x_1' un desplazamiento ficticio (que siempre queda multiplicado por cero, y que se escribe solo por darle forma a la ecuación) y

$$c_{12} = - \frac{m_{22} \cdot X_{21}}{m_{11} \cdot X_{11}}; \quad c_{13} = - \frac{m_{33} \cdot X_{31}}{m_{11} \cdot X_{11}}; \quad \dots \quad c_{1n} = - \frac{m_{nn} \cdot X_{n1}}{m_{11} \cdot X_{11}}$$

La matriz:

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Se le llama "matriz de barrido".

Si en cada ciclo de iteración se premultiplica el vector de ensayo por $[S_1]$ se asegura la desaparición del primer modo, y la iteración converge al segundo modo.

Una vez hallado el segundo modo, pueden ser eliminados el primero y el segundo para que w_3 sea el fundamental y puede ser calculado.

Para ello se hará:

$$x_{p1} = 0 = m_{11} \cdot X_{11} \cdot x_1 + m_{22} \cdot X_{21} \cdot x_2 + m_{33} \cdot X_{31} \cdot x_3 + \dots + m_{nn} \cdot X_{n1} \cdot x_n$$

$$x_{p2} = 0 = m_{11} \cdot X_{12} \cdot x_1 + m_{22} \cdot X_{22} \cdot x_2 + m_{33} \cdot X_{32} \cdot x_3 + \dots + m_{nn} \cdot X_{n2} \cdot x_n$$

Calculando x_2 en función de x_3, x_4, \dots, x_n tendremos, de la primera ecuación (reduciéndola por comodidad a sólo tres términos)

$$x_1 = - \frac{m_{22} \cdot X_{21}}{m_{11} \cdot X_{11}} \cdot x_2 - \frac{m_{33} \cdot X_{31}}{m_{11} \cdot X_{11}} \cdot x_3$$

sustituyendo en la segunda:

$$- \frac{X_{12} \cdot m_{11} \cdot X_{21} \cdot m_{22}}{X_{11} \cdot m_{11}} \cdot x_2 - \frac{X_{12} \cdot m_{11} \cdot X_{31} \cdot m_{33}}{X_{11} \cdot m_{11}} \cdot x_3 +$$

$$+ X_{22} \cdot m_{22} \cdot x_2 + X_{32} \cdot m_{33} \cdot x_3 = 0$$

$$x_2 \cdot \left[- \frac{X_{12} \cdot m_{11} \cdot X_{21} \cdot m_{22}}{X_{11} \cdot m_{11}} + X_{22} \cdot m_{22} \right] +$$

$$+ x_3 \cdot \left[- \frac{X_{12} \cdot m_{11} \cdot X_{31} \cdot m_{33}}{X_{11} \cdot m_{11}} + X_{32} \cdot m_{33} \right] = 0$$

$$x_2 = -x_3 \frac{(-x_{12} \cdot m_{11} \cdot x_{31} \cdot m_{33} + x_{11} \cdot m_{11} \cdot x_{32} \cdot m_{33})}{(-x_{12} \cdot m_{11} \cdot x_{21} \cdot m_{22} + x_{11} \cdot m_{11} \cdot x_{22} \cdot m_{22})}$$

$$x_2 = -\frac{m_{33}}{m_{22}} \cdot \frac{(x_{11} \cdot x_{32} - x_{12} \cdot x_{31})}{(x_{11} \cdot x_{22} - x_{12} \cdot x_{21})} \cdot x_3$$

Generalizando, llegaríamos a obtener:

$$x_2 = -\frac{m_{33}}{m_{22}} \cdot \frac{(x_{11} \cdot x_{32} - x_{12} \cdot x_{31})}{(x_{11} \cdot x_{22} - x_{12} \cdot x_{21})} \cdot x_3 -$$

$$-\frac{m_{44}}{m_{22}} \cdot \frac{(x_{11} \cdot x_{42} - x_{12} \cdot x_{41})}{(x_{11} \cdot x_{22} - x_{12} \cdot x_{21})} \cdot x_4 - \dots$$

$$\dots - \frac{m_{nn}}{m_{22}} \cdot \frac{(x_{11} \cdot x_{n2} - x_{12} \cdot x_{n1})}{(x_{11} \cdot x_{22} - x_{12} \cdot x_{21})} \cdot x_n$$

que en forma matricial puede escribirse (teniendo en cuenta las identidades $x_4 = x_4$; $x_5 = x_5$; \dots $x_n = x_n$)

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{23} & \dots & d_{n3} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

siendo x_1' y x_2' desplazamientos ficticios (siempre multiplicados por cero)

$$d_{23} = - \frac{m_{33} \cdot (X_{11} \cdot X_{32} - X_{12} \cdot X_{31})}{m_{22} \cdot (X_{11} \cdot X_{22} - X_{12} \cdot X_{21})}$$

.....

$$d_{n3} = - \frac{m_{nn} \cdot (X_{11} \cdot X_{n2} - X_{12} \cdot X_{n1})}{m_{22} \cdot (X_{11} \cdot X_{22} - X_{12} \cdot X_{21})}$$

siendo $[S_2]$ la nueva matriz de barrido.

NOTA: El método estudiado se denomina "iteración matricial inversa", y como vemos conduce al cálculo del valor fundamental más bajo.

Si en la ecuación:

$$[K] \cdot [X] = \omega^2 \cdot [m] \cdot [X]$$

se premultiplica por $[m]^{-1}$, se obtiene:

$$[m]^{-1} \cdot [k] \cdot [X] = \omega^2 \cdot [X]$$

siendo $[M]^{-1} \cdot [k] = [A]$ la nueva matriz dinámica.

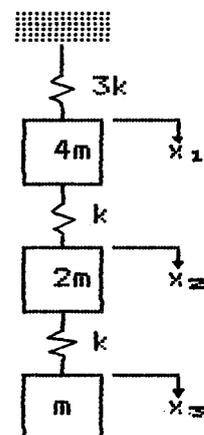
Procediendo como antes, el método de iteración converge hacia el modo ω_1 más alto.

Por esto se conoce como "iteración matricial directa"

EJEMPLO:

En el sistema de la figura, el sistema de ecuaciones algebraicas que lo definen viene dado por:

$$\frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad [1]$$



Supongamos $[\bar{X}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, en forma arbitraria.

Sustituyendo en [1] obtendríamos la primera iteración:

$$\frac{1}{w^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 36 \\ 48 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración (ya está normalizado) $[\bar{X}]^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{w^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 14,0 \\ 44,0 \\ 56,0 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot 14 \cdot \begin{bmatrix} 1,0 \\ 3,2 \\ 4,0 \end{bmatrix}$$

Tercera iteración (y normalización posterior no necesaria en este caso)

$$[\bar{X}]^3 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 3,2 \\ 4,0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{w^2} \cdot \begin{bmatrix} 1,0 \\ 3,2 \\ 4,0 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,0 \\ 3,2 \\ 4,0 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 14,4 \\ 45,6 \\ 57,6 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot 14,4 \cdot \begin{bmatrix} 1,00 \\ 3,18 \\ 4,00 \end{bmatrix}$$

Como los valores a ambos lados de la igualdad son muy parecidos, podemos tomarlo como un autovector.

La frecuencia correspondiente w (que sabemos es la más baja) se obtendrá:

$$\frac{1}{w_1^2} \cdot 1 = \frac{m}{3k} \cdot 14,4 \cdot 1 \implies w_1 = 0,46 \cdot \text{JK/m} \cdot (\text{rd/s})$$

-Para obtener el segundo modo principal construiremos la matriz de barrido siendo:

$$c_{12} = - \frac{m_{22} \cdot X_{21}}{m_{11} \cdot X_{11}} \quad c_{13} = - \frac{m_{33} \cdot X_{31}}{m_{11} \cdot X_{11}}$$

que en este caso vale:

$$c_{12} = - \frac{2m \cdot 3,2}{4m \cdot 1} = -1,6 \quad c_{13} = - \frac{m \cdot 4}{4m \cdot 1} = -1$$

Con lo cual tendremos:

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1,6 & -1,0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando la ecuación del primer modo por esta matriz, la iteración convergerá al segundo modo.

$$\frac{1}{w^2} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1,6 & -1,0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{w^2} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -4,4 & -3,0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 1,6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Primera iteración:

$$[\bar{X}]^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -4,4 & -3,0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 1,6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ es el autovector correspondiente al modo ω_2 .

Este se calcula de:

$$\frac{1}{\omega_2^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{m}{k} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \omega_2 = \sqrt{k/m} \text{ rd/s}$$

-Para obtener el tercero y último modo podemos calcular la matriz de barrido:

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,78 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ya que:

$$d_{23} = - \frac{m_{33}}{m_{22}} \cdot \frac{(X_{31} \cdot X_{11} - X_{32} \cdot X_{11})}{(X_{31} \cdot X_{11} - X_{32} \cdot X_{11})} =$$

$$= - \frac{m}{2m} \cdot \frac{4 \cdot 1 - (-1) \cdot 1}{3,18 \cdot 1 - 0} = -0,78$$

Multiplicando la ecuación del segundo modo:

$$\frac{1}{\omega_2^2} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -4,4 & -3,0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 1,6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,78 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega^2} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,432 \\ 0 & 0 & -1,248 \\ 0 & 0 & 2,257 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Procediendo a continuación a efectuar las sucesivas iteraciones.

3.-METODO DE HOLZER

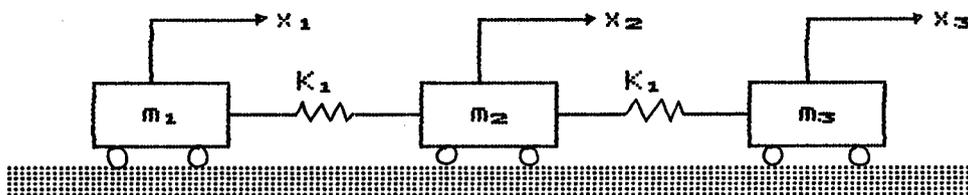
-Es un método que permite calcular las frecuencias naturales y modos propios de sistemas de n GDL, en vibración libre o forzada, con amortiguamiento o sin él.

El método se basa en suponer una serie de frecuencias de ensayo hasta conseguir aquellas que satisfacen las restricciones del problema, que serán las frecuencias naturales. Paralelamente, también se calculan los modos normales.

El método de Holzer, se desarrolló para sistemas de torsión, aunque puede emplearse para sistemas masa-resorte y otros.

Aplicación a sistemas masa-resorte

Supongamos el sistema de la figura para el cual deseamos hallar las frecuencias naturales.



El método de cálculo se inicia suponiendo un valor cualquiera w para una de las tres frecuencias propias. Si ahora a la masa m_1 le damos un desplazamiento $x_1 = 1$, y si además suponemos que el movimiento de cada masa es armónico

$$x_1 = X_1 \cdot \text{Sen } wt$$

la aceleración será

$$\ddot{x}_1 = -w^2 \cdot X_1 \cdot \text{Sen } wt$$

con lo cual la fuerza de inercia sobre la masa será

$$F_1 = -m_1 \cdot \ddot{x}_1 = m_1 \cdot \omega^2 \cdot x_1$$

Esta fuerza actúa sobre el resorte K_1 , deformándolo, de manera que la ecuación de equilibrio de la masa m_1 puede escribirse:

$$K_1 \cdot (x_1 - x_2) = m_1 \cdot \omega^2 \cdot x_1$$

de donde

$$x_1 - x_2 = \frac{m_1 \cdot \omega^2 \cdot x_1}{K_1}$$

Con lo cual aparece un desplazamiento de m_2 dado por:

$$x_2 = x_1 - \frac{m_1 \cdot \omega^2 \cdot x_1}{K_1}$$

Tal movimiento de m_2 produce una fuerza de inercia de valor

$$m_2 \cdot \omega^2 \cdot x_2$$

La suma de las dos fuerzas inerciales actúa sobre el resorte K_2 , deformándolo de tal manera que:

$$\frac{m_1 \cdot \omega^2 \cdot x_1 + m_2 \cdot \omega^2 \cdot x_2}{K_2} = x_2 - x_3$$

Con lo cual puede calcularse

$$x_3 = x_2 - \frac{m_1 \cdot \omega^2 \cdot x_1 + m_2 \cdot \omega^2 \cdot x_2}{K_2}$$

Naturalmente, para $x_1 = 1$, las expresiones resultantes para el movimiento de cada masa serían:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 - \frac{m_1 \cdot w^2}{K_1} \\ x_3 &= 1 - \frac{m_1 \cdot w^2}{K_1} - \frac{m_1 \cdot w^2 + m_2 \cdot w^2 \cdot x_2}{K_2} \end{aligned} \quad [1]$$

y la suma de las fuerzas de inercia sería

$$\Sigma F_i = w^2 \cdot (m_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3)$$

Como en el sistema que nos ocupa no actúa ninguna fuerza exterior, la w supuesta coincidirá con una de las frecuencias naturales cuando

$$\Sigma F_i = 0$$

Se trata, por consiguiente, de ir ensayando valores de w hasta que se encuentren los tres (las tres frecuencias propias de este sistema de 3 GDL) que hagan

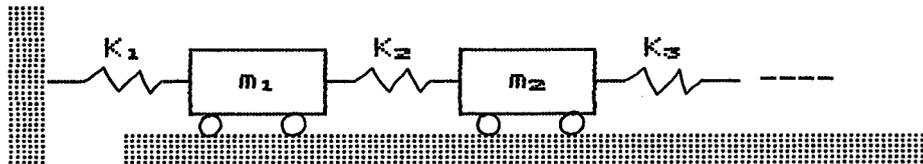
$$w^2 \cdot (m_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3) = 0$$

En estas condiciones, las ecuaciones [1] definirán los modos naturales (formas normalizadas a $x_1 = 1$)

NOTA: Las expresiones [1] pueden resumirse y extenderse a sistemas de n GDL, con los extremos libres como los del ejemplo, en la forma

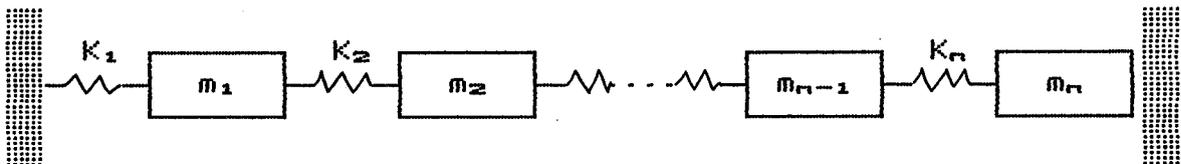
$$x_i = x_{i-1} - \left[\frac{w^2}{K_{i-1}} \right] \cdot \sum_{j=1}^{i-1} m_j x_j$$

En sistemas con un extremo fijo y otro libre, la expresión resultante sería la misma



$$x_i = x_{i-1} - \left[\frac{w^2}{K_{i-1}} \right] \cdot \sum_{j=1}^{i-1} m_j x_j$$

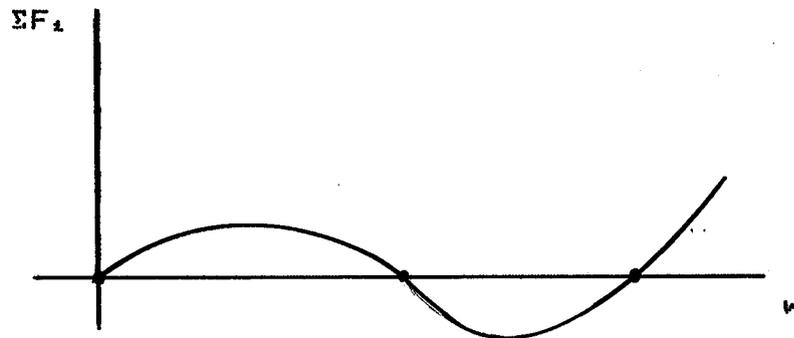
En sistemas con ambos extremos fijos, la expresión resultante sería



$$x_i = x_{i-1} - \frac{1}{K_i} \cdot \left[K_1 \cdot x_1 - w^2 \cdot \sum_{j=1}^{i-1} m_j x_j \right]$$

En el último caso, las condiciones de contorno que han de cumplirse si w es una frecuencia natural es que $x_n = 0$.

-Tal como se ha dicho, los distintos valores de w ensayados conducirán a una suma de fuerzas de inercia sobre la última masa, no nula (salvo en el caso de que w coincida con una de las frecuencias naturales) Por consiguiente, podemos llevar el valor de estas fuerzas a una gráfica, en la forma que se observa en la figura



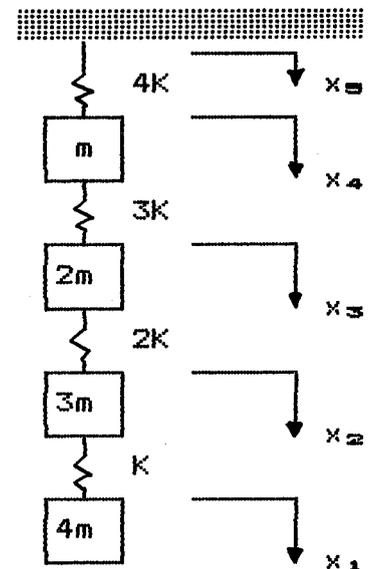
Evidentemente, los puntos en que esta curva corta el eje de abscisas coinciden con las frecuencias propias del sistema.

EJEMPLO: Vamos a calcular las frecuencias propias y los modos naturales del sistema de la figura, en el que:

$$k = 1 \text{ kg/m} ; \quad m = 1 \text{ kg}$$

Para comodidad se tabula como se ve a continuación:

-La primera columna indica la posición de la masa.



(Como este sistema tiene un extremo fijo, se le asigna la coordenada x_5 , que sabemos ha de ser cero)

-En la segunda columna se expresa el valor de cada masa.

-En la tercera columna se coloca el producto de $m \cdot \omega^2$ (para cada frecuencia de ensayo).

-En la cuarta columna figuran los desplazamientos que

se obtienen restando del desplazamiento de la fila anterior el desplazamiento total indicado en el extremo de esa misma fila anterior.

-En la columna cinco se coloca el producto $m_1 \cdot w^2 \cdot x_1$, o sea, la fuerza de inercia (producto de la columna tres por la cuatro)

-La suma de las fuerzas de inercia sobre cada masa $\sum_{i=1}^1 m_i \cdot w^2 \cdot x_i$ se coloca en la columna seis (es igual a la suma de la fuerza de inercia de la fila anterior más la fuerza de inercia en la misma fila)

-En la columna siete se colocan las rigideces.

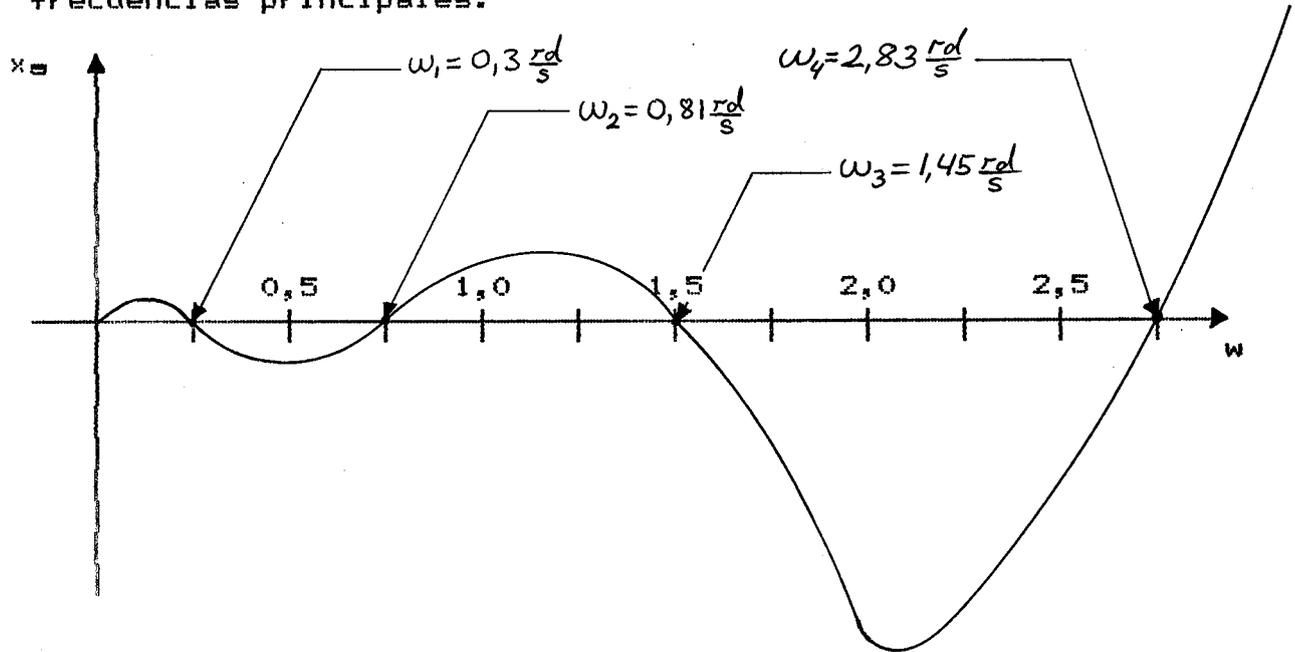
Se inicia el procedimiento haciendo $x_1 = 1$, y tanteando con varias w sucesivas (hasta conseguir $x_6 = 0$)

$\frac{I^2}{d^4} \cdot m$	ESTACION	m	$m \cdot w^2$	x	$m \cdot w^2 \cdot x$	$\Sigma m \cdot w^2 \cdot x$	K	$\Sigma m \cdot w^2 \cdot x / K$
$\omega = 0,2$	1	4	0,16	1	0,16	0,16	1	0,16
	2	3	0,12	0,84	0,101	0,271	2	0,13
	3	2	0,08	0,71	0,056	0,317	3	0,105
	4	1	0,04	0,605	0,025	0,342	4	0,0855
	5	∞	∞	0,5195				
$\omega = 0,3$	1	4	0,36	1	0,36	0,36	1	0,36
	2	3	0,27	0,64	0,173	0,533	2	0,267
	3	2	0,18	0,373	0,067	0,600	3	0,200
	4	1	0,09	0,173	0,0155	0,6155	4	0,1539
	5	∞	∞	0,0192				
$\omega = 0,4$	1	4	0,64	1	0,64	0,64	1	0,64
	2	3	0,48	0,36	0,173	0,813	2	0,406
	3	2	0,32	-0,046	-0,0147	0,798	3	0,266
	4	1	0,16	-0,312	-0,049	0,748	4	0,187
	5	∞	∞	-0,499				
$\omega = 0,6$	1	4	1,44	1	1,44	1,44	1	1,44
	2	3	1,08	-0,44	-0,475	0,965	2	0,482
	3	2	0,72	-0,922	-0,664	0,301	3	0,100
	4	1	0,36	-1,023	-0,368	-0,067	4	-0,017
	5	∞	∞	-1,006				
$\omega = 0,8$	1	4	2,56	1	2,56	2,56	1	2,56
	2	3	1,92	-1,56	-3,00	-0,44	2	-0,22
	3	2	1,28	-1,34	-1,72	-2,16	3	-0,73
	4	1	0,64	-0,61	-0,39	-2,55	4	-0,64
	5	∞	∞	0,03				

$\frac{w}{r_d} =$	ESTACION	m	$m \cdot w^2$	x	$m \cdot w^2 \cdot x$	$\Sigma m \cdot w^2 \cdot x$	K	$\Sigma m \cdot w^2 \cdot x / K$
$\omega = 1,0$	1	4	4	1	4	4	1	4
	2	3	3	-3	-9	-5	2	-22,5
	3	2	2	-0,5	-1	-6	3	-2,0
	4	1	1	1,5	1,5	-4,5	4	-1,13
	5	∞	∞	2,63				
$\omega = 1,5$	1	4	9	1	9	9	1	9
	2	3	6,75	-8	-54	-45	2	-22,5
	3	2	4,5	14,5	65,3	20,3	3	6,77
	4	1	2,25	7,73	17,4	37,7	4	9,43
	5	∞	∞	-1,70				
$\omega = 1,8$	1	4	12,96	1	12,96	12,96	1	12,96
	2	3	9,72	-11,96	-116,4	-103,44	2	-51,72
	3	2	6,48	39,76	257,7	154,26	3	51,42
	4	1	3,24	-11,66	-37,8	116,46	4	29,12
	5	∞	∞	-40,78				
$\omega = 2,0$	1	4	16	1	16	16	1	16
	2	3	12	-15	-180	-164	2	-82
	3	2	8	67	536	372	3	124
	4	1	4	-57	-228	144	4	36
	5	∞	∞	-93				
$\omega = 2,5$	1	4	25	1	25	25	1	25
	2	3	18,75	-24	-450	-450	2	-212,5
	3	2	12,5	188,5	2360	1935	3	645
	4	1	6,25	-456,5	-286	-925	4	-231
	5	∞	∞	-225,5				

$\frac{w}{\Gamma d}$	ESTACION	m	$m \cdot w^2$	x	$m \cdot w^2 \cdot x$	$\Sigma m \cdot w^2 \cdot x$	K	$\Sigma m \cdot w^2 \cdot x / K$
$\omega = 3,0$	1	4	36	1	36	36	1	36
	2	3	27	-35	-945	-909	2	-455
	3	2	18	420	7560	6651	3	2220
	4	1	9	-1800	-16200	-9550	4	-455
	5	0	0	588				

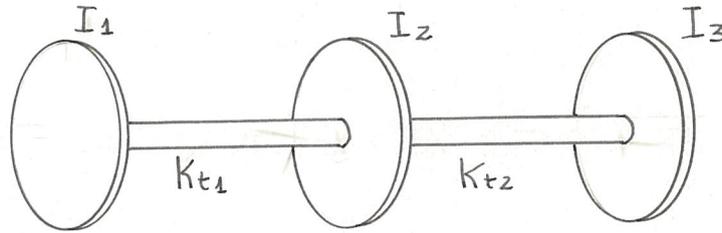
Con todos los datos anteriores puede trazarse la curva de x_6 frente a w , de lo cual se obtienen los valores de las frecuencias principales.



Con estos valores de w_1 , w_2 , w_3 y w_4 pueden hallarse los valores de x_1 , x_2 , x_3 y x_4 , que serán las formas modales.

Aplicación a sistemas de torsión

Supongamos, para simplificar, el sistema semidefinido de la figura:



- I_1 , I_2 e I_3 son los momentos de inercia respecto del eje de giro.

- K_{t1} y K_{t2} son las ctes. del resorte de torsión medidas en N·m/rd

-Aplicando a cada disco la 2ª Ley de Newton, tendremos las ecuaciones:

$$I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 = -K_{t1} \cdot (\theta_1 - \theta_2)$$

$$I_2 \cdot \ddot{\theta}_2 = -K_{t1} \cdot (\theta_2 - \theta_1) - K_{t2} \cdot (\theta_2 - \theta_3) \quad [1]$$

$$I_3 \cdot \ddot{\theta}_3 = -K_{t2} \cdot (\theta_3 - \theta_2)$$

NOTA: Dado que el sistema no está fijo en ninguno de sus extremos, la suma de las ecuaciones anteriores ha de ser cero, o en otras palabras, en una vibración libre la suma de los momentos debidos a la inercia es cero. En efecto, sumando queda

$$I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + I_2 \cdot \ddot{\theta}_2 + I_3 \cdot \ddot{\theta}_3 = 0$$

Si el movimiento de las masas es de tipo armónico (lo cual será cierto cuando las masas vibren en uno de sus modos principales), en la forma:

$$\theta_1 = \Theta_1 \cdot \text{Sen } \omega t$$

quedará, al sustituir en [1]

$$-w^2 \cdot I_1 \cdot \Theta_1 = -K_{t1} \cdot (\Theta_1 - \Theta_2)$$

$$-w^2 \cdot I_2 \cdot \Theta_2 = -K_{t1} \cdot (\Theta_2 - \Theta_1) - K_{t2} \cdot (\Theta_2 - \Theta_3)$$

$$-w^2 \cdot I_3 \cdot \Theta_3 = -K_{t2} \cdot (\Theta_3 - \Theta_2)$$

cuya suma vale también cero:

$$\sum_{i=1}^3 w^2 I_i \Theta_i = 0 \quad [2]$$

Al igual que para el sistema masa-resorte se parte de una frecuencia de ensayo w_1 y se hace $\Theta_1 = 1$, en forma arbitraria.

A partir de ahí se calculan Θ_2 y Θ_3

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= 1 \\ \Theta_2 &= \Theta_1 - \frac{w^2 \cdot I_1 \cdot \Theta_1}{K_{t1}} \\ \Theta_3 &= \Theta_2 - \frac{w^2}{K_{t2}} (I_1 \cdot \Theta_1 + I_2 \cdot \Theta_2) \end{aligned} \quad [3]$$

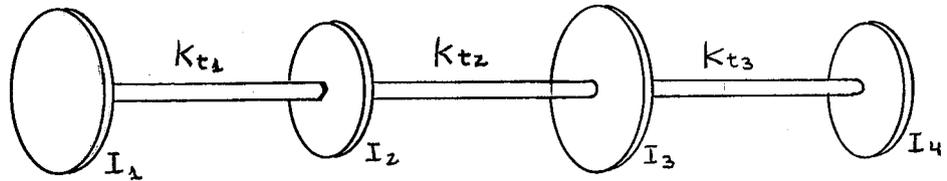
Los valores hallados Θ_1 , Θ_2 y Θ_3 en las ecuaciones [3] se sustituyen en la ecuación [2], para ver si se satisface.

Si ello es así, la frecuencia w supuesta es una de las frecuencias propias.

-Generalizando para sistemas de torsión de n GDL, las ecuaciones para aplicar el método de Holzer en sistemas con extremos libres serán:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w^2 I_i \Theta_i &= 0 \\ \Theta_j &= \Theta_{j-1} - \frac{w^2}{K_{t(j-1)}} \cdot \sum_{i=1}^{j-1} I_i \cdot \Theta_i \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

EJEMPLO: Calcular las frecuencias naturales y modos del sistema de la figura:



$$\begin{array}{ll}
 I_1 = 0,4 \text{ m}^2 \cdot \text{kg} & K_{t1} = 10 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{rd}} \\
 I_2 = 0,1 \text{ "} & K_{t2} = 20 \text{ "} \\
 I_3 = 0,4 \text{ "} & K_{t3} = 10 \text{ "} \\
 I_4 = 0,4
 \end{array}$$

Se puede partir de una frecuencia w arbitraria. Pero si estuviera muy alejada de la fundamental, necesitaríamos muchas interacciones.

Por ello, suele ser recomendable en estos sistemas suponer otro equivalente, consistente en dos masas $I_{1E} = I_1 + I_2$ e $I_{2E} = I_3 + I_4$, conectadas por un eje de rigidez (conexión serie)

$$K_{te} = \frac{1}{1/K_{T1} + 1/K_{T2} + 1/K_{T3}}$$

Las frecuencias propias de este sistema semidefinido de 2 GDL son fáciles de calcular

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = \sqrt{K_{te} + \frac{I_{1E} + I_{2E}}{I_{1E} \cdot I_{2E}}} = 173 \text{ rd/s}$$

Partiendo de $\Theta_1 = 1$ y $w = 173$ rd/s, se hallan Θ_2 , Θ_3 y Θ_4 , así como $\sum_{i=1}^4 I_i \Theta_i w^2$.

Se observa que esta última expresión (sumatorio) vale $-0,92$ kN·m, es decir no se anula, por lo cual $w = 173$ rd/s no es una frecuencia propia. Además, el signo negativo del sumatorio indica que la frecuencia de ensayo no es demasiado alta para constituir el primer modo.

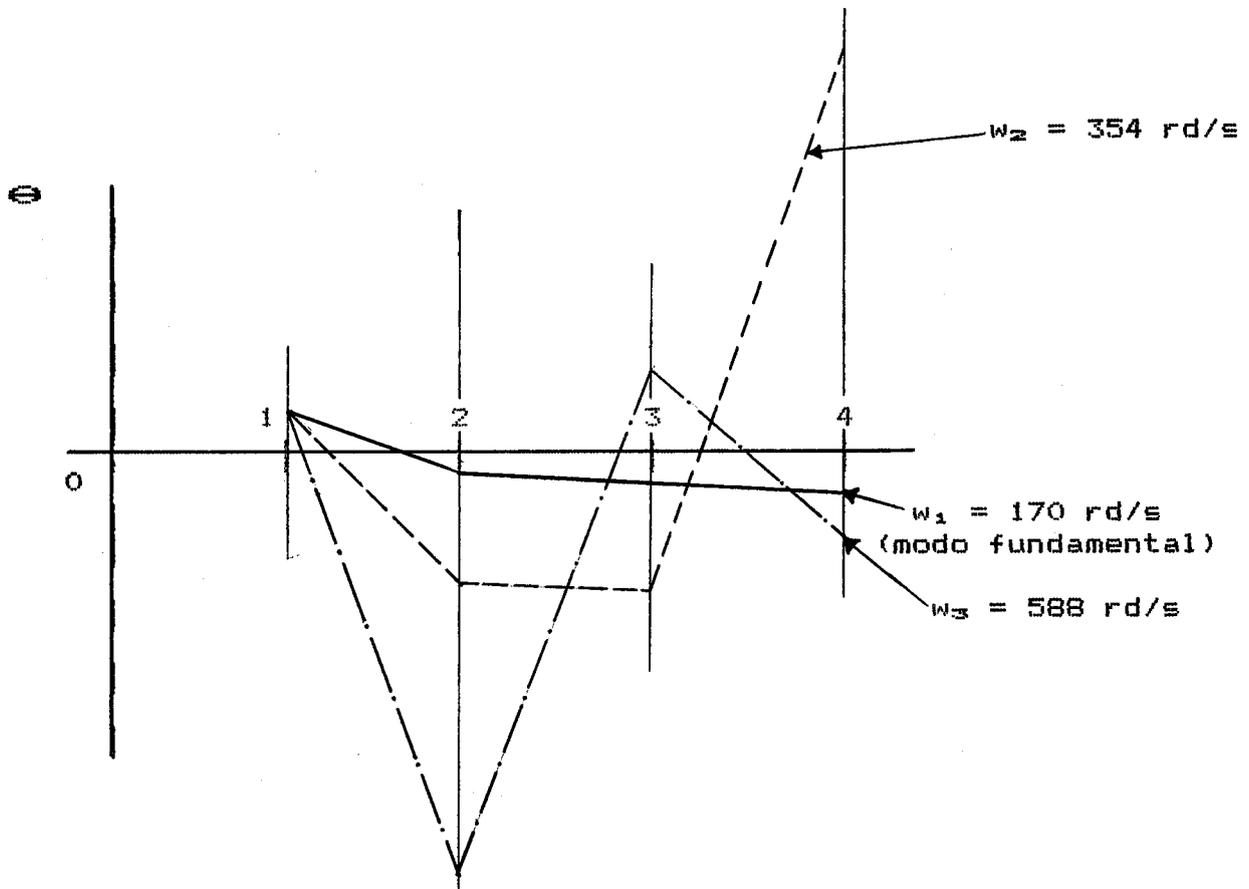
En consecuencia, se ensaya con $w = 165$ rd/s que conduce a un sumatorio de valor $1,3$ kN·m, que tampoco es nulo, pero ahora positivo.

Una interpolación lineal entre estas dos frecuencias de ensayo da $w = 170$ rd/s que será la tercera frecuencia de ensayo y que da un par residual (sumatorio) bastante bajo, por lo que puede considerarse, con bastante aproximación, como una frecuencia natural.

Para esta frecuencia, los valores de $\Theta_1 = 1$;

$\Theta_2 = -0,197$; $\Theta_3 = -0,766$ y $\Theta_4 = -1,043$ indican la primera forma modal.

w rd/s	I $m^2 kg$	Θ rd	w^2 $(rd)^2$	$I\Theta w^2$ kN·m	$\Sigma I\Theta w^2$ kN·m	K_e kN·m rd	$1/K_e \Sigma I\Theta w^2$ rd	
173	0,4	1,000		11,97	11,97	10	1,197	1
	0,1	-0,197		-0,59	11,38	20	0,569	2
	0,4	-0,766		-9,17	2,21	10	0,218	3
	0,01	-1,043		-3,12	-0,92			4
165	0,4	1,000		10,89	10,89	10	1,089	1
	0,1	-0,029		-0,24	10,65	20	0,532	2
	0,4	-0,621		-6,77	3,38	10	0,388	3
	0,1	-1,009		-2,74	1,13			4
170	0,4	1,000		11,56	11,56	10	1,156	1
	0,1	-0,156		-0,45	11,11	20	0,555	2
	0,4	-0,711		-8,22	2,88	10	0,288	3
	0,1	-1,000		-2,89	-0,01			4
354	0,4	1,000		50,1	50,1	10	5,01	1
	0,1	-4,01		-50,3	-0,2	20	-0,01	2
	0,4	-4,00		-200,7	-200,9	10	-20,09	3
	0,1	16,09		201,6	-0,6			4
588	0,4	1,00		138,3	138,3	10	13,83	1
	0,1	-12,23		-443,6	-305,3	20	-15,26	2
	0,4	2,43		336,7	31,4	10	3,14	3
	0,1	-0,70		-24,4	7,0			4



Observese que el modo fundamental no presenta nodos (intersecciones con el eje, o sea, amplitud de vibración nula), mientras que el segundo modo presenta un nodo y el tercer modo, dos nodos.

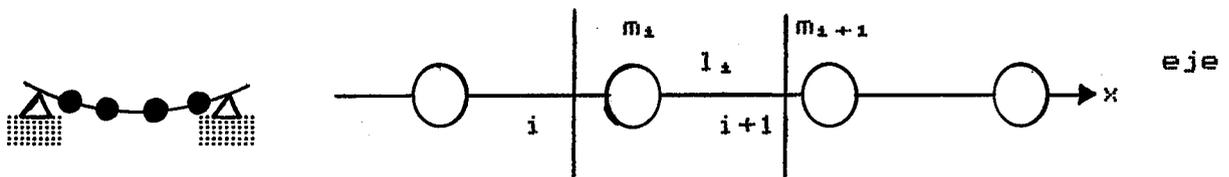
4.-METODO DE MYKLESTAD

Este es un método similar al Holzer, pero que se aplica a sistemas de masas concentradas conectadas por elementos de viga sin masa, y que calcula en forma progresiva, la flecha, pendiente, momento y cortante, de una sección respecto de la sección inmediata.

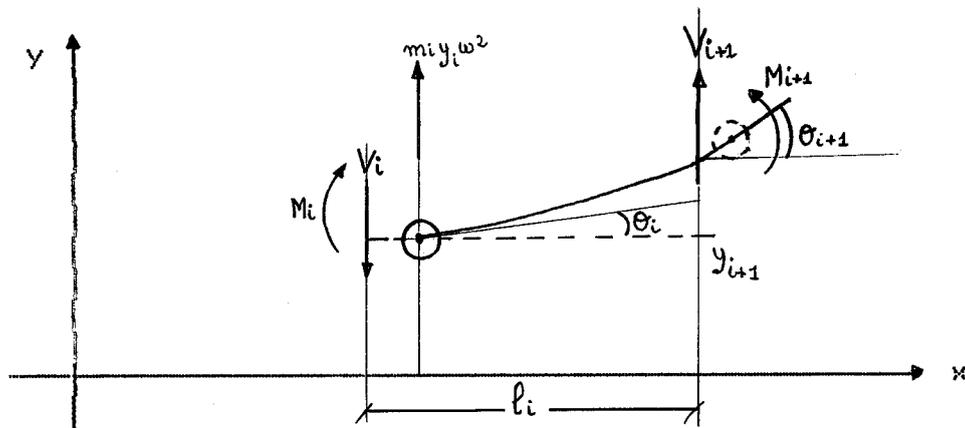
Igual que en el método de Holzer, la frecuencia de vibración supuesta será una de las fundamentales si se satisfacen las condiciones de borde.

Aplicación a Sistemas sometidos a vibraciones de flexión:

Sea el sistema de la figura, en el que se han representado dos cualesquiera de sus m masas concentradas m_i y m_{i+1} , unidas por el tramo de viga l_i , de sección uniforme



Consideremos el cuerpo libre comprendido entre las secciones i e $i+1$ (que engloban la masa m_i y el tramo equivalente a l_i), y supongamos que, por efecto de la vibración, se deforma como se ve en la figura (pag. sigt.).



Como se ve, los tramos contiguos a la sección han sido sustituidos por las correspondientes acciones de cortante y momento.

Además se ha supuesto que las masas vibran con movimiento armónico, de manera que la fuerza de inercia puede representarse por $m_i \cdot y_i \cdot \omega^2$

-Aplicando al tramo aislado las ecuaciones generales de la estática, tendremos:

$$V_{i+1} = V_i - m_i \cdot y_i \cdot \omega^2 \quad [11]$$

$$M_{i+1} = M_i - V_{i+1} \cdot l_i \quad (M_i = M_{i+1} + V_{i+1} \cdot l_i) \quad [12]$$

-En deflexión de vigas, y por consideraciones geométricas, podemos escribir:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + M_{i+1} \cdot \left[\frac{1}{EI} \right]_i + V_{i+1} \cdot \left[\frac{l^2}{2EI} \right]_i \quad [13]$$

$$y_{i+1} = y_i + \theta_i \cdot l_i + M_{i+1} \cdot \left[\frac{l^2}{2EI} \right]_i + V_{i+1} \cdot \left[\frac{l^3}{3EI} \right]_i \quad [14]$$

siendo:

$$\left[\frac{1}{EI} \right]_i$$

la pendiente en $i+1$ medida a partir de la tangente en i , producida por el momento unitario aplicado en $i+1$

$$\left[\frac{1^2}{2EI} \right]_i$$

la pendiente en $i+1$ medida a partir de la tangente en i , producida por la fuerza cortante unitaria en $i+1$ (que a su vez es igual a la flecha en $i+1$ producida por el momento unitario en $i+1$)

$$\left[\frac{1^3}{3EI} \right]_i$$

flecha en $i+1$ medida a partir de la tangente en i , producida por un cortante unitario en $i+1$

La aplicación de las cuatro ecuaciones anteriores, en la secuencia dada, permiten hallar todos los parámetros en $i+1$, en función de los de i

-De las cuatro condiciones de borde en cada extremo (M, V, θ, y) se conocen generalmente dos (por ejemplo, un voladizo con extremos libres en $i = 1$, tendrá $V_1 = 0$; $M_1 = 0$ Tomando en forma arbitraria $y_1 = 1$, puede determinarse θ_1)

Debido al carácter lineal del problema las cuatro cantidades en el extremo más alejado pueden escribirse:

$$V_n = a_1 + b_1 \cdot \theta_1$$

$$M_n = a_2 + b_2 \cdot \theta_1$$

$$\theta_n = a_3 + b_3 \cdot \theta_1$$

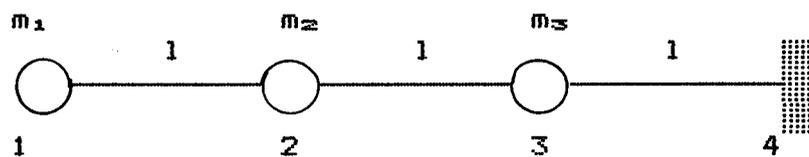
$$y_n = a_4 + b_4 \cdot \theta_1$$

[5]

en donde $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ son valores constantes y θ_1 un valor a determinar.

Para una "viga en voladizo" (mejor, un conjunto de masas puntuales y tramos de viga con tal forma) las frecuencias naturales serán aquellas que hagan $\theta_n = y_n = 0$ (siendo n el empotramiento)

EJEMPLO: Calcular con frecuencias naturales del sistema de la figura:



$$l = 0,5 \text{ m}$$

$$EI = 0,10 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$m_1 = 100 \text{ kg}$$

$$\frac{l}{EI} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{N} \cdot \text{m}}$$

$$m_2 = 150 \text{ kg}$$

$$\frac{l^2}{2EI} = 1,25 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{N}}$$

$$m_3 = 200 \text{ kg}$$

$$\frac{l^3}{3EI} = 0,4166 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

El cálculo se inicia en la estación 1, tomando como consideraciones de borde $V_1 = 0$; $M_1 = 0$ y suponiendo una frecuencia de ensayo (en este caso, $w = 10 \text{ rd/s}$).

Como las cuatro cantidades V_n , M_n , θ_n , y_n vienen en la forma $a + b \cdot \theta$, es preferible tabular en dos columnas separadas.

El cálculo de la columna de la "a" parte de $V_1 = M_1 = 0$, $\theta_1 = 0$, $y_1 = 1$

El cálculo de la columna de la "b" parte de $V_1 = M_1 = 0$, $\theta_1 = \theta$, $y_1 = 0$ (siendo $\theta_1 = \theta$ el ángulo girado al aplicar la flecha $y_1 = 1$)

En estas condiciones se tienen los resultados de la tabla:

i	V Newton		M N·m		θ rd		y m	
	a	b	a	b	a	b	a	b
1	0	0	0	0	0	θ_1	1,0	0
2	-10,000	0	5,000	0	0,0125	$1,0 \cdot \theta_1$	1,00208	$0,5 \cdot \theta_1$
3	-25,031	$-7,500 \cdot \theta_1$	17,515	$3,750 \cdot \theta_1$	0,0687	$1,00937 \cdot \theta_1$	1,0198	$1,00156 \cdot \theta_1$
4	-45,427	$-27,532 \cdot \theta_1$	40,228	$17,516 \cdot \theta_1$	0,2131	$1,0625 \cdot \theta_1$	1,0855	$1,5167 \cdot \theta_1$

El valor de θ_1 se halla haciendo $\theta_4 = 0$, es decir

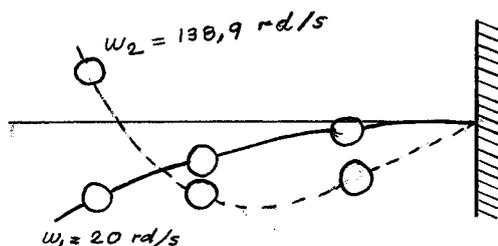
$$\theta_4 = 0,21131 + 1,0625 \theta_1 = 0 \implies \theta_1 = -0,2006117$$

La flecha y_n será:

$$y_n = 1,0855 + 1,5167 (-0,2006117) = 0,78128$$

que como se ve no es nula. Luego $w = 10$ rd/s no es una frecuencia fundamental.

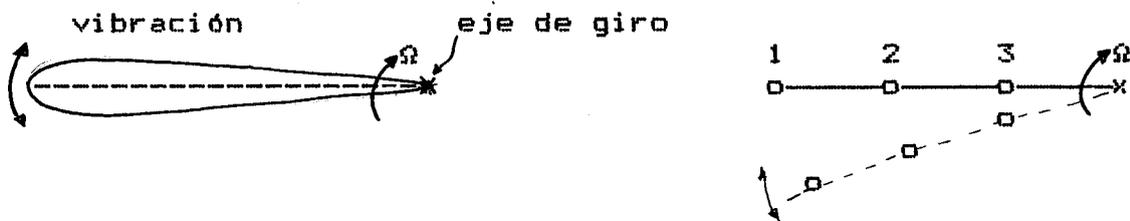
Habría que ensayar con otros valores de w . Graficando w contra y , se obtendrá una curva cuyas intersecciones con el eje de abscisas darían las frecuencias naturales w .



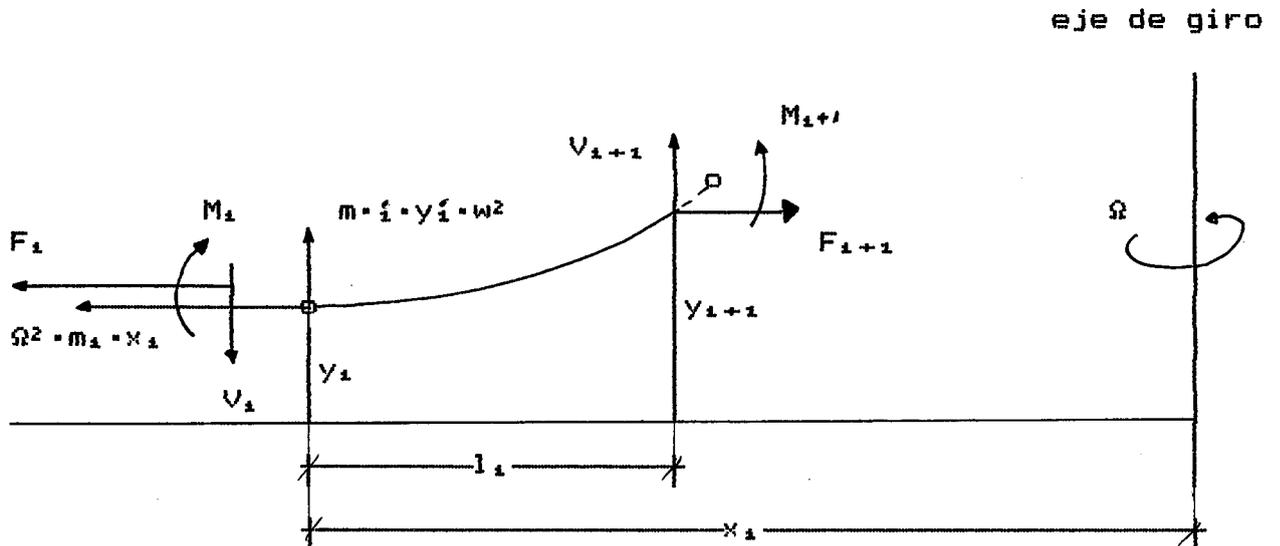
Aplicación a sistemas giratorios sometidos a vibraciones de flexión

Este es el problema típico de un alabe de turbina, helices, etc.

Estos sistemas giran alrededor de un eje, y sufren vibraciones de flexión en el plano perpendicular al eje de giro.



Las acciones actuantes en el tramo $i \div i+1$ pueden representarse como se ve en la figura.



Los tramos a la izquierda del considerado "tiraran" de éste con la fuerza de inercia (debida a Ω)

$$F_i = \Omega^2 \sum_{j=1}^{i-1} m_j x_j$$

Teniendo en cuenta que la fuerza de inercia (por la rotación Ω) sobre la masa m_i es

$$\Omega^2 \cdot m_i \cdot x_i$$

tendremos en conjunto:

$$F_{i+1} = F_i + \Omega^2 \cdot m_i \cdot x_i \quad [6]$$

El cortante será:

$$V_{i+1} = V_i - m_i \cdot y_i \cdot \omega^2 - F_{i+1} \cdot \theta \quad [7]$$

La ecuación de momentos será:

$$M_{i+1} = M_i - V_{i+1} \cdot l_i + F_{i+1} \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad [8]$$

Sustituyendo la ecuación [4] en la [8] queda:

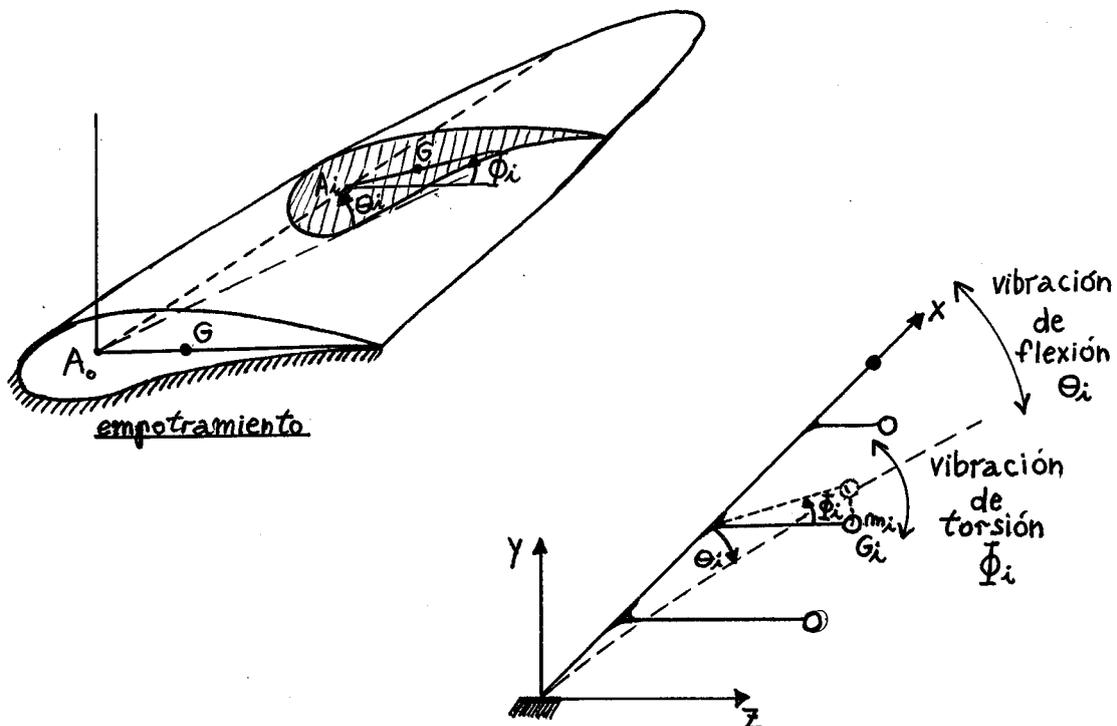
$$M_{i+1} = M_i - V_{i+1} \cdot l_i + F_{i+1} \cdot \left[\theta_i \cdot l_i + M_{i+1} \cdot \frac{l^2}{2EI} + V_{i+1} \cdot \frac{l^3}{3EI} \right]$$

$$M_{i+1} = \frac{M_i}{\left[1 - F_{i+1} \cdot \frac{l^2}{2EI} \right]} - V_{i+1} \cdot \frac{l_i - F_{i+1} \cdot \frac{l^3}{3EI}}{\left[1 - F_{i+1} \cdot \frac{l^2}{2EI} \right]} + \theta_i \cdot l_i \cdot \frac{F_{i+1}}{\left[1 - F_{i+1} \cdot \frac{l^2}{2EI} \right]} \quad [9]$$

Las ecuaciones [6],[7],[9],[3] y [4] permiten resolver el problema.

Aplicación a sistemas vibratorios sometidos a vibraciones acopladas de flexión y torsión:

Este es el caso típico de las alas de aeroplanos y otras estructuras tipo viga, en que se producen simultáneamente vibraciones de flexión y de torsión.



En este tipo de problemas se supone que la vibración de flexión se produce siempre en el plano yox , mientras que la de torsión se produce alrededor del eje ox .

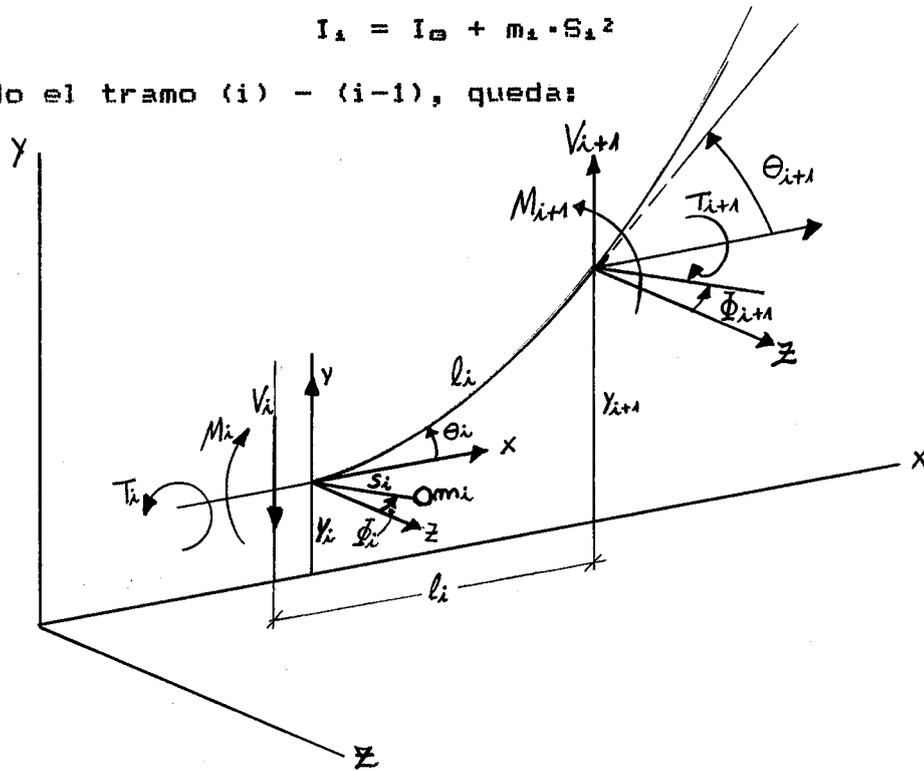
Sea S_i la distancia del centro de gravedad de cada sección al eje de giro de rotación (c. d. g. donde se supone concentrada la masa de la sección).

I_i es el momento de inercia de la sección i con respecto del eje ox .

Por Steiner:

$$I_1 = I_G + m_1 \cdot S_1^2$$

Aislando el tramo (i) - (i+1), queda:



$$V_{i+1} = V_i - m_1 \cdot w^2 \cdot (y_i + S_1 \cdot \bar{\theta}_i)$$

$$M_{i+1} = M_i - V_{i+1} \cdot l_i$$

$$T_{i+1} = T_i + I_1 \cdot w^2 \cdot \bar{\theta}_i + m_1 \cdot S_1 \cdot y_i \cdot w^2$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + V_{i+1} \cdot \left[\frac{l_i^3}{2EI} \right]_1 + M_{i+1} \cdot \left[\frac{l_i}{EI} \right]_1$$

$$y_{i+1} = y_i + \theta_i \cdot l_i + V_{i+1} \cdot \left[\frac{l_i^3}{3EI} \right]_1 + M_{i+1} \cdot \left[\frac{l_i^2}{2EI} \right]_1$$

$$\bar{\theta}_{i+1} = \bar{\theta}_i + T_{i+1} \cdot K_{t1}$$

Siendo T_1 el momento de torsión

$$K_{t1} = \frac{1}{G \cdot I_P} = \text{rigidez a la torsión}$$

■

Si uno de los extremos de la viga está libre (punto 1) las condiciones de borde serán:

$$V_1 = M_1 = T_1 = 0$$

$$\theta_1 = \theta \quad \text{para } y_1 = 1$$

$$\delta_1 = \delta$$

Al igual que en el caso anterior, las cuatro cantidades en el extremo más alejado están relacionados por las expresiones:

$$V_n = a_1 + b_1 \cdot \theta_1 + c_1 \cdot \delta_1$$

$$M_n = a_2 + b_2 \cdot \theta_1 + c_2 \cdot \delta_1$$

$$\theta_n = a_3 + b_3 \cdot \theta_1 + c_3 \cdot \delta_1$$

$$y_n = a_4 + b_4 \cdot \theta_1 + c_4 \cdot \delta_1$$

5.-METODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

-El método de la matriz de transferencia puede considerarse, como la sistematización matricial del método de Holzer y Myklestad.

Es muy adecuado para aplicarlo a sistemas complejos, compuestos por subsistemas más simples.

Puede aplicarse a sistemas amortiguados, en vibración libre o forzada.

-El método consiste en dividir un sistema complejo de n GDL, en un conjunto de elementos o "segmentos", cada uno de los cuales consta de un "tramo" con un resorte de rigidez dada y una "estación" que comprende un "punto masa" m .

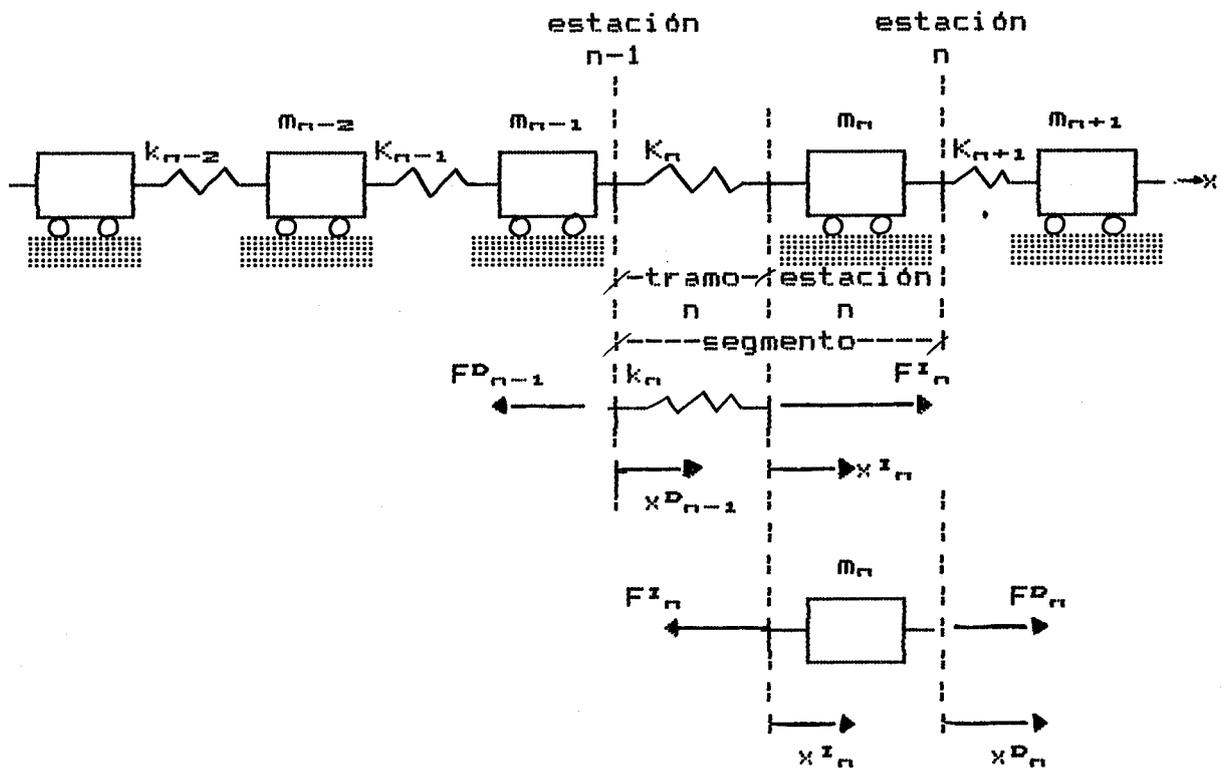
En cada extremo de los "tramos" o de las estaciones, se define un "vector de estado" o columna de números, cada uno de los cuales representa el valor de una variable presente en ese punto. Tales variables se denominan "variables de estado". (El orden de las variables de estado, en el vector de estado, puede tomarse arbitrariamente, aunque luego tal orden a de mantenerse en todos los cálculos).

El método consiste en encontrar las ecuaciones que relacionan el vector de estado de un punto con el contiguo, y hacer que se cumplan las condiciones de contorno.

Aplicación a sistemas masa-resorte no amortiguados

-Supongamos un sistema de n GDL, no amortiguado, como se ve en la figura.

-El sistema se divide en n segmentos, cada uno de los cuales consta de un resorte sin masa de rigidez K y una masa puntual m (en la figura se ha representado el segmento n ésimo, con su "tramo" y su "punto masa").



En forma sistemática, llamamos:

F_n^D = fuerza a la derecha de la estación $n-1$

F_n^I = fuerza a la izquierda de la estación n

F_n^D = fuerza a la derecha de la estación n

x_n^D = desplazamiento a la derecha de la estación $n-1$

x_n^I = desplazamiento a la izquierda de la estación n

x_n^D = desplazamiento a la derecha de la estación n

(Como se ve, todas las variables se refieren a los extremos de la estación)

-En el tramo n se pueden establecer las siguientes ecuaciones:

$$F^D_{n-1} = F^I_n \quad [11]$$

$$F^D_{n-1} = K_n \cdot (x^I_n - x^D_{n-1}) \quad [2]$$

Las ecuaciones [11] y [2] pueden expresarse en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_n^I = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_{n-1}^D \quad [3]$$

en donde la matriz $\begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}$ es la "matriz de estado" (en la estación n , y en el lado derecho o izquierdo, según se

indica), y la matriz cuadrada $\begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la "matriz de campo".

La matriz de campo, por consiguiente, relaciona los vectores de estado en los dos extremos de un tramo.

-En la estación n se pueden establecer las siguientes ecuaciones:

$$F^D_n - F^I_n = m_n \cdot \ddot{x}_n \quad [4]$$

Si el movimiento de m_n es armónico, de frecuencia circular w , podemos poner:

$$F^D_n = F^I_n - w^2 \cdot m_n \cdot x_n \quad [5]$$

Además, también podemos escribir

$$x^D_n = x^I_n = x_n \quad [6]$$

Las ecuaciones [5] y [6] pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_n^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w^2 \cdot m_n & 1 \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_n^I \quad [7]$$

La matriz cuadrada $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w^2 \cdot m_n & 1 \end{bmatrix}$ se le denomina "matriz de punto"

y relaciona los vectores de estado en los dos extremos de la estación n.

-Sustituyendo la ecuación [7] en la ecuación [3], tendremos la relación entre los vectores de estado en ambos extremos de un

segmento; por ejemplo, entre $\begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_{n-1}^D$ y $\begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_n^D$ (como se ve,

ambos en el lado derecho)

$$\begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_n^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w^2 \cdot m & 1 \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_{n-1}^D$$

operando:

$$\begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_n^D = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ -w^2 \cdot m & 1 - \frac{w^2 \cdot m}{K} \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_{n-1}^D \quad [8]$$

La matriz cuadrada última (que relaciona el vector de estado en el final del tramo $n-1$ con el vector de estado en el final del tramo n se le denomina "matriz de transferencia para el segmento n ".

-Llamando $[E]$ al vector de estado y $[\bar{T}]$ la matriz de transferencia, podemos poner $[B]$ en forma simplificada:

$$[E]P_n = [\bar{T}]_n \cdot [E]P_{n-1} \quad [9]$$

Con valores conocidos del vector de estado en la ecuación primera, y un valor elegido para la frecuencia circular w , pueden calcularse progresivamente los vectores de estado hasta la última estación n .

La expresión será:

$$[E]P_n = \left[[\bar{T}]_n \cdot [\bar{T}]_{n-1} \cdots [\bar{T}]_1 \right] \cdot [E]P_0 \quad [10]$$

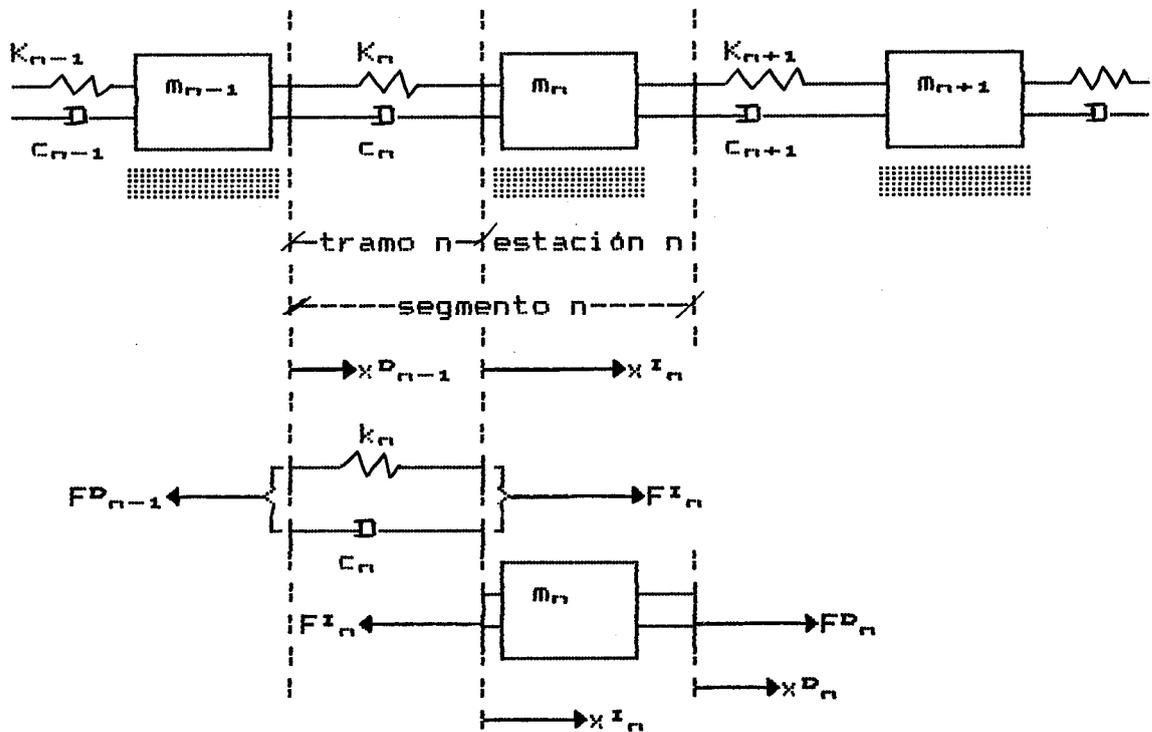
(Observese que en sistemas masa-resorte como el de la figura, las matrices de estado tienen siempre los mismos términos. Sólo se modifican los correspondientes valores de m y k para cada segmento, por lo que resultan muy sencillas de construir.

-Evidentemente, las frecuencias naturales del sistema serán aquellas que satisfagan las condiciones de contorno.

Para ello se procede a ensayar sucesivos valores de w , pudiendo dibujarse las gráficas $w \rightarrow x$ o $w \rightarrow F$

NOTA: Observese que el determinante de la matriz de transferencia siempre vale 1

Aplicación a sistemas masa-resorte amortiguados



-En el tramo n puede ponerse:

$$F^{D_{n-1}} = F^{I_n} \quad [1]$$

$$F^{D_{n-1}} = K_n \cdot (x^{I_n} - x^{D_{n-1}}) + i \cdot \omega \cdot C_n \cdot (x^{I_n} - x^{D_{n-1}}) \quad [2]$$

(siempre que el movimiento sea armónico)

$$C \cdot \dot{x} = i \cdot \omega \cdot C \cdot x$$

$$F^{D_{n-1}} = (K_n + i \cdot \omega \cdot C_n) \cdot (x^{I_n} - x^{D_{n-1}}) \quad [3]$$

Las ecuaciones [1] y [3] pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_n^I = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k + i \cdot \omega \cdot C_n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_{n-1}^D \quad [4]$$

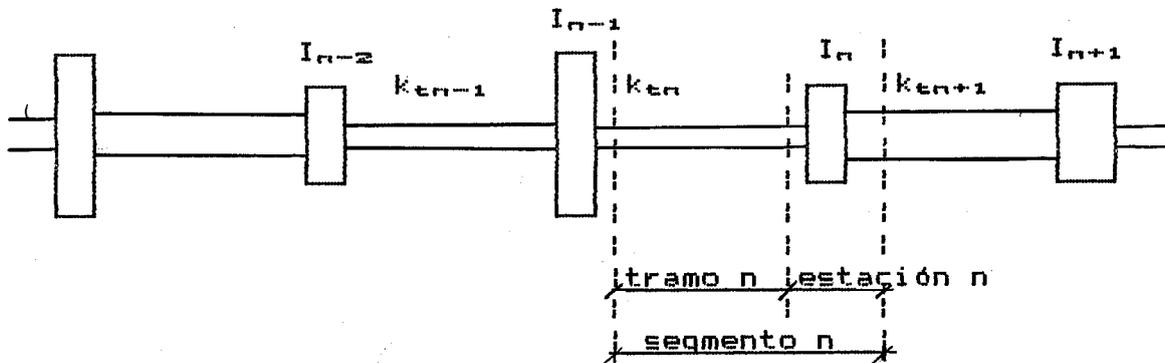
Como se ve es una ecuación similar a la obtenida para sistemas no amortiguados, sólo que ahora el término de rigidez, en la matriz de campo, tiene forma compleja.

-La ecuación para la estación n es la misma que en caso anterior:

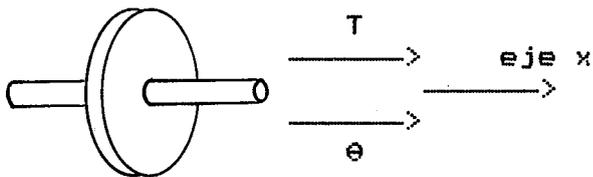
$$\begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_n^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w^2 \cdot m_n & 1 \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}_n^I \quad [5]$$

-Sustituyendo la ecuación [5] en la [4] se obtendrá la matriz de transferencia para este caso.

Aplicación a sistemas de torsión no amortiguados



Criterio de signos



El sentido positivo para el par de torsión T y el ángulo girado θ es el que resulta

de aplicar la regla de la mano derecha según el sentido positivo de x mostrado en la figura.

-Si k_t es la rigidez torsional del tramo n , aplicando las ecuaciones de equilibrio estático a este tramo resulta:

$$T_{n-1}^D = T_n^I \quad [1]$$

$$T_{n-1}^D = k_t \cdot (\theta_n^I - \theta_{n-1}^D) \quad [2]$$

que en la forma matricial puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_n^I = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_{n-1}^D \quad [3]$$

-En la estación n se pueden aplicar las ecuaciones:

$$T_n^D = T_n^I - \omega^2 \cdot I_n \cdot \theta_n \quad [4]$$

$$\theta_n^D = \theta_n^I = \theta \quad [5]$$

que en forma matricial queda:

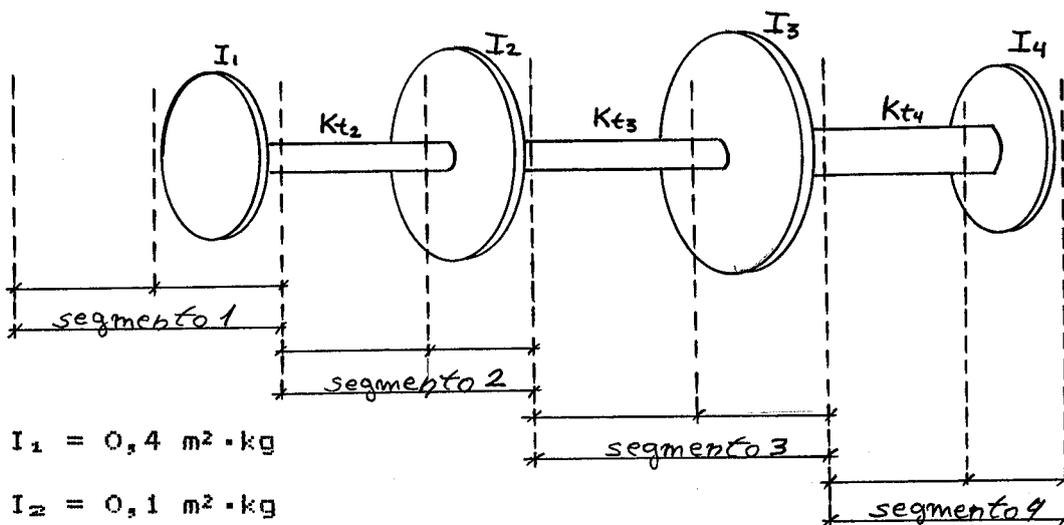
$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_n^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w^2 \cdot I_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_{n-1}^D \quad [6]$$

-Combinando [3] y [6] se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_n^D = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_t \\ -w^2 \cdot I_n & 1 - \frac{w^2 \cdot I_n}{K_t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_{n-1}^D \quad [7]$$

Como se ve, la matriz de transferencia, cuyo determinante vale 1, es idéntica a la obtenida para el sistema masa-resorte.

EJEMPLO: Determinar las frecuencias naturales y modos en el sistema de la figura:



$$I_1 = 0,4 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$$

$$I_2 = 0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$$

$$I_3 = 0,4 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$$

$$I_4 = 0,4 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$$

$$k_{t2} = 10 \frac{\text{k} \cdot \text{N} \cdot \text{m}}{\text{rd}}$$

$$k_{t3} = 20 \quad "$$

$$k_{t4} = 10 \quad "$$

Observese que para seguir la sistemática definida, el primer segmento cuenta sólo de una estación. El tramo (inexistente) tiene $k_{t1} = 0$

-Empezando por el segmento 1, la matriz de transferencia, será la correspondiente a la matriz de punto, con lo cual la ecuación [7] queda (para $\theta_1 = 1$ rd y $T^2_n = 0$)

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_1^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w^2 \cdot I_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_1^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,4w^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4w^2 \end{bmatrix}$$

Para el tramo 2, la ecuación [7] queda:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_2^D = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_{t2} \\ -w^2 \cdot I_2 & 1 - \frac{w^2 \cdot I_2}{k_{t2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_1^D = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-4} \\ -0,1 \cdot w^2 & 1 - w^2 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0,4 \cdot 10^{-4} \cdot w^2 \\ -0,5w^2 + 0,4 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}$$

-En la misma forma pueden escribirse las ecuaciones para los segmentos 3 y 4

-En la tabla se han representado los valores de los vectores de estado para diferentes frecuencias circulares ensayadas:

w rd s	$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_1^D$	$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_2^D$	$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_3^D$	$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_4^D$
170	-1,00 -11,56	-0,156 -11,11	-0,711 -2,88	-1,00 0,01
354	1,00 -50,10	-4,01 0,20	-4,00 200,90	16,09 0,6
588	1,00 -138,30	-12,83 -305,30	2,43 -31,40	-0,70 -7,0

Como sabemos, las frecuencias naturales serán aquellas que satisfagan las consideraciones de contorno que por ser un sistema semidefinido, será $TP_4 = 0$.

En consecuencia, $w = 170$ rd/s es la frecuencia fundamental $w = 354$ rd/s es aproximadamente igual a la primera frecuencia propia.

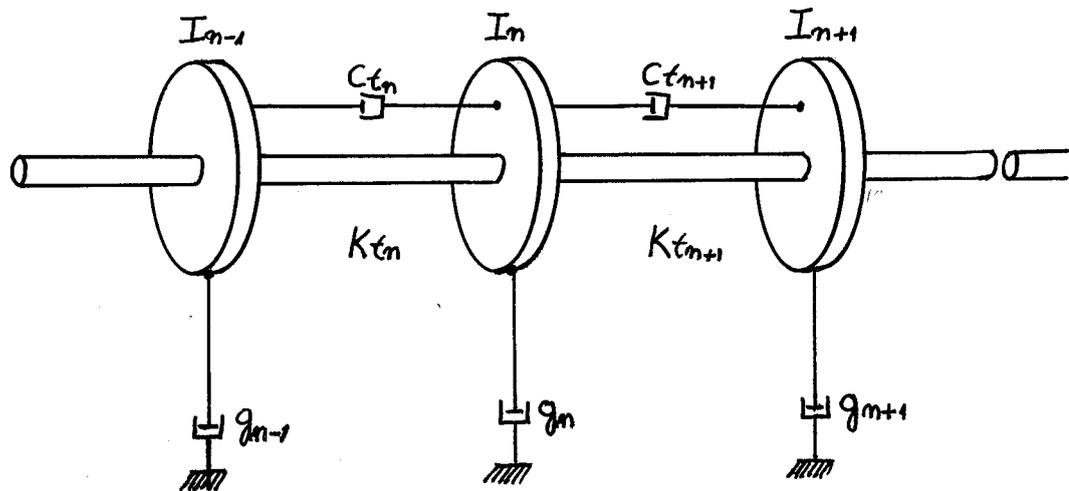
Los modos propios del sistema son los correspondientes valores de θ

(Comparese este resultado con los obtenidos por el método de Holzer, para este mismo problema)

(La condición de contorno $TP_4 = 0$ conduce a la ecuación característica del sistema. En efecto,

$$TP_4 = 0,8 \cdot 10^{-15} \cdot w^6 - 4 \cdot 10^{-10} \cdot w^4 + 4,55 \cdot 10^{-5} \cdot w^2 - w^2 = 0$$

de donde pueden obtenerse los 4 valores de w^2)

Aplicación a sistemas de torsión amortiguados

En el sistema de la figura se ha supuesto amortiguamiento en las barras que unen los discos, y amortiguamiento al giro del propio disco (por ejemplo, el rozamiento con el aire)

-Las ecuaciones para el tramo n serán:

$$T_{n-1}^D = T_n^I \quad [1]$$

$$\begin{aligned} T_n^I &= K_{tn} \cdot (\theta_n - \theta_{n-1}) + i \cdot \omega \cdot C_{tn} \cdot (\theta_n - \theta_{n-1}) = \\ &= (K_{tn} + i \cdot \omega \cdot C_{tn}) \cdot (\theta_n - \theta_{n-1}) \end{aligned} \quad [2]$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_n^I = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K_t + i \cdot \omega \cdot C_t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_{n-1}^D$$

-Las ecuaciones para la estación n (disco) serán:

$$\begin{aligned} \theta_n^D &= \theta_n^I \quad [4] \\ -\omega^2 \cdot I_n \cdot \theta_n &= T_n^D - T_n^I - i \cdot \omega \cdot C_{tn} \cdot \theta_n \end{aligned}$$

que también se puede escribir:

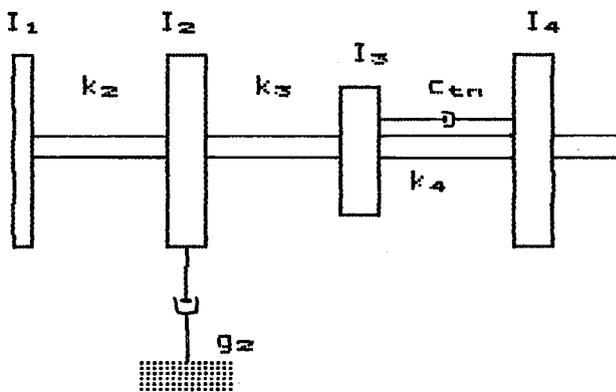
$$(i \cdot \omega \cdot c_{tn} - \omega^2 \cdot I_n) \cdot \theta_n = T^n - T^z_n \quad [5]$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_n^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i \cdot \omega \cdot c_{tn} - \omega^2 \cdot I_n & 1 \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_n^I$$

-Sustituyendo [6] en [5] tendremos la matriz de transferencia.

EJEMPLO: Determinar las frecuencias naturales y modos del sistema de la figura:

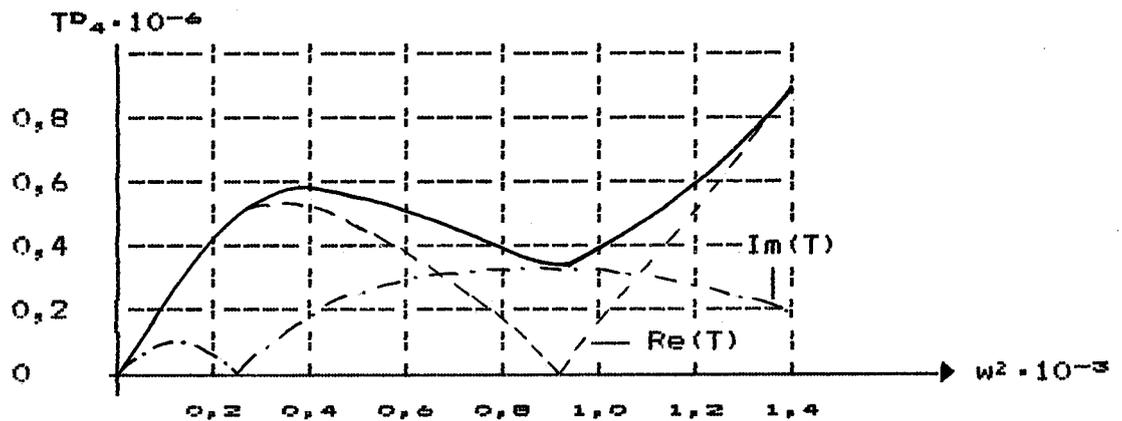


- $I_1 = I_2 = 500 \text{ lb}\cdot\text{pulg}/\text{s}^2$
- $I_3 = I_4 = 100$
- $k_2 = k_3 = k_4 = 10 \text{ lb}\cdot\text{pulg}/\text{rd}$
- $g_2 = 10^4 \text{ lb}\cdot\text{pulg}/\text{rd}$
- $c_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ "}$

Observese que aún cuando el sistema esté sometido a un par de variación senoidal $T = T_0 \cdot \text{sen } \omega t$, las frecuencias naturales serán aquellos valores de ω que produzcan un par nulo sobre los extremos (vibración libre)

ω	$(\omega^2 \cdot I_n - i \cdot \omega \cdot g_n) \cdot 10^{-6}$	$(K_n + i \cdot \omega \cdot c_n) \cdot 10^{-6}$	θ_n	$T^n \cdot (x \cdot 10^4)$
$\omega = 1 \text{ rad/s}$	$0,50 + 0,0i$		$1,0 + 0,0i$	$-0,5 + 0,0i$
	$0,50 - 0,316i$	$1,0 + 0,0i$	$0,50 + 0,0i$	$-0,75 + 0,158i$
	$1,0 + 0,0i$	$1,0 + 0,0i$	$-0,25 + 0,158i$	$-0,5 + 0,0i$
	$1,0 + 0,0i$	$1,0 + 0,635i$	$-0,607 + 0,384i$	$0,107 + 0,384i$

Repitiendo los cálculos para otras frecuencias se obtiene el diagrama de la figura (en el cual se han separado las partes real e imaginaria de T^D_4)



El par resultante para $w^2 = 1$ vale:

$$T^D_n(w_1) = \sqrt{0,1072 + 0,3842} \cdot 10^6 = 0,394 \cdot 10^6 \text{ lb.pulg.}$$

La primera frecuencia natural se obtiene donde la parte real de T corta al eje de abscisas

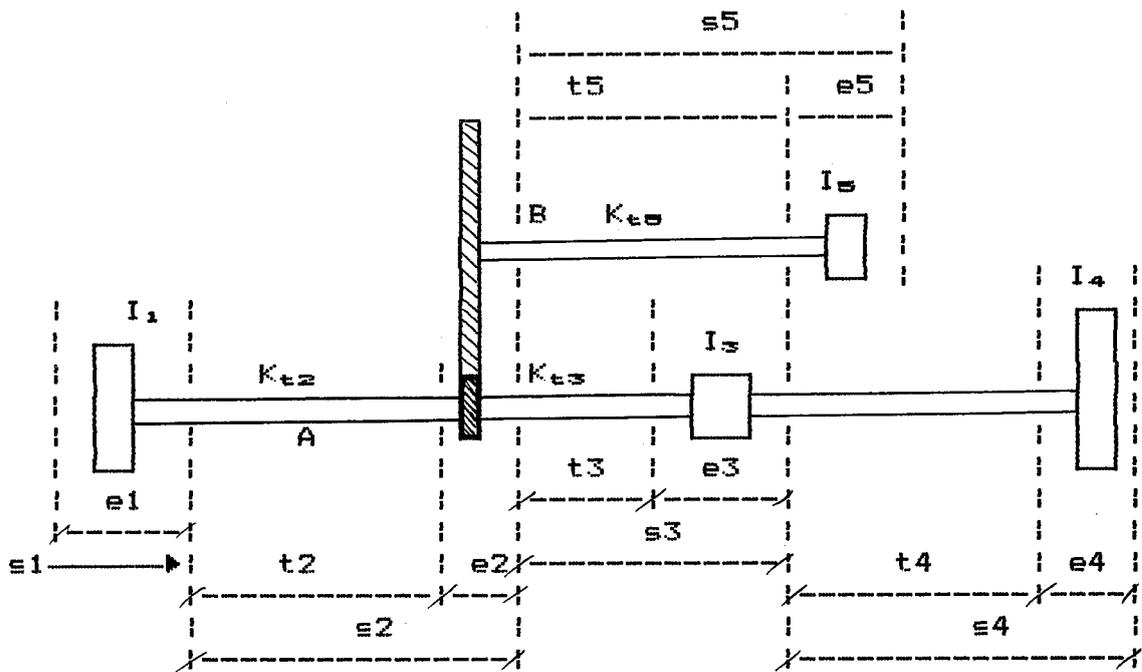
$$w_1 = \sqrt{930} = 30,5 \text{ rd/s.}$$

Aplicación a sistemas dentados

-En la práctica se encuentran sistemas dentados (o no) complejos, con una o varias ramificaciones (trenes de engranajes epicicloidales, accionamiento de varias hélices desde un sólo motor de barras, etc), que pueden ser abordados por este método.

La figura representa un sistema de torsión ramificado, unidos los dos ramales por los engranajes de relación de transmisión η e inercia despreciable frente a las de los dos árboles.

Se pretende calcular las frecuencias naturales y modos del sistema, y concretamente, los del eje A



(Observese que en la práctica la única diferencia entre este caso y los anteriormente estudiados es el par adicional que se introduce en el eje A por la rueda dentada, debido al eje B)

En el segmento 5 (s5) puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} \theta_B \\ T_B \end{bmatrix}_5^D = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_{tB} \\ -w_B^2 \cdot I_B & 1 - \frac{w_B^2 \cdot I_B}{K_{tB}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_B \\ T_B \end{bmatrix}_2^D$$

siendo w_B la frecuencia de vibración del eje B.

Despejando $\begin{bmatrix} \theta_B \\ T_B \end{bmatrix}_2^D$, o sea, premultiplicando por la inversa de

esta matriz de transferencia, tendremos:

$$\begin{bmatrix} \theta_B \\ T_B \end{bmatrix}_2^D = \begin{bmatrix} 1 - \frac{w_B^2 \cdot I_B}{K_{tB}} & -1/k_{tB} \\ w_B^2 \cdot I_B & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_B \\ T_B \end{bmatrix}_5^D$$

Como $T_{B5}^D = 0$, queda:

$$\begin{bmatrix} \theta_B \\ T_B \end{bmatrix}_2^D = \begin{bmatrix} 1 - \frac{w_B^2 \cdot I_B}{K_{tB}} \\ w_B^2 \cdot I_B \end{bmatrix} \cdot \theta_{B5}^D$$

De donde se obtiene:

$$\theta_{B2}^D = \left[1 - \frac{w_B^2 \cdot I_B}{K_{tB}} \right] \cdot \theta_{B5}^D$$

$$T_{B2}^D = w_B^2 \cdot I_B \cdot \theta_{B5}^D$$

y eliminando entre ambos θ_{B5}^D

$$T_{B2}^D = \frac{w_B^2 \cdot I_B}{1 - \frac{w_B^2 \cdot I_B}{K_{tB}}} \cdot \theta_{B2}^D$$

Teniendo en cuenta el equilibrio de pares del engranaje, puede escribirse:

$$T_{P_{A2}} = T_{A2} + T_{P_{B2}} \quad [1]$$

Expresando $T_{P_{B2}}$ en términos de w_A , podemos poner:

$$T_{P_{B2}} = \frac{n^2 \cdot w_A^2 \cdot I_B}{1 - \frac{n^2 \cdot w_A^2 \cdot I_B}{K_{tB}}} = \frac{n^2 \cdot w_A^2 \cdot I_B}{1 - \frac{n^2 \cdot w_A^2 \cdot I_B}{n^2 \cdot K_{tB}}} \cdot \theta_{P_{B2}}$$

Como también se tiene: $\theta_B = n \cdot \theta_A$

$$\theta_{P_{B2}} = -n \cdot \theta_{A2} = -n \cdot \theta_{P_{A2}} \quad [2]$$

podemos escribir:

$$T_{P_{B2}} = \frac{-n^3 \cdot w_A^2 \cdot I_B}{1 - \frac{w_A^2 \cdot I_B \cdot n^2}{K_{tB}}} \cdot \theta_{A2} \quad [3]$$

Sustituyendo la ecuación [3] en la ecuación [1]

$$T_{P_{A2}} = T_{A2} - \frac{n^2 \cdot w_A^2 \cdot I_B}{1 - \frac{w_A^2 \cdot I_B \cdot n^2}{K_{tB}}} \cdot \theta_{A2} \quad [4]$$

Las ecuaciones [4] y [2] pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ T_A \end{bmatrix}_2^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-w_A^2 \cdot I_B \cdot n^2}{1 - w_A^2 \cdot I_B \cdot n^2 / K_{tB}} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_A \end{bmatrix}_2^I$$

siendo esta matriz la "matriz de punto" de la estación 2.

-La matriz de campo para el tramo 2 puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} \theta_a \\ T_a \end{bmatrix}_2^I = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_{t2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_a \\ T_a \end{bmatrix}_1^D$$

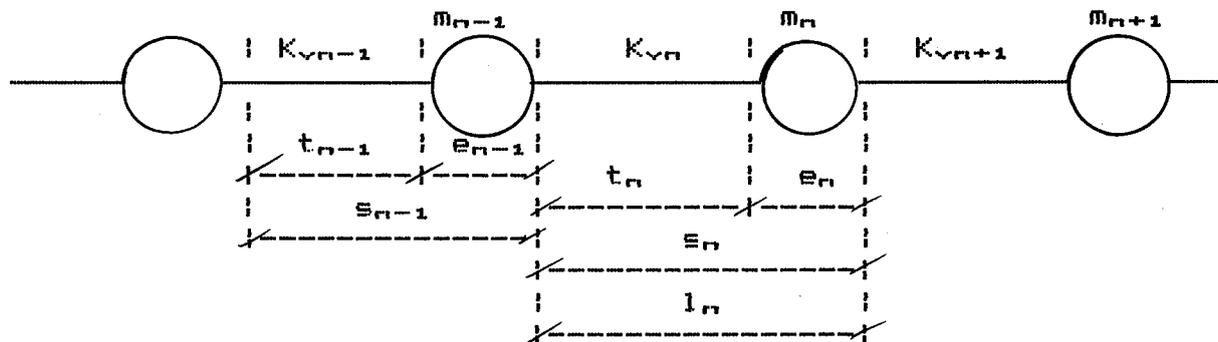
Con lo cual la matriz de transferencia para el segmento 2 será:

$$\begin{bmatrix} \theta_a \\ T_a \end{bmatrix}_2^D = \begin{bmatrix} 1 & 1/K_{t2} \\ \frac{-w^2_a \cdot I_B \cdot n_3}{1 - w^2_a \cdot I_B \cdot n^2 / K_{tB}} & 1 - \frac{w^2_a \cdot n_3 \cdot I_B / K_{t2}}{1 - w^2_a \cdot n^2 \cdot I_B / K_{tB}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_a \\ T_a \end{bmatrix}_1^D$$

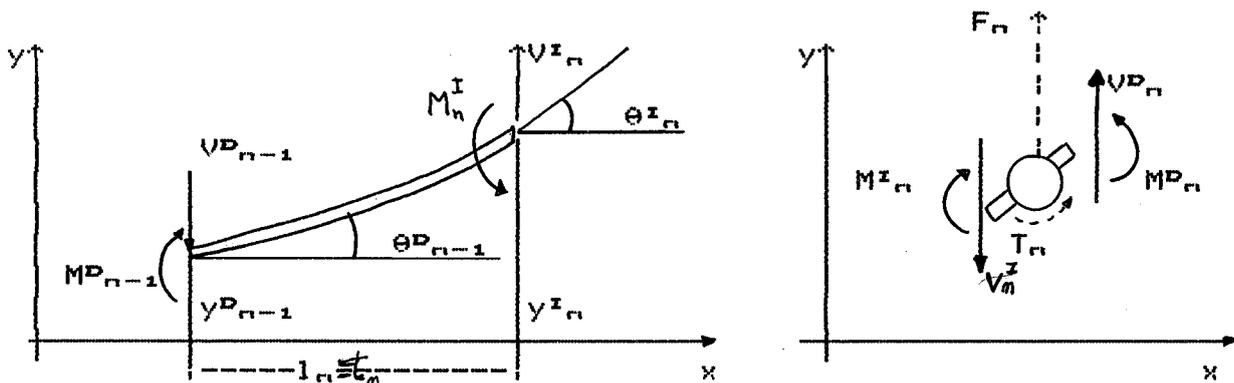
Las matrices de transferencia para los demás segmentos se calcularían siguiendo los procedimientos conocidos, así como las frecuencias y modos principales.

Aplicación a sistemas sometidos a vibraciones de flexión

-La figura representa una viga idealizada mediante un conjunto de segmentos, cada uno de los cuales se compone de un tramo (sin masa, pero con rigidez) y una estación (que concentra toda la masa, y sin rigidez)



-Las ecuaciones sobre cada tramo y cada estación son las que se muestran en las figuras:



(Las acciones F_n y T_n , dibujadas a trazos, son unas posibles fuerzas y pares exteriores actuantes sobre la viga, pero que en la explicación que sigue no las vamos a considerar, para no complicar excesivamente los cálculos)

-Para el tramo n pueden escribirse las siguientes ecuaciones:

Cortantes: $V_n^I = V^{D_{n-1}}$ [1]

Flectores: $M_n^I = M^{D_{n-1}} - l_n \cdot V^{D_{n-1}}$ [2]

$$\text{Pendientes: } \theta^I_n - \theta^D_{n-1} = \left[\frac{1}{EI} \right]_n \cdot M^I_n + \left[\frac{1^2}{2EI} \right]_n \cdot V^I_n \quad [3]$$

Deflexiones:

$$y^I_n - y^D_{n-1} = l_n \cdot \theta^D_{n-1} + \left[\frac{1^2}{2EI} \right]_n \cdot M^I_n + \left[\frac{1^3}{3EI} \right]_n \cdot V^I_n \quad [4]$$

Sustituyendo la ecuación [2] en la [3]

$$\theta^I_n = \theta^D_{n-1} + \left[\frac{1}{EI} \right]_n \cdot M^D_n - \left[\frac{1^2}{2EI} \right]_n \cdot V^D_{n-1} \quad [5]$$

Sustituyendo la ecuación [2] en la ecuación [4] queda:

$$y^I_n = y^D_{n-1} + l_n \cdot \theta^D_{n-1} + \left[\frac{1^2}{2EI} \right]_n \cdot M^D_{n-1} - \left[\frac{1^3}{6EI} \right]_n \cdot V^D_{n-1} \quad [6]$$

La "matriz de campo" se obtiene escribiendo en forma matricial las ecuaciones [1], [2], [5], [6]

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1^2}{2EI} & -\frac{1^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{1^2}{EI} & -\frac{1^3}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^D \quad [7]$$

-Para la estación n , pueden escribirse las siguientes ecuaciones (prescindiendo de F_n y T_n y suponiendo que el movimiento vibratorio es de tipo armónico):

$$\text{Cortante: } V^D_n = V^I_n - \omega^2 \cdot m_n \cdot y^I_n \quad [8]$$

$$\text{Flectores: } M^D_n = M^I_n \quad [9]$$

(Si el momento de inercia de la masa m_n respecto de un eje perpendicular al plano x - y no fuera nulo, la ecuación [9] sería $M^D_n = M^I_n - \omega^2 \cdot I_n \cdot \theta^I_n$)

$$\text{Giros: } \theta^I_n = \theta^D_n \quad [10]$$

$$\text{Flechas: } y^I_n = y^D_n \quad [11]$$

Las ecuaciones [8], [9], [10] y [11] en forma matricial, determina la "matriz de punto":

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m \cdot \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^I \quad [12]$$

Sustituyendo [7] en [12] se obtiene la "matriz de transferencia" para el segmento n

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m \cdot \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{l^2}{2EI} & -\frac{l^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & -\frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^D$$

Operando:

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{l^2}{2EI} & -\frac{l^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & -\frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & -l \\ -w^2 \cdot l & -w^2 \cdot l & -\frac{w^2 \cdot l^3}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^D \quad [13]$$

La ecuación [13] relaciona el vector de estado en la estación n con el mismo en la estación $n-1$. Si la viga se divide en n segmentos, puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^D = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_0^D$$

Siendo la matriz cuadrada el producto de las n matrices de transferencia para los sucesivos segmentos.

En forma reducida:

$$[E]_n^D = [\bar{T}] \cdot [E]_0^D$$

(Observese, una vez más, que las matrices de transferencia son todas iguales en cuanto a constitución, por lo que son muy sencillas de calcular. Basta ir sustituyendo los valores de l , I , E y w correspondiente a cada tramo.

Como el producto de matrices es fácil de realizar con un ordenador, el método es bastante rápido, pues relaciona

directamente los parámetros del vector de estado de la primera estación con la última)

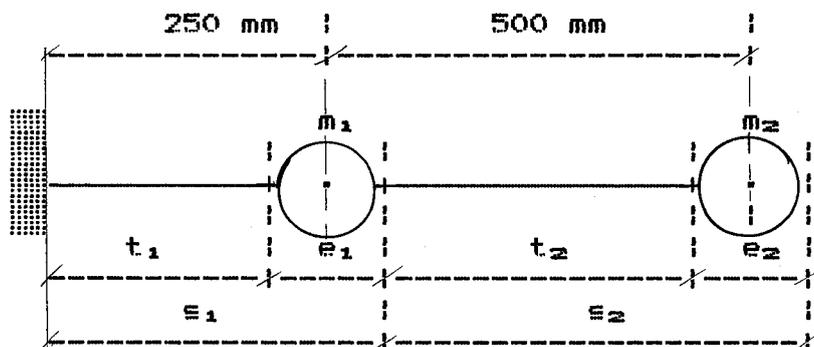
-Las condiciones de contorno para la problemas de vigas pueden presentar algunos de los tipos siguientes:

	y	θ	M	V
Simplemente apoyada	0	θ	0	V
Doblemente empotrada	0	0	M	V
Extremo libre	y	θ	0	0

-Si el método se aplicase al cálculo de las frecuencias propias y modos naturales de una viga simplemente apoyada, se tendría $y = M = 0$, y θ y V serían valores desconocidos, en la estación cero y en la última estación n .

Pues bien, suponiendo una frecuencia w , y partiendo de unos valores $y = 0$; $M = 0$; $\theta = \theta$; $V = V$, se van variando las frecuencias hasta que se obtenga $y = 0$ y $M = 0$ para el extremo final.

EJEMPLO: Encontrar las frecuencias naturales para el sistema vibrante de la figura, en el cual $m_1 = m_2 = 20 \text{ kg}$ y $E \cdot I = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$



Como hemos visto:

$$[E]^{p_1} = [\bar{T}]_1 \cdot [E]^{p_0}$$

$$[E]^{p_2} = [\bar{T}]_2 \cdot [E]^{p_1}$$

$$[E]^{p_2} = \left[[\bar{T}]_1 \cdot [\bar{T}]_2 \right] \cdot [E]^{p_0}$$

O en la forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_2^D = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_0^D \quad [1]$$

Siendo la matriz cuadrada anterior el resultado de multiplicar las dos matrices $[\bar{T}]_1$ y $[\bar{T}]_2$, que valen en este caso:

$$[\bar{T}]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 & 10,4 \cdot 10^{-6} & -0,87 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 1 & 83,3 \cdot 10^{-6} & -10,42 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 0 & 1 & -0,25 \\ -20w^2 & -5w^2 & -208,3 \cdot 10^{-6} \cdot w^2 & 1 + 17,36 \cdot 10^{-6} \cdot w^2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{T}]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 41,7 \cdot 10^{-6} & -6,9 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 1 & 166,7 \cdot 10^{-6} & -41,7 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 \\ -20w^2 & -10w^2 & -833,3 \cdot 10^{-6} \cdot w^2 & 1 + 138,9 \cdot 10^{-6} \cdot w^2 \end{bmatrix}$$

Como por las condiciones de contorno del problema, $M^{p_2} = V^{p_2} = 0$ (extremo libre), de la ecuación [1] se obtiene:

$$t_{33} \cdot M_0 + t_{34} \cdot V_0 = 0$$

$$t_{43} \cdot M_0 + t_{44} \cdot V_0 = 0$$

la resolución no trivial de este sistema implica que:

$$\begin{bmatrix} t_{33} & t_{34} \\ t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} = 0$$

que en términos numéricos se expresa:

$$\begin{bmatrix} 1 + 104,2 \cdot 10^{-6} \cdot w^2 & -0,75 - 8,68 \cdot 10^{-6} \cdot w^2 \\ -2,08 \cdot 10^{-3} \cdot w^2 - 28,9 \cdot 10^{-7} \cdot w^4 & 1 + 486 \cdot 10^{-6} \cdot w^2 + 2,41 \cdot 10^{-7} \cdot w^2 \end{bmatrix} = 0$$

de donde resulta:

$$w^4 - 73,3 \cdot 10^{-3} \cdot w^2 + 75,4 \cdot 10^{-6} = 0$$

cuya resolución conduce a:

$$w_1 = 32,3 \text{ rd/s}$$

$$w_2 = 269 \text{ rd/s}$$

6.-METODO DE DUNKERLEY

-Este método permite calcular, en forma aproximada, la frecuencia fundamental de un sistema vibrante de n GDL.

Como veremos, la aproximación se verifica siempre por un valor inferior al de la frecuencia fundamental real.

Se aplica a sistemas no amortiguados, en vibración libre o forzada.

(Evidentemente, si es un sistema excitado, como las frecuencias fundamentales son independientes de la excitación, puede simplemente prescindirse de usar estas últimas, pues el método conduce sólo al cálculo de la primera frecuencia natural)

-Sea
$$[m] \cdot \ddot{[x]} + [K] \cdot [x] = [0]$$

el sistema de ecuaciones diferenciales que definen el movimiento de las n masas premultiplicando por $[K]^{-1}$

$$[K]^{-1} \cdot [m] \cdot \ddot{[x]} + [x] = [0]$$

Como $[K]^{-1}$ es igual a la matriz de flexibilidad $[a]$, queda:

$$[a] \cdot [m] \cdot \ddot{[x]} + [x] = [0]$$

Suponiendo la solución del tipo:

$$[x] = [X] \cdot \text{sen} (wt + \bar{\varphi})$$

tendremos

$$\ddot{[x]} = -w^2 \cdot [X] \cdot \text{sen} (wt + \bar{\varphi})$$

Sustituyendo y operando:

$$\left[[a] \cdot [m] - \frac{1}{w^2} [I] \right] \cdot [X] = [0]$$

En forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} - \frac{1}{\omega^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = [0]$$

(Como vemos, se ha supuesto que la matriz de masas es diagonal)

Para que el sistema de ecuaciones algebraicas anterior tenga solución distinta de la trivial, ha de cumplirse:

$$\begin{bmatrix} \left[a_{11} \cdot m_1 - \frac{1}{\omega^2} \right] & a_{12} \cdot m_2 & \dots & a_{1n} \cdot m_n \\ a_{21} \cdot m_1 & \left[a_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{\omega^2} \right] & \dots & a_{2n} \cdot m_n \\ a_{n1} \cdot m_1 & a_{n2} \cdot m_2 & \dots & \left[a_{nn} \cdot m_n - \frac{1}{\omega^2} \right] \end{bmatrix} = 0$$

Si el sistema lo reducimos por simplificar a sólo dos términos, el desarrollo del determinante será:

[1]

$$\left[\frac{1}{\omega^2} \right]^2 - \left[a_{11} \cdot m_1 + a_{22} \cdot m_2 \right] \cdot \left[\frac{1}{\omega^2} \right] + m_1 \cdot m_2 \cdot \left[a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21} \right] = 0$$

Si ω_1 y ω_2 son las dos frecuencias naturales (raíces de la ecuación de segundo grado), puede ponerse:

$$\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right] = 0$$

o también

$$\left[\frac{1}{\omega^2} \right]^2 - \left[\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{\omega^2} \right] + \frac{1}{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2} = 0 \quad [2]$$

Comparando [1] y [2], podemos poner:

$$\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} = a_{11} \cdot m_1 + a_{22} \cdot m_2$$

Si la frecuencia fundamental w_1 es mucho más pequeña que la segunda w_2 , es decir; si $\frac{1}{w_2^2} \ll \frac{1}{w_1^2}$, podemos escribir:

$$\frac{1}{w_1^2} \approx a_{11} \cdot m_1 + a_{22} \cdot m_2 \quad [3]$$

La ecuación [3] es la llamada ecuación de Dunkerley, que para un sistema de n GDL puede expresarse:

$$\frac{1}{w_1^2} \approx a_{11} \cdot m_1 + a_{22} \cdot m_2 + \dots + a_{nn} \cdot m_n$$

$$\frac{1}{w_1^2} \approx \sum_{i=1}^n a_{ii} \cdot m_i$$

El término genérico $a_{ii} \cdot m_i$ representa la aportación a la frecuencia fundamental w_1 de un sistema equivalente masa-resorte situado en la estación i .

En efecto, a_{ii} es la deflexión en la masa i debido a una fuerza unitaria aplicada en i .

Como a_{ii} es el inverso de K_{ii} , puede ponerse:

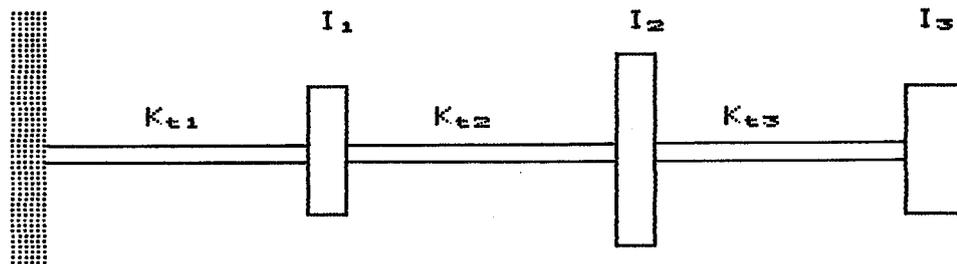
$$a_{ii} \cdot m_i = \frac{m_i}{K_{ii}} = \frac{1}{w_{ii}^2}$$

Siendo w_{ii} la frecuencia propia de tal sistema equivalente.

Según esto, la ecuación de Dunkerley también puede escribirse:

$$\frac{1}{\omega^2_1} \approx \frac{1}{\omega^2_{11}} + \frac{1}{\omega^2_{22}} + \dots + \frac{1}{\omega^2_{nn}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega^2_{1i}} \quad [4]$$

EJEMPLO: Calcular la frecuencia fundamental del sistema de la figura:



$$K_{e1} = K_{e2} = K_{e3} = K_e$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

Calculando el valor de los coeficientes de influencia, obtendremos:

$$a_{11} = 1/K_e \quad a_{22} = 2/K_e \quad a_{33} = 3/K_e$$

Aplicando la ecuación [3]

$$\frac{1}{\omega^2_1} = \frac{I}{K_e} + \frac{2I}{K_e} + \frac{3I}{K_e} + \frac{6I}{K_e}$$

$$\omega_1 = 0,408 \cdot \sqrt{K_e/I}$$

(que difiere en un 8% del valor real).

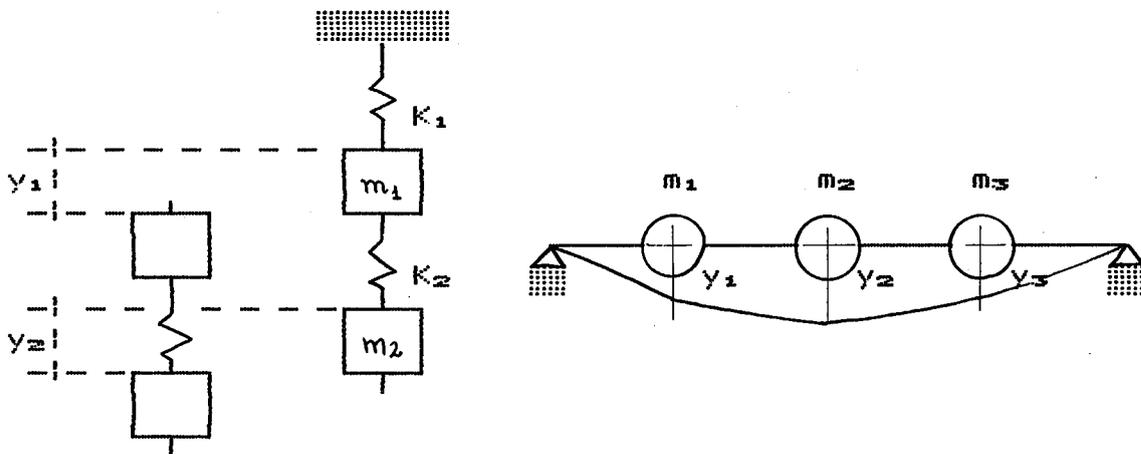
7.-METODO DE RAYLEIGH

-Este método desarrollado para sistemas de 1 GDL puede aplicarse también a sistemas de n GDL, siempre que se cumpla la condición de que el sistema sea conservativo.

Si lo es se verificará, en cualquiera de los modos principales de vibración, que la máxima energía potencial del sistema es igual a su máxima energía cinética. En concreto, tal igualdad se establecerá también para el primer modo de vibración o fundamental.

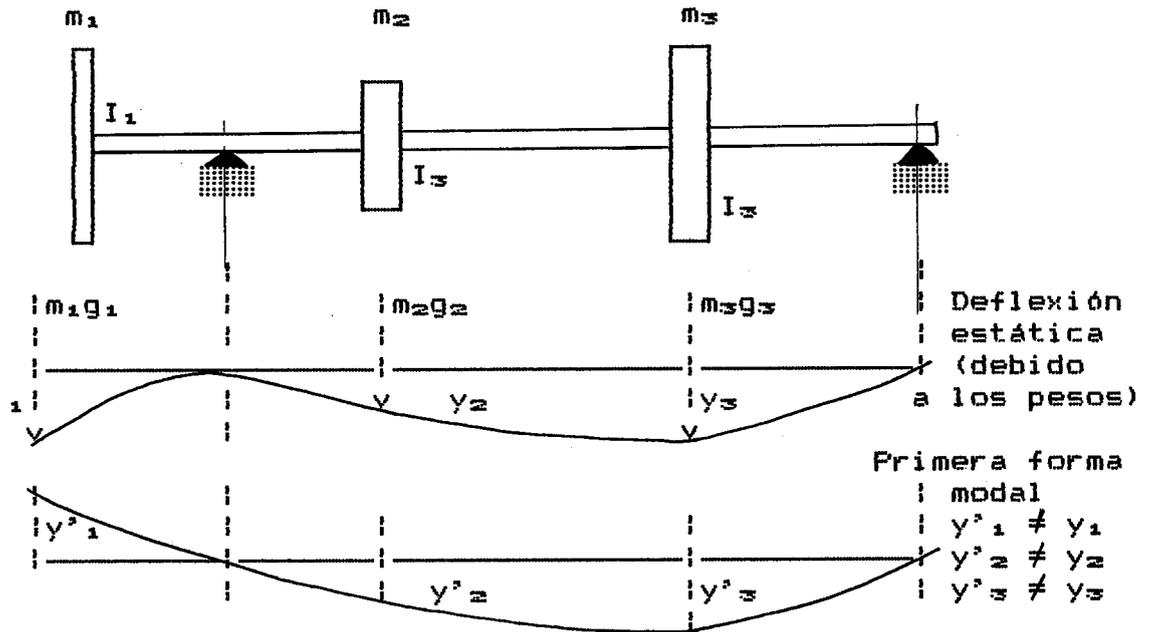
-Como la máxima energía potencial sólo puede conocerse cuando se conozca la deflexión del sistema, y esta es diferente para cada modo, siendo estos más "complicados" cuanto más altos sean, el método de Rayleigh se ve limitado al previo conocimiento de los mismos, y por tanto, sus posibilidades de aplicación se reducen al cálculo de las frecuencias más bajas.

-En concreto, el método de Rayleigh se aplica al cálculo de la primera frecuencia fundamental, puesto que la deflexión de la mayoría de los sistemas, para ese modo, se aproxima a la deflexión estática.

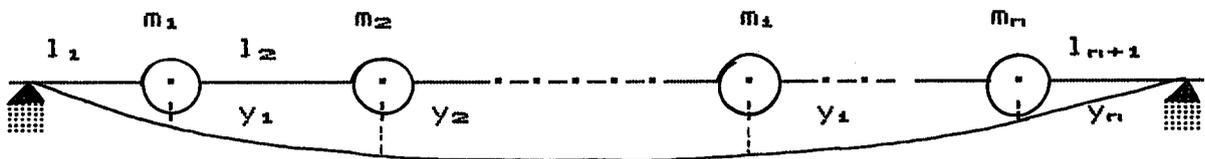


NOTA: No siempre la deflexión estática indica o "refleja" el primer modo de vibración.

Por ejemplo, en el rotor de la figura, la deflexión estática y el primer modo, no coinciden.



-Para el sistema de n GDL como el de la figura, el método de Rayleigh puede enunciarse:



Máxima energía potencial del sistema:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot m_1 \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot m_2 \cdot y_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot g \cdot m_n \cdot y_n$$

Máxima energía cinética (la vibración de cada masa se supone de tipo armónico $y = Y \cdot \text{sen}(w_1 t + \xi)$; $\dot{y} = iw_1 \cdot y$)

$$T_{\max} = \frac{1}{2} w_1^2 (m_1 \cdot y_1^2 + m_2 \cdot y_2^2 + \dots + m_n \cdot y_n^2)$$

Igualando y despejando w_1^2

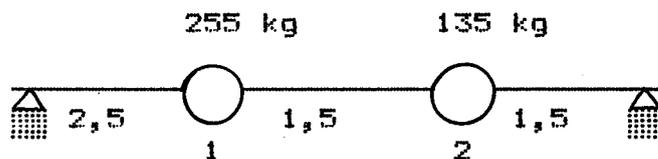
$$w_1^2 = \frac{g(m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + \dots + m_n \cdot y_n)}{(m_1 \cdot y_1^2 + m_2 \cdot y_2^2 + \dots + m_n \cdot y_n^2)}$$

$$w_1^2 = \frac{g \cdot \sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i y_i^2}$$

Evidentemente, si la deflexión estática supuesta es igual a la primera forma modal, el valor de w_1 será el exacto. Si no lo fuera, ello equivaldría a introducir una restricción adicional en el sistema vibrante, lo que indica que el valor hallado para w_1 sería más alto que el valor verdadero.

NOTA: El método de Rayleigh, al contrario que el de Dun Kerley, se aproxima a la frecuencia natural fundamental por un valor superior. Ambos métodos, aplicados simultáneamente, acotan el valor de la frecuencia fundamental.

EJEMPLO: Calcular la frecuencia fundamental del sistema de la figura (vibrando en el plano del dibujo)



Como sabemos de resistencia de materiales

IP
↓

| x | | b |
|-----| |-----|
1

$$y(x) = \frac{P \cdot b \cdot x}{6EI \cdot l} (l^2 - x^2 - b^2)$$

Debido a la masa de 135 kg

$$y'_1 = 3,273 \cdot \frac{10^3}{EI} \text{ metros}$$

$$y'_2 = 2,889 \cdot \frac{10^3}{EI} \text{ metros}$$

Debido a la masa de 255 kg

$$y''_1 = 7,524 \cdot \frac{10^3}{EI} \text{ metros}$$

$$y''_2 = 5,455 \cdot \frac{10^3}{EI} \text{ metros}$$

Superponiendo ambos estados

$$y_1 = 10,797 \cdot \frac{10^3}{EI} \text{ metros}$$

$$y_2 = 8,344 \cdot \frac{10^3}{EI} \text{ metros}$$

Sustituyendo en la ecuación de Rayleigh:

$$w_1 = \sqrt{\frac{9,81 (225 \cdot 10,797 + 135 \cdot 8,344) \cdot EI}{(225 \cdot 10,797^2 + 135 \cdot 8,344^2) \cdot 10^3}}$$

$$w_1 \approx 0,03129 \sqrt{E/I} \text{ rd/s}$$

NOTA: Las deflexiones se producen, en realidad, por efecto de las fuerzas de inercia (cargas dinámicas $w^2 \cdot m \cdot y$).

Por tanto, se obtiene mayor precisión de los resultados si se parte de unas masas "modificadas"

$$g \cdot m_1 \cdot \frac{y_2}{y_1} ; \quad g \cdot m_2 \cdot \frac{y_2}{y_1}$$

7.- BIBLIOGRAFIA:

- 1.- Control, medida y análisis de vibraciones y su aplicación en centrales térmicas.
ASINEL, 1.984
- 2.- Dynamic vibration absorbers
J.B. Hunt
M.E.P., 1.979
- 3.- Elements of vibration analysis
Leonard Meirovitch.
Mc. Graw Hill, 1.986
- 4.- Frequency analysis
R.B. Randall
Bruel and Kjaer, 1.977
- 5.- Industrial noise and vibration control
J.D. Irwin
- 6.- Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas
R.F. Steidel
F. Continental, 1.981
- 7.- La medida de las vibraciones
Bruel and Kjaer
- 8.- Mecánica de las vibraciones
J.P. Den Hartog
CELSA, 1.964
- 9.- Mechanical vibrations
S.S. Rao
Addison Wesley, 1.986
- 10.- Mechanical vibrations
F.S. Tse
Allyu and Bacon, 1.978
- 11.- Mechanical vibration and shock measurements
J. Trampe
Bruel and Kjaer, 1.980

- 12.- Noise and vibration control
L. Beranek
Mc. Graw-Hill, 1.971
- 13.- Noise and vibrations of engines and transmissions.
M.E.P.
- 14.- Random data: Analysis and measurement procedures.
J.S. Bendat; A.G. Piersol
Wiley Interscience, 1.971
- 15.- Random vibrations and spectral analysis
D.E. Newland
Rongman, 1.975
- 16.- Random vibration in mechanical systems
S.H. Grandall
Academic Press, 1.973
- 17.- Rotor dynamics
J.S. Rao
Wiley E.L., 1.983
- 18.- Shock and vibration handbook
C.M. Harris
Mc. Graw-Hill, 1.976
- 19.- Teoría de las vibraciones. Aplicaciones
W. Thomson
Prentice Hall, 1.983
- 20.- The practical vibration primer
C. Jackson.
- 21.- Theory of vibration with applications
W. Thomson
Prentice Hall, 1.981
- 22.- Vibraciones
J. Agulló
E. T. S. I. I. Barcelona
- 23.- Vibraciones aleatorias y análisis espectral
D.E. Newland
E.A.C., 1.983

- 24.- Vibraciones Mecánicas
J. Dominguez Abascal
E.T.S.I.I. Sevilla
- 25.- Vibraciones mecánicas
Roca Vila; L. León
Linmsa, 1.981
- 26.- Vibraciones mecánicas
W.S. Seto
Mc. Graw Hill, 1.970
- 27.- Vibraciones mecánicas
J.F. Tenorio Hurrios
ICAI, 1.977
- 28.- Vibraciones mecánicas en ingeniería
F. Lafita
INTA, 1.964
- 29.- Vibration control
J.N. Macduff
Mc. Graw Hill, 1.958
- 30.- Vibration problems in engineering
S. Timoshenko
Johs Wiley, 1.974

