

EQUILIBRADO DE MECANISMOS

Roque Calero Pérez

**EQUILIBRADO
DE
MECANISMOS**

I N D I C E

A.- ESTUDIO TEORICO GENERAL

1.- Desequilibrio de los mecanismos

1.1.- Concepto de desequilibrio	1
1.2.- Causas de desequilibrio	2
1.3.- Efectos del desequilibrio	8
1.4.- Clasificación del desequilibrio	11

2.- Introducción al equilibrado de mecanismos

2.1.- Concepto de equilibrado	14
2.2.- Formas de proceder al equilibrado	17
2.3.- Clasificación del equilibrado	20

3.- Equilibrado de miembros aislados

3.1.- Equilibrado de miembros en rotación

3.1.1.- Introducción general	23
------------------------------------	----

3.1.2.- Equilibrado de miembros en rotación rígidos

3.1.2.1.- Desequilibrio conocido

3.1.2.1.1.- Equilibrado de una masa puntual.	44
--	----

3.1.2.1.2.- Equilibrado de varias masas puntuales en un plano	47
--	----

3.1.2.1.3.- Equilibrado de varias masas puntuales de diferentes planos.	51
--	----

3.1.2.2.- Desequilibrio desconocido

3.1.2.2.1.-	Equilibrado de rotores cortos. (Equilibrado en un plano). Diferentes métodos. (Método del ángulo de desfase. Método de las amplitudes. Método del análisis orbital)	62
3.1.2.2.2.-	Equilibrado de rotores largos. (Equilibrado de dos planos). Diferentes métodos. (Método del ángulo de fase. Método plano a plano)	87
3.1.3.-	Equilibrado de miembros en rotación flexibles	
3.1.3.1.-	Introducción	102
3.1.3.2.-	Equilibrado de rotores flexibles ...	106
3.2.-	Equilibrado de miembros en traslación	
3.2.1.-	Introducción	112
3.2.2.-	Equilibrado de correderas	117
3.3.-	Equilibrado de miembros con movimiento compuesto	
3.3.1.-	Introducción	120
3.3.2.-	Equilibrado de bielas	123
4.-	<u>Equilibrado de mecanismos</u>	
4.1.-	Introducción general	125
4.2.-	Equilibrado general de mecanismos simples	128
4.3.-	Equilibrado de mecanismos complejos: Análisis del grado de equilibrado	

4.3.1.- Motores policilíndricos en línea	135
4.3.2.- Motores policilíndricos en V	161

B.- PRACTICA DEL EQUILIBRADO

5.- Máquinas de equilibrar

5.1.- Introducción	165
5.2.- Máquinas de equilibrado estático	169
5.3.- Máquinas de equilibrado dinámico	172

6.- Recomendaciones para el equilibrado de rotores

6.1.- Recomendaciones	186
6.2.- Tolerancias del equilibrado.....	195

<u>BIBLIOGRAFIA</u>	200
----------------------------------	-----

1.1.- CONCEPTO DE DESEQUILIBRIO DE MECANISMOS

En forma genérica diremos que un mecanismo está desequilibrado cuando las reacciones sobre el bastidor son variables de un instante a otro, durante el ciclo del movimiento.

Dado que las reacciones son vectores, el desequilibrio puede deberse a la variación en el módulo, la dirección o el sentido.

NOTA: Al hablar en general de mecanismos quedan incluidos, lógicamente, desde mecanismos simples rotatorios, como puede ser el rotor de una turbina, hasta mecanismos complicados de barras articuladas.

1.2.- CAUSAS DEL DESEQUILIBRIO DE MECANISMOS

Según sabemos, los esfuerzos en mecanismos que se traducen en acciones sobre su bastidor son de dos tipos:

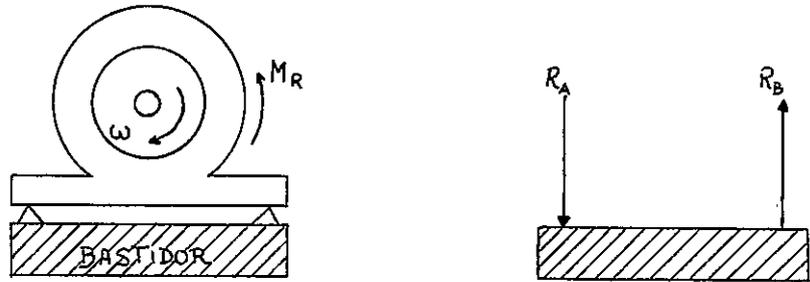
- Las fuerzas y momentos "exteriores" (exteriores al mecanismo considerado, como puede ser la fuerza que el material cortado produce sobre la cuchilla de una cepilladora, la resistencia al avance de un automóvil por el aire, las fuerzas que sobre el par pistón-cilindro introduce una mezcla de aire-gasolina al inflamarse, el empuje de un chorro de gases sobre los alabes de una turbina, etc.)

- Las fuerzas y momentos de inercia (producidos por la aceleración de las masas del mecanismo).

NOTA: Aun cuando en este momento no vamos a entrar en un análisis de estas fuerzas, sí conviene hacer un recordatorio sobre las mismas, para fijar algunos conceptos, lo que efectuaremos con unos simples ejemplos; empezando por las fuerzas estáticas, para pasar luego a las de inercia:

Ejemplo 1:

Motor eléctrico accionando una carga constante, por ejemplo, una bomba centrífuga que impulsa agua en caudal y altura constante.

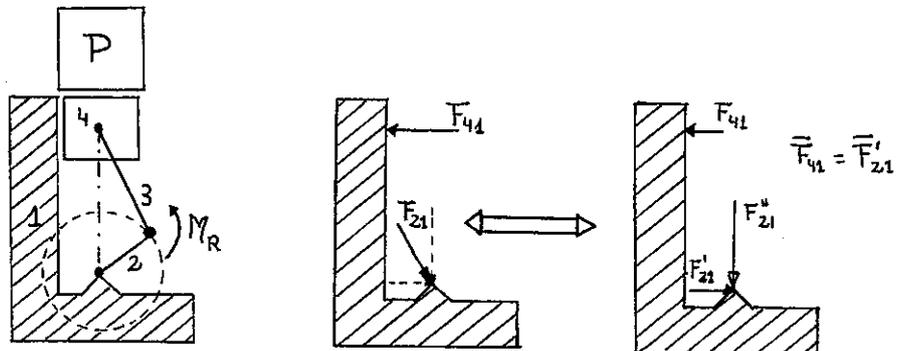


En este caso, la reacción sobre el bastidor es un par, de valor constante. En consecuencia, aun cuando exista este par no equilibrado, el mecanismo no está desequilibrado a efectos de nuestra definición, puesto que tales acciones no varían en el tiempo.

(Evidentemente, lo único que ha ocurrido es un "retorcimiento" del bastidor común del motor y de la bomba).

Ejemplo 2:

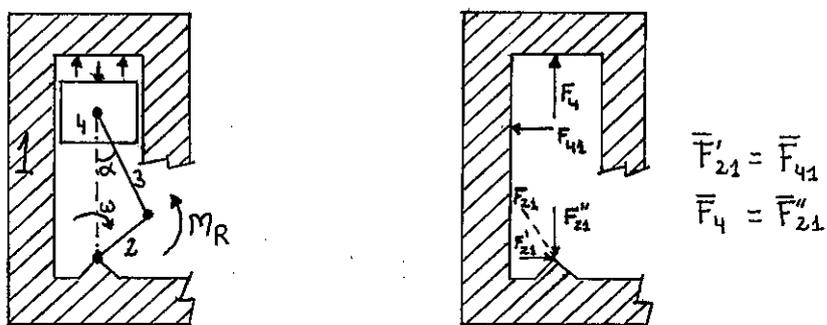
Mecanismo biela - manivela - corredera, sometido a una fuerza exterior (un peso sobre la corredera, por ejemplo)



Si se aplica un momento resistente M_R que equilibra a la carga P , las reacciones sobre el bastidor son las que se ven en la figura adjunta (una resultante y un par, respecto de cualquier punto que no sea la intersección de F_{41} y F_{21}) Evidentemente, si este mecanismo se mueve, los valores de F_{41} y F_{21} irán variando con el tiempo, y el mecanismo estará desequilibrado.

Ejemplo 3:

Mecanismo del motor de explosión



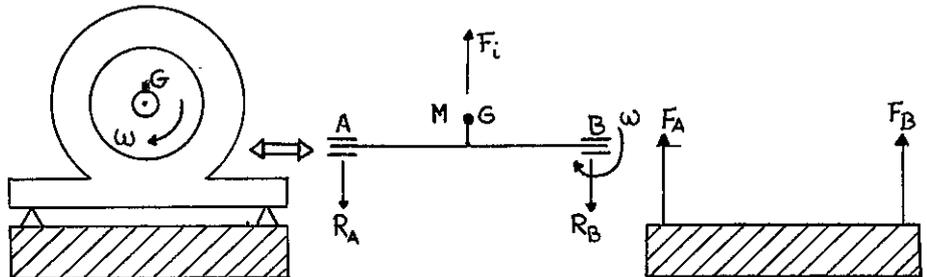
A diferencia del caso anterior, en un motor la fuerza resultante sobre el bastidor es cero, (dados los valores de los vectores F'_{21} y F_{41} y F_4 y F''_{21}), pero no así el momento resultante creado por los vectores F_{41} y F'_{21} .

Este momento no nulo, denominado par de vuelco, va variando de un instante a otro por dos motivos:

Por variar F_A (diferente cantidad de combustible dentro del motor) y por variar el ángulo α (diferente posición de la biela). En consecuencia, un motor alternativo (o un compresor) está fuertemente desequilibrado por motivo de las fuerzas exteriores aplicadas (en este caso la inflamación de los gases introducidos).

Ejemplo 4:

Rotor en el que el centro de gravedad no coincide con el centro de giro.



En el momento en el que el c.d.g. está en la posición de la figura, se produce una fuerza de inercia F_i (de módulo $\omega^2 \cdot R \cdot M$ y dirección y sentido el mostrado), que produce sobre el bastidor las fuerzas F_A y F_B . (En este caso, su resultante es igual a F_i , y el momento es nulo, por ser iguales y paralelas F_A y F_B).

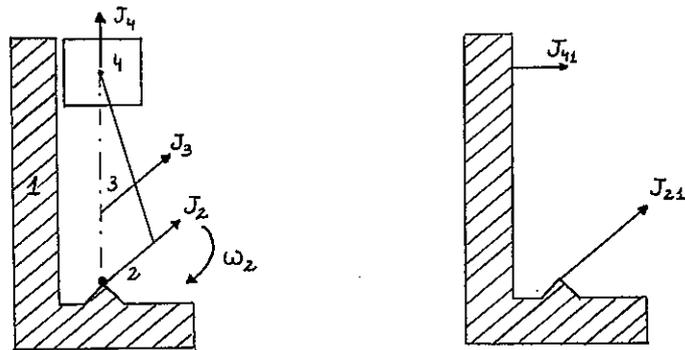
Como F_i es un vector rotatorio, aun cuando no varíe su módulo y sentido, si lo hace su dirección, por lo que las fuerzas F_A y F_B

también son rotatorias y por consiguiente, variables en el tiempo .

Por esta causa, el mecanismo está fuertemente desequilibrado.

Ejemplo 5:

Mecanismo biela-manivela-corredera.



En este caso, y prescindiendo de esfuerzos exteriores, las acciones sobre el bastidor son las debidas a las fuerzas de inercia, que hemos llamado J_{41} y J_{21} .

Ambas dan una resultante no nula, y un momento no nulo (excepto respecto del punto de intersección). Estas fuerzas varían intensamente de un instante a otro, en módulo, dirección y sentido, al variar la aceleración de los puntos de los diferentes miembros.

En consecuencia, el mecanismo está fuertemente desequilibrado por esta causa.

Ejemplo 6:

En este punto sólo queremos señalar que el desequilibrio se debe generalmente a los dos efectos (fuerzas exteriores y de inercia) obrando conjuntamente.

- En este estudio que estamos haciendo del desequilibrio de los mecanismos también hay otro aspecto que interesa resaltar. En efecto, en los casos vistos en los ejemplos 2, 3 y 5, los desequilibrios tienen su origen en el diseño del mecanismo, mientras que en el caso 4, el desequilibrio se debe a un defecto constructivo (puesto que evidentemente con una adecuada construcción, el centro de gravedad debería coincidir con el eje de giro y en consecuencia, la fuerza de inercia sería nula).

Quiere decir esto, simplemente, que una de las causas del desequilibrio de mecanismos está en los propios procesos de fabricación.

NOTA: En el caso de rotores, las tolerancias de fabricación se ajustan todo lo posible, manteniendo los costos entre límites admisibles. Sin embargo, a veces resulta más económico fabricar piezas con una cierta tolerancia en su centro de gravedad, y luego someterlas a un procedimiento de equilibrado.

1.3.- EFFECTOS DEL DESEQUILIBRIO DE MECANISMOS

- En términos generales, y dado que el desequilibrio produce fuerzas y momentos variables sobre el bastidor, sus efectos son producir vibraciones sobre el mismo (vibraciones excitadas), y en consecuencia, sobre los apoyos o bancadas.

Evidentemente, estas vibraciones serán tanto más peligrosas cuanto más próximas estén a algunas de las frecuencias naturales del sistema, dado que se producirán fenómenos de resonancia.

(Téngase presente que el bastidor de una máquina siempre es un sistema elástico, susceptible de vibrar en los modos correspondientes).

- Evidentemente, los efectos del desequilibrio pueden variar ampliamente de una máquina a otra, pudiendo adelantarse que suelen ser mucho más importantes los efectos de las fuerzas de inercia que los de las fuerzas exteriores, estando los primeros íntimamente ligados a la velocidad del mecanismo.

A título de ejemplo, un rotor con una masa desequilibrada de 100 gramos, situada a un metro de distancia del eje de giro, y girando a 30 r.p.m., origina una fuerza sobre el bastidor de 1 Newton, mientras que si girase a 30.000 r.p.m., la fuerza sería ¡1 millón de Newtons!.

(Téngase presente que hoy son corrientes velocidades de motores alternativos de 10.000 r.p.m. y más, en turbinas de 20.000 r.p.m. o más, llegándose en giroscopios, centrifugadoras, etc, a más de 40.000 r.p.m.)

-En general, los efectos del desequilibrio pueden concretarse en:

- Presiones (variables) muy elevadas en los cojinetes de apoyo de los miembros móviles. Esto trae problemas en cuanto a la lubricación de los cojinetes (sobre todo, en los de fricción), dando lugar a desastes y roturas de los mismos.

- Acciones sobre el bastidor elevadas, que puedan conducir a desplazamientos del mismo, rotura de sus anclajes, etc.

- Rotura de piezas por fatiga del material (bastidor, suspensiones, bancadas), siendo tanto más peligrosas cuando ocurren en elementos giratorios de alta velocidad.

- Posibilidades de aflojamientos en tornillos, chavetas, etc, con las consiguientes consecuencias de roturas posteriores.

- Desvalorizaciones de las máquinas, por las causas ya señaladas.

- Pérdidas de precisión en el trabajo de las máquinas, debidas a las trepidaciones de las mismas (muy negativas en el caso de máquinas herramientas e instrumentos de medición)

- Pérdida de confort (en los usuarios) y de seguridad en el trabajo (por parte de los operarios).

(Una vibración excesiva pueda hacer inmanejable una máquina, impedir la lectura de instrumentos, etc.)

- Ruidos molestos, que pueden causar perjuicios a los usuarios o a personas próximas.

- Evidentemente, el desequilibrio no siempre tiene una connotación negativa. Hay veces en que se busca deliberadamente, tal como ocurre en cribas, alimentadores vibratorios, etc.

- En todo caso, como efecto indeseable ha de evitarse a todo costa, y ello es lo que veremos al hablar de equilibrado.

1.4.- CLASIFICACION DEL DESEQUILIBRIO EN MECANISMOS

- Desde un punto de vista experimental el desequilibrio en un mecanismo puede ser estático o dinámico, o ambos conjuntamente.

- Se dice que un mecanismo está en desequilibrio estático cuando al pararlo en cualquier posición, no queda en reposo.

Ello significa, evidentemente, que el centro de gravedad del conjunto no pasa por un punto fijo, y el mecanismo se mueve hasta que tal punto se sitúe en la cota más baja posible.

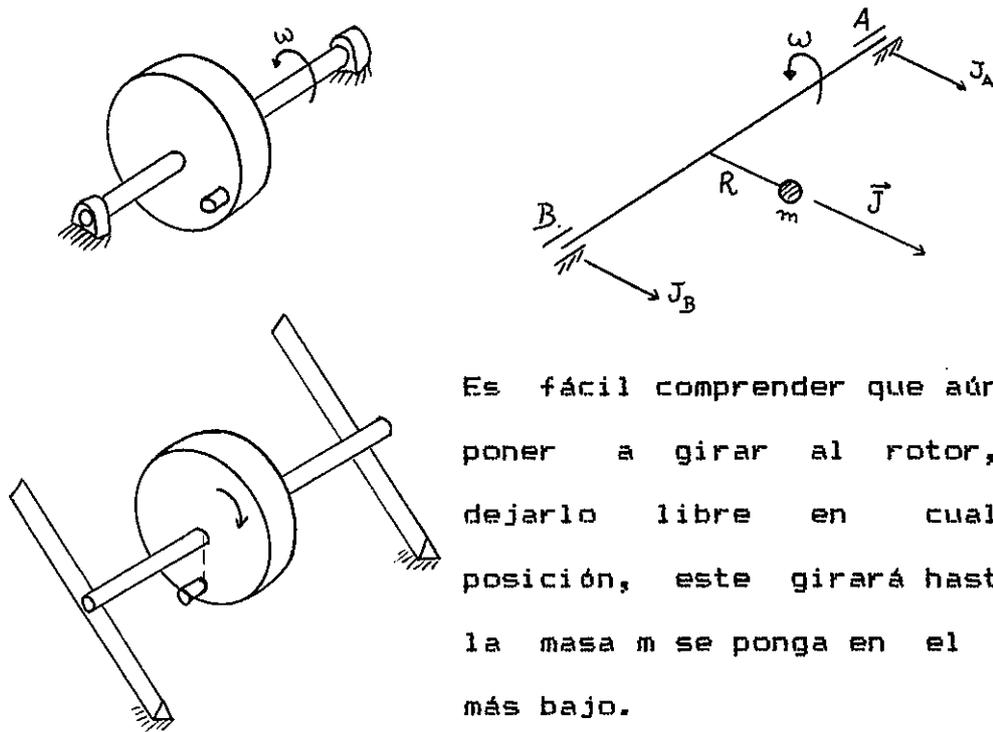
(Evidentemente, si tal cosa no ocurre el mecanismo estará en equilibrio estático).

- Se dice que un mecanismo está en desequilibrio dinámico cuando al ponerlo en movimiento, las fuerzas y los momentos sobre el bastidor no son nulos, y además, varían en el tiempo a pesar de que exista previamente un equilibrio estático.

NOTA: Los nombres de estático y dinámico provienen de que pueden detectarse con una prueba "estática" el primero, y "dinámica" o en movimiento, el segundo.

NOTA: Si nos referimos al mecanismo más sencillo, cual es un rotor giratorio apoyado sobre un bastidor por medio de

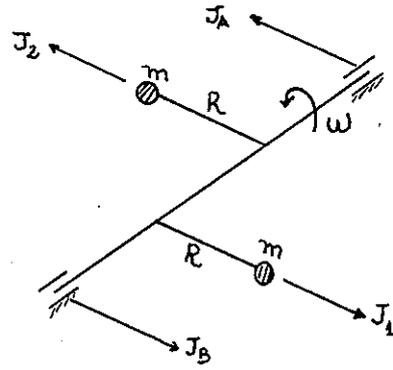
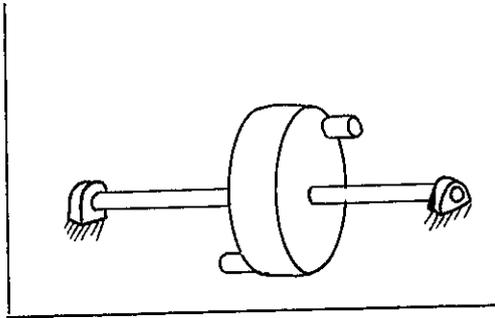
unos cojinetes, podemos comprender fácilmente estos conceptos: En las primeras figuras tenemos un rotor con una masa desequilibrada m , a la distancia R del eje de giro.



Es fácil comprender que aún sin poner a girar al rotor, al dejarlo libre en cualquier posición, este girará hasta que la masa m se ponga en el punto más bajo.

Experimentalmente puede hacerse como se ve en la figura.

Sin embargo, en el rotor representado en las figuras siguientes, el centro de gravedad está en eje de giro y una prueba estática no detectaría la presencia de desequilibrio. Al hacerle girar aparece un par no equilibrado que da lugar a unas reacciones no nulas sobre el bastidor, y además, variables en el tiempo, al ser vectores giratorios.



- Evidentemente, puede existir simultáneamente desequilibrio estático y dinámico. Por otro lado, es evidente que todo desequilibrio estático comporta otro dinámico.

2.1.- CONCEPTO DE EQUILIBRADO DE MECANISMOS

- Según se desprende del concepto de "desequilibrio" de un mecanismo, para que un mecanismo esté equilibrado deben ser nulos (o constantes), en todo momento, las acciones sobre el bastidor, tanto las producidas por las fuerzas exteriores aplicadas, como por las fuerzas de inercia debidas al movimiento de los diferentes miembros.

En otras palabras, la resultante y el momento resultante sobre el bastidor de las fuerzas exteriores, así como la resultante y el momento resultante de las fuerzas de inercia han de ser vectores de módulo, dirección y sentido constantes en el tiempo, o nulos.

Cuando tal cosa ocurre, el mecanismo se dice que está equilibrado en sentido amplio.

- Sin embargo, lo que se entiende por "equilibrado de mecanismos" es un concepto algo más restringido, como veremos a continuación al analizar las posibilidades de eliminación de todos estos efectos indeseables sobre el bastidor.

- La eliminación de los efectos producidos por las fuerzas estáticas casi nunca puede lograrse, en la mayor parte de los mecanismos, pues como se ha dicho, es consecuencia de las variaciones experimentadas por las fuerzas exteriores aplicadas y por los cambios de posición del mecanismo.

Sin embargo, en muchos mecanismos puede lograrse una cierta "aminoración" que hace que sus efectos sean poco importantes.

Por ejemplo, en el mecanismo básico de un motor (corredera-biela-manivela), el valor del "par de vuelco" puede disminuirse aumentando en lo posible la relación entre la longitud de la biela y la de la manivela.

Además, existen muchas máquinas en que el bastidor es común al mecanismo que suministra el par motor y el par resistente por lo cual los efectos "exteriores" del "par de vuelco" desaparecen (por ejemplo, un motor que acciona un alternador).

Finalmente hemos de considerar también que en casi todos los mecanismos rotativos, el "par de vuelco" tiene un valor constante, por lo que no es causa de desequilibrio. (Por ejemplo, en un grupo turbina hidráulica-generador, el "par de vuelco" es constante en periodos de marcha normal. En periodos de aceleración o frenado, el "par de vuelco" varía, pero no en forma cíclica, sino progresiva, por lo que se produce vibraciones por este motivo).

- En cuanto a la eliminación de los efectos producidos por las fuerzas de inercia, cuyos efectos sobre el mecanismo son por lo general mucho más importantes, sobre todo en

mecanismos de alta velocidad, podemos decir desde ahora que puede lograrse totalmente, aunque con mayor o menor facilidad.

Los procedimientos para eliminar los efectos de las fuerzas de inercia sobre el bastidor constituyen el auténtico problema de "equilibrado de los mecanismos".

En resumen, definiremos el "equilibrado de los mecanismos" como todos aquellos procedimientos encaminados a la anulación (o aminoración) de los efectos sobre el bastidor (fuerzas y momentos) producidos por las fuerzas de inercia originadas en los miembros en movimiento.

2.2.- FORMAS DE PROCEDER AL EQUILIBRADO DE MECANISMOS

- Antes señalamos que el equilibrado consistía en la anulación (o aminoración) de los efectos de las fuerzas de inercia sobre el bastidor.

En efecto, no siempre es posible, ni conveniente (por razones principalmente económicas) lograr un equilibrado total de los mecanismos.

En consecuencia, podemos distinguir entre dos formas de proceder al equilibrado: Una que sería el equilibrado total, es decir la anulación de las fuerzas y momentos debidos a la inercia que actúan sobre el bastidor. Otra que podríamos considerar un equilibrado parcial y que consistiría en la aminoración (pero no anulación) de las acciones sobre el bastidor debidas a la inercia de los miembros en movimiento.

- Tres son los modos de lograr el equilibrado total de un mecanismo:

1º.- Colocación de masas adicionales en cada miembro (en realidad, modificando su centro de gravedad y su momento de inercia), de manera que la fuerza y momento de inercia resultantes sobre el bastidor (debida a este miembro) sean nulas.

29.- Distribución conveniente de los miembros en movimiento del mecanismo (efectuando un rediseño del mismo, siempre que ello fuera posible) de manera que se compensen mutuamente las fuerzas de inercia de los diferentes miembros, y en conjunto produzcan una resultante y un momento nulos sobre el bastidor.

39.- Colocación de miembros adicionales al mecanismo de forma que el conjunto de las fuerzas de inercia (incluidas las de los miembros añadidos) den una resultante y un momento sobre el bastidor nulos.

NOTA: Obsérvese que el primer método intenta equilibrar un mecanismo ya construido, actuando sobre cada uno de sus miembros por separado (modificando su "forma", de alguna manera), pero sin modificar el diseño cinemático del mismo.

Sin embargo, el 29 y 3er métodos intentan el equilibrio del mecanismo actuando sobre su propio diseño, es decir, modificando el mecanismo original.

Así mismo, entre el 29 y 3er método también existen diferencias esenciales: el 39 puede aplicarse a cualquier mecanismo (se emplea extensamente en motores de pocos cilindros), mientras que el 29 no siempre puede ser aplicado. (En la medida que el mecanismo pueda perder la función para la que fue diseñado).

- En cuanto al equilibrado parcial de mecanismos, dos son los métodos que pueden emplearse para conseguirlo:

19.- Empleo de materiales de baja densidad (aluminio, magnesio, plásticos, etc.) que reduzcan el valor de las fuerzas de inercia de los miembros con ellas construidas.

(El empleo de pistones y bielas de aluminio y magnesio está muy extendido en motores alternativos rápidos, como motocicletas y automóviles de competición).

20.- Realización de un adecuado diseño cinemático del mecanismo para reducir lo más posible las aceleraciones de aquellos miembros que por su elevada masa resulten mayores las fuerzas de inercia.

- Como es obvio, este estudio se encamina a mostrar los métodos para lograr un equilibrado total de los mecanismos.

2.3.- CLASIFICACION DEL EQUILIBRADO DE MECANISMOS

NOTA: A continuación vamos a realizar una clasificación del equilibrado de mecanismos, aunque a solo efectos de sistematizar su estudio. La comprensión total de esta clasificación sólo puede obtenerse a medida que se vayan viendo los conceptos en ella relacionados.

19.- Según el fenómeno físico detectado:

- Equilibrado estático (detectado el desequilibrio por una prueba estática), que consiste en una restructuración de miembros y masas del mecanismo de manera que el centro de gravedad del conjunto pase por un punto fijo durante todo el ciclo del movimiento.

-Equilibrado dinámico (detectado el desequilibrio por medio de una prueba dinámica, o con el mecanismo en movimiento), que consiste en la restructuración de miembros y masas de manera que los efectos sobre el bastidor (debido a las fuerzas de inercia) sean nulos.

20.- Según los miembros a los que se aplica el procedimiento:

- Equilibrado de miembros aislados: manivelas (rotores), bielas y correderas.

- Equilibrado de mecanismos en su conjunto.

39.- Según el conocimiento del desequilibrio:

- Equilibrado cuando se conoce el desequilibrio (por ejemplo, equilibrado de una masa puntual giratoria, conocida, con radio de giro conocido)
- Equilibrado cuando no se conoce el desequilibrio (por ejemplo, equilibrado de un rotor largo, en donde no se conocen los puntos en que se originan los desequilibrios, ni el valor de estos).

49.- Según los medios empleados para equilibrar:

- Equilibrado con máquinas de equilibrar.
- Equilibrado "in situ".

A su vez, puede hacerse con medios mecánicos, electrónicos, etc.

59.- Según el procedimiento empleado para equilibrar:

- Equilibrado en un plano (aplicado sólo a rotores "estrechos", como hélices, ruedas de gran diámetro comparado con su ancho, etc.)
- Equilibrado en dos planos (aplicado a rotores "largos")

69.- Según la rigidez de los miembros a equilibrar:

- Equilibrado de miembros rígidos.

- Equilibrado de miembros flexibles.

(Este último caso sólo se aborda, en la práctica, para el caso de rotores flexibles).

3.1.1.- INTRODUCCION GENERAL AL EQUILIBRADO DE MIEMBROS EN ROTACION

- Antes de iniciar el estudio del equilibrado de miembros en rotación es preciso aclarar algunos conceptos que ayudarán a una mejor comprensión de este importantísimo tema en el diseño y mantenimiento de máquinas.

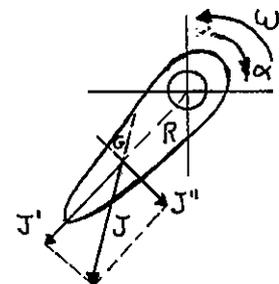
10.- Observaciones sobre la aceleración del miembro en rotación:

En todo lo que vamos a ver de equilibrado de miembros en rotación se supone que la velocidad de giro es constante (e igual a la velocidad de régimen del rotor).

En ese caso, la aceleración tiene la dirección del radio, y sentido hacia el eje de giro (aceleración normal), con lo cual la fuerza centrífuga tiene la dirección del radio, sentido "hacia afuera", y módulo $\omega^2 \cdot R \cdot m$

Si la $\omega \neq \text{cte.}$, es decir, si la aceleración angular α no es nula, aparecería una componente tangencial de la fuerza de inercia J''

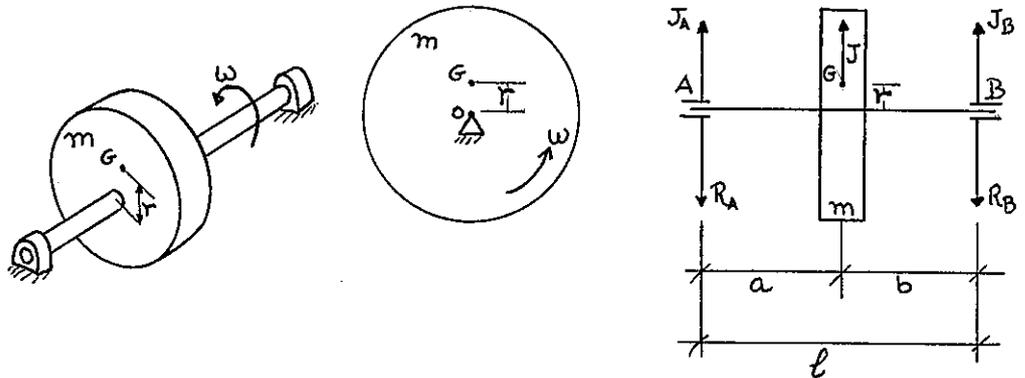
(además de la normal J'), cuyo sentido es opuesto al de α y cuyo módulo vale como sabemos $\alpha \cdot R$.



Esta componente no ha de considerarse a efectos de equilibrado. Es la que da lugar al "par acelerador", y su efecto es modificar el "par motor".

20.- Ampliación de los conceptos de equilibrio estático y dinámico de rotores. Concepto de rotor "corto" y "largo":

- En el mecanismo de la figura se supone un rotor de masa m , con su centro de gravedad G distante r m . del eje de giro.



Si se supone que el eje tiene un masa despreciable, y que el disco es estrecho tendremos:

$$|J| = m \cdot r \cdot \omega^2$$

$$|R_A| = (b/l) \cdot m \cdot r \cdot \omega^2 = |J_A|$$

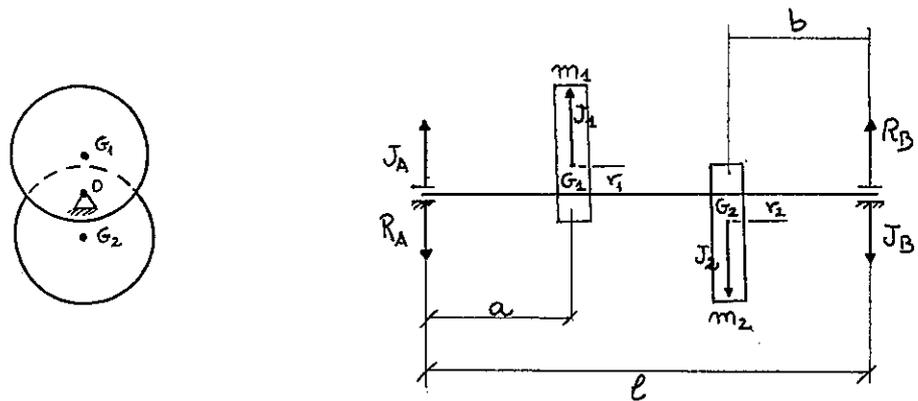
$$|R_B| = (a/l) \cdot m \cdot r \cdot \omega^2 = |J_B|$$

La fuerza total sobre el bastidor será:

$$|J_A| + |J_B| = (a+b/l) \cdot m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot r \cdot \omega^2$$

Las fuerzas J_A y J_B serán vectores de módulo constante, pero rotatorios. En consecuencia, existe un desequilibrio. Tal desequilibrio puede detectarse por un prueba estática (el rotor se moverá por sí sólo hasta que el centro de gravedad G se sitúe en el punto inferior). Por tal razón se dice que el rotor tiene "desequilibrio estático".

- En el mecanismo de la figura se supone un rotor con dos discos de masas m_1 y m_2 , con sus correspondientes centros de gravedad G_1 y G_2 separados r_1 y r_2 del eje de giro, y en posiciones opuestas.



Las fuerzas de inercia y las reacciones serán:

$$J_1 = m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2$$

$$J_2 = m_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2$$

$$|R_A| = (\omega^2 / l) \cdot [m_1 \cdot r_1 \cdot (l - a) - m_2 \cdot r_2 \cdot b] = |J_A|$$

$$|R_B| = (\omega^2 / l) \cdot [m_2 \cdot r_2 \cdot (l - b) - m_1 \cdot r_1 \cdot a] = |J_B|$$

Las fuerzas sobre el bastidor J_A y J_B tienen módulo constante, pero son giratorias.

Sin embargo, si $m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$, entonces:

$$|\bar{J}_A| = |\bar{J}_B| = \frac{m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2}{1} \cdot [1 - (a + b)]$$

(siendo ahora \bar{J}_A y \bar{J}_B vectores de direcciones opuestas e igual magnitud). En este caso el centro de gravedad del conjunto se sitúa sobre el eje de giro (momento estático cero) por lo cual este equilibrio no puede ser detectado por una prueba estática.

Las fuerzas giratorias sobre el bastidor sólo aparecerán cuando el rotor se ponga a girar. Por tal razón se dice que el rotor tiene "desequilibrio dinámico".

- Estos conceptos pueden generalizarse aún más, enunciándolos en el modo siguiente:

"Desequilibrio estático es aquel en que el eje de rotación es paralelo al eje central de inercia, pero no coincide con él."

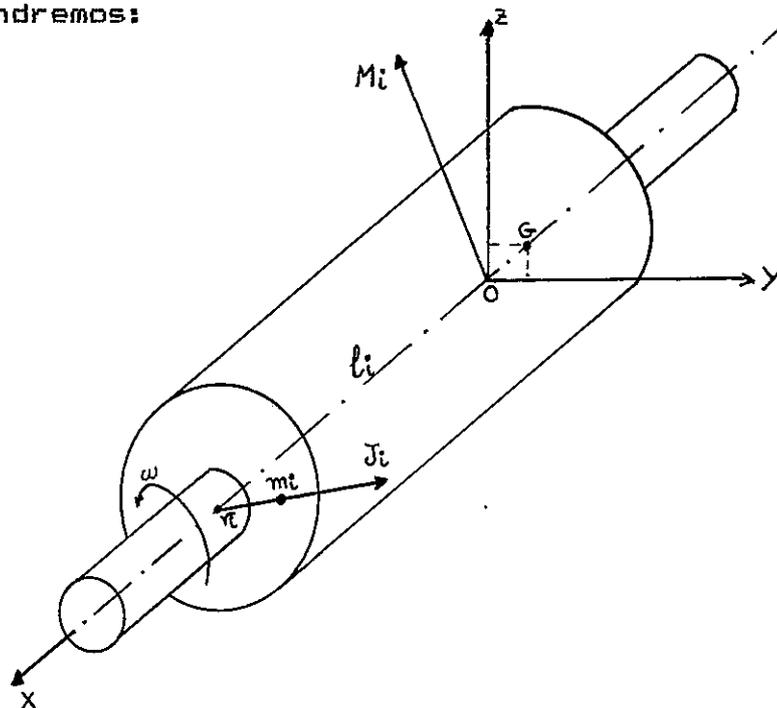
"Desequilibrio dinámico es aquel en el que el eje central de inercia corta al eje de rotación precisamente en el centro de gravedad"

"Desequilibrio general es aquel en el que el eje central de inercia corta al eje de rotación, pero no en el centro de gravedad"

Matemáticamente, estas definiciones tienen una sencilla justificación.

En efecto, sea el rotor de la figura, que gira a la velocidad ω , que tiene masa m , y su centro de gravedad es G . El sólido puede suponerse compuesto por una serie de discos de masa m_i , cuyos respectivos centros de gravedad están separados del eje de giro la magnitud r_i .

Tomando unos ejes de coordenadas que pasen por el centro de gravedad, como se ve en la figura, tendremos:



- Fuerza de inercia resultante:

$$\bar{J} = \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \bar{r}_i$$

- El momento resultante de las fuerzas de inercia elementales respecto del punto O será:

$$|\bar{M}_i| = m_i \cdot r_i \cdot \omega^2 \cdot l_i$$

Su dirección será perpendicular al plano formado por \bar{r}_i (o J_i) y \bar{l}_i , tal como se ve en la figura.

El momento resultante de las fuerzas de inercia será:

$$\bar{M} = \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i (\bar{l}_i \cdot \bar{r}_i)$$

- El vector $\sum m_i \cdot r_i$ es el momento estático, y como sabemos, es igual al producto de toda la masa por la distancia del centro de gravedad total al eje de giro.

$$\bar{J} = \omega^2 \cdot \sum m_i \cdot \bar{r}_i = \omega^2 \cdot m \cdot \bar{r}_O \quad [1]$$

(\bar{r}_O es el vector que representa la distancia del c.d.g. respecto al eje de giro)

- El vector $\sum m_i \cdot (\bar{l}_i \times \bar{r}_i)$ es el momento de inercia de las masas respecto del eje x y del plano zy , llamándole I_{r_1} , tendremos:

$$\bar{M} = \omega^2 \cdot \bar{I}_{r_1} \quad [2]$$

- Para que no hubiese ningún efecto sobre el bastidor habría de cumplirse:

$$m \cdot \bar{r}_G = 0 \quad [3]$$

$$\bar{I}_{r_1} = 0 \quad [4]$$

La condición [3] sólo se cumple cuando $r_G = 0$, es decir, cuando el centro de gravedad se encuentra en el eje de giro. La condición [4], sólo se cumple, como sabemos por mecánica, respecto a uno cualquiera de los ejes principales de inercia del cuerpo. En consecuencia, sólo se cumplirá cuando el eje de giro coincide con uno de los principales de inercia.

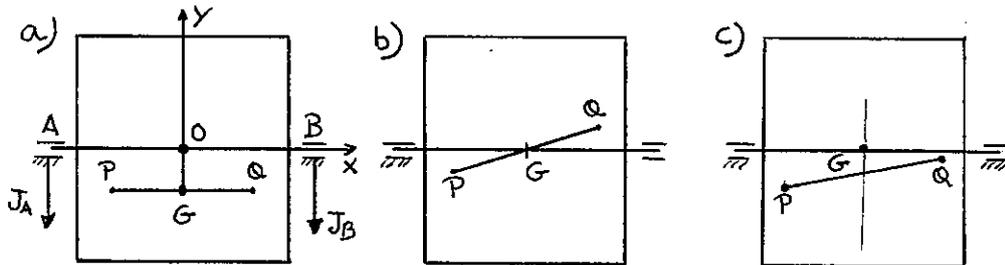
Las condiciones [3] y [4] se cumplirán simultáneamente cuando el eje de giro coincida con el principal de inercia que pase por el centro de gravedad, es decir, sea el eje central y principal de inercia. Si se cumple [4] pero no [3], el rotor tiene "exclusivamente" desequilibrio estático.

Si se cumple [3] pero no [4], el mecanismo tiene "sólo" desequilibrio dinámico.

NOTA: Gráficamente se han representado los tres casos en las figuras:

PQ = eje principal de inercia.

(si pasa por G, eje central y principal)

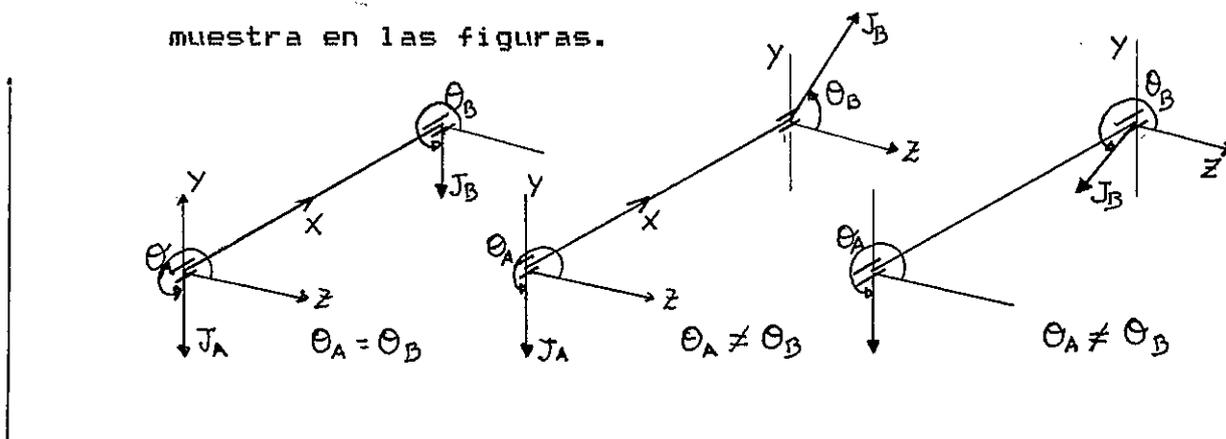


desequilibrio puramente estático

desequilibrio puramente dinámico

desequilibrio general

Obsérvese en las figuras anteriores que si el rotor se dividiera en dos discos, de centros de gravedad respectivamente P y Q, estos tendrían que estar necesariamente en el mismo plano XOY, en el caso a) pero no así en los casos b) y c). Tal cuestión implica que los vectores J_A y J_B están en fase en el caso a), y no lo estarán en los casos b) y c), como se muestra en las figuras.



- La expresión [4] anterior se presta a realizar una consideración interesante: En efecto, en rotores "cortos", en donde l_1 sea siempre pequeño, el valor \bar{I}_{-1} , y con él, el momento de las fuerzas de inercia \bar{M} , también será pequeño. En consecuencia, los mecanismos que monten rotores de este tipo puede decirse que presentarán desequilibrio "sólo estático". Tal es el caso de volantes, ventiladores, hélices, poleas, ruedas de automóvil, etc.

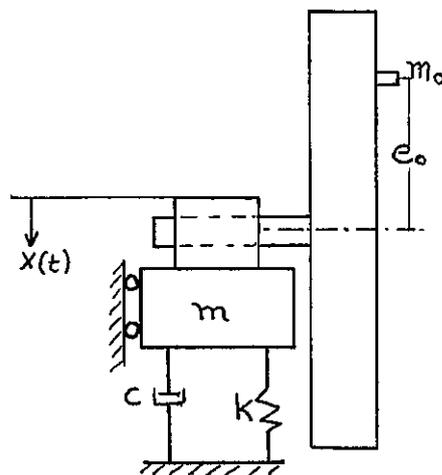
Por el contrario en rotores largos es más difícil que se de un desequilibrio sólo estático, siendo lo más frecuente un desequilibrio general, o en el mejor de los casos uno sólo dinámico. Tal es el caso de cigüeñales, rotores de turbinas y compresores, etc.

30.- Vibraciones causadas por rotores desequilibrados. Medida del desequilibrio

- Tal como veremos más adelante, la medida de la amplitud y fase originadas sobre un bastidor por un rotor desequilibrado es uno de los sistemas más empleados para el posterior equilibrado de los mismos. Por ello, es conveniente recordar algunos aspectos relacionadas con las vibraciones causadas por rotores desequilibrados.

- Imaginemos el rotor de la figura, soportado en unos cojinetes unidos al bastidor con una rigidez K y un amortiguamiento C .

La masa del bastidor más el rotor es m , mientras que la masa desequilibrada es m_0 , a la distancia e_0 del eje de giro.



(Intencionadamente hemos dibujado un rotor "corto" para indicar que los momentos producidos por el desequilibrio sobre el conjunto son despreciables)

- Como sabemos de la teoría de vibraciones, se trata de un sistema de 1 GDL, excitado por la fuerza de variación armónica.

$$J = I_m \cdot \{ m_0 \cdot e_0 \cdot \omega_e^2 \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} \}$$

siendo ω_e la velocidad de rotación del rotor. La ecuación diferencial que rige el movimiento del bastidor será, según sabemos:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = I_m \cdot \{ m_0 \cdot e_0 \cdot \omega_e^2 \cdot e^{i \cdot \omega_e \cdot t} \}$$

Dejando sin considerar el movimiento transitorio, el permanente será de la forma:

$$x_p(t) = X \cdot e^{i \cdot (\omega_E \cdot t + \varphi)}$$

siendo la amplitud de este movimiento permanente:

$$X = \frac{m_0 \cdot e_0 \cdot \omega_E^2}{K \cdot \sqrt{[1 - (\omega_E/\omega_n)^2]^2 + (2\epsilon \cdot \omega_E/\omega_n)^2}} \quad [11]$$

y el ángulo de desfase entre la fuerza de inercia J y el movimiento del bastidor

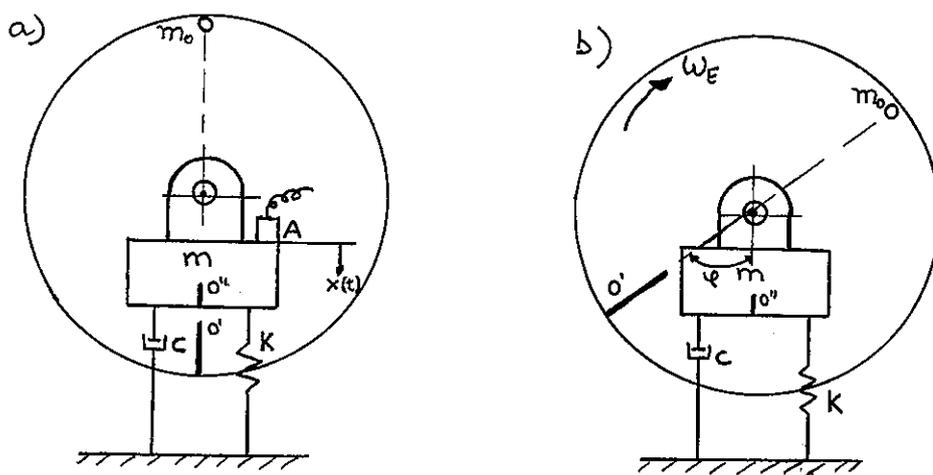
$$\varphi = \text{Tag}^{-1} \frac{(2\epsilon \cdot \omega_E/\omega_n)^2}{1 - (\omega_E/\omega_n)^2} \quad [12]$$

siendo $\omega_n = \sqrt{K/m}$ la frecuencia natural del bastidor y $\epsilon = C/C_r = C/(2m \cdot \omega_n)$ la relación de amortiguamiento.

- Como se ve, para unos valores dados de ω_E , K y C , la amplitud es proporcional al valor del desequilibrio $m_0 \cdot e_0$, por lo cual la medida de esta es a su vez la medida del grado de desequilibrado del rotor.

(Recuérdese que la medida de esta amplitud puede realizarse con un acelerómetro, vibrómetro, o sismógrafo, etc.)

- Igualmente, para cada valor de ω_E y ω_n , el ángulo $\bar{\alpha}$ tienen un solo valor, independiente del desequilibrio $m_0 \cdot e_0$, siendo de gran interés en el equilibrado de rotores la interpretación de este ángulo.



En la figura a) se ha representado el rotor en posición inmóvil, y se han efectuado dos marcas: una fija al bastidor, O'' , y otra fija al rotor O' , ambas enfrentadas en ese momento. También se ha colocado sobre el bastidor un acelerómetro, que mide los desplazamientos del mismo. Este acelerómetro debe encender una lámpara estroboscópica que emitirá un destello cada vez que la amplitud del movimiento del bastidor sea máxima.

La figura b) representa el rotor moviéndose a la velocidad ω_E . Ahora ocurrirá que cuando la masa m_0 pase por el punto más alto, la masa m se estará

moviendo hasta arriba, pero no alcanzará su máximo desplazamiento hasta pasado un cierto tiempo. En consecuencia, cuando el acelerómetro detecte la amplitud máxima y encienda la luz del estroboscopio, veremos la marca 0° sobre el rotor en la posición de la figura, con el ángulo de desfase ϕ

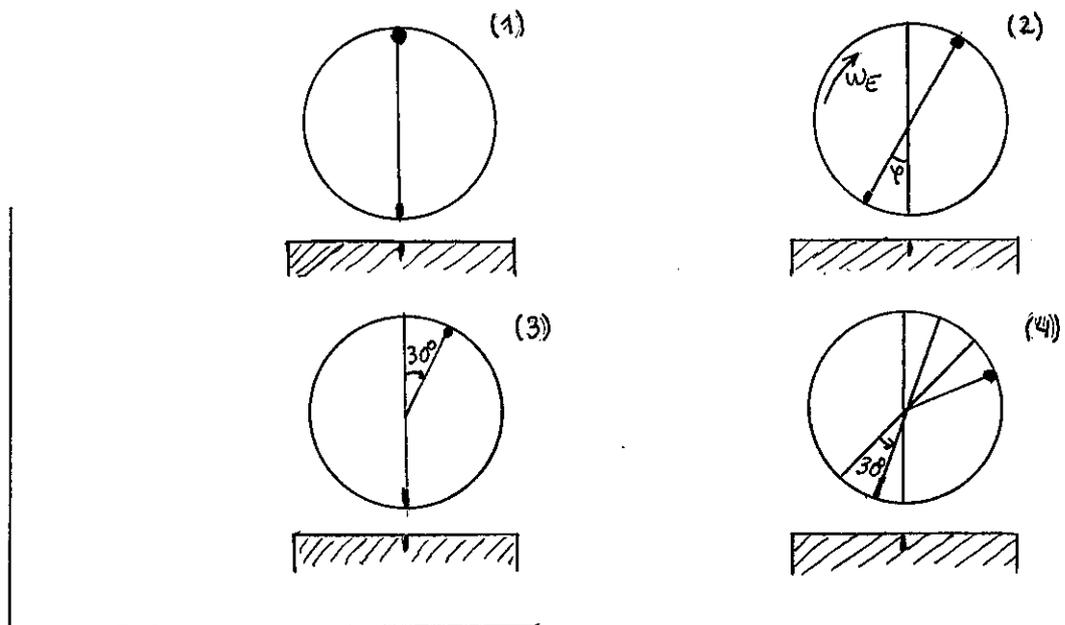
NOTA: Un aspecto que puede ser interesante se refiere al análisis de lo que ocurre cuando se desplaza de su posición inicial la masa desequilibrada.

La figura 1 representa la masa desequilibrada en su posición original, y las dos marcas. La figura 2 representa la posición en que se ve la marca cuando el rotor se mueve con la velocidad ω_e y se le ilumina con el estroboscopio.

La figura 3 representa el rotor, con la misma marca anterior, pero en el cual la masa desequilibrada m_0 se ha desplazado un ángulo de 30° hacia la derecha, respecto a la posición anterior.

La figura 4 representa la posición en que se ve la misma marca, cuando se la ilumina con el estroboscopio. Como se ve, la marca sobre el

rotor se ha desplazado 30° , pero en sentido contrario al desplazamiento de la masa.

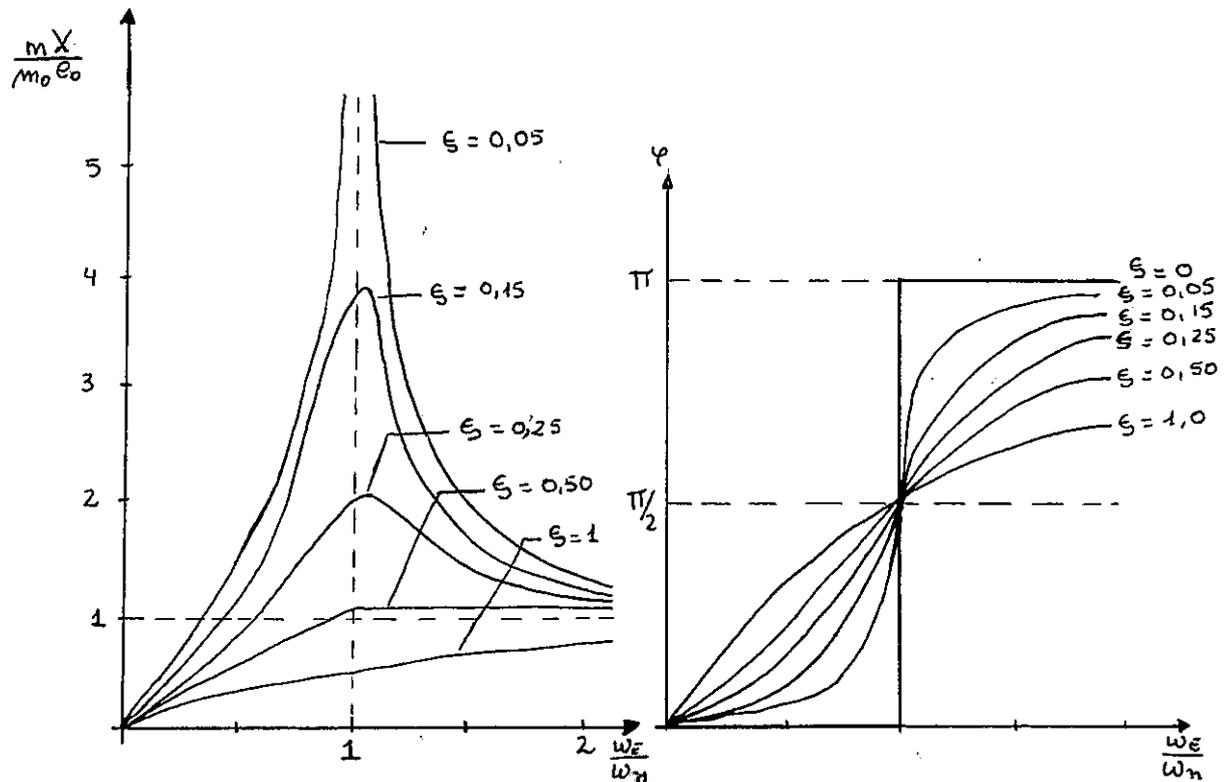


- Por último se han representado en las figuras las variaciones de la amplitud y del ángulo de desfase, para diferentes valores de ω_e .

En realidad, se ha representado la expresión:

$$\frac{m \cdot X}{m_0 \cdot e_0} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\epsilon \cdot r)}} \quad \text{siendo } r = \omega_e / \omega_n$$

Como se observa, para una C , K y m dadas, la amplitud depende del producto $m_0 \cdot e_0$, y a su vez, de la velocidad de rotación del rotor. Para ω_e bajas, la amplitud de la vibración y el ángulo de desfase son pequeños.



Los máximos desplazamientos se producen para $\omega_E = \omega_n$ (resonancia). En este momento el ángulo de desfase es $\pi/2$, para todos los valores de C .

Cuando ω_E es muy grande, la amplitud no se anula (el cociente $X \cdot m / x_0 \cdot m_0$ tiende a 1), y el ángulo de desfase se aproxima a 180° .

Puede observarse que en las proximidades de la resonancia ($\omega_E \approx \omega_n$), el ángulo de desfase varía muy rápidamente (por esta razón nunca se debe equilibrar un rotor en las proximidades de la velocidad de resonancia).

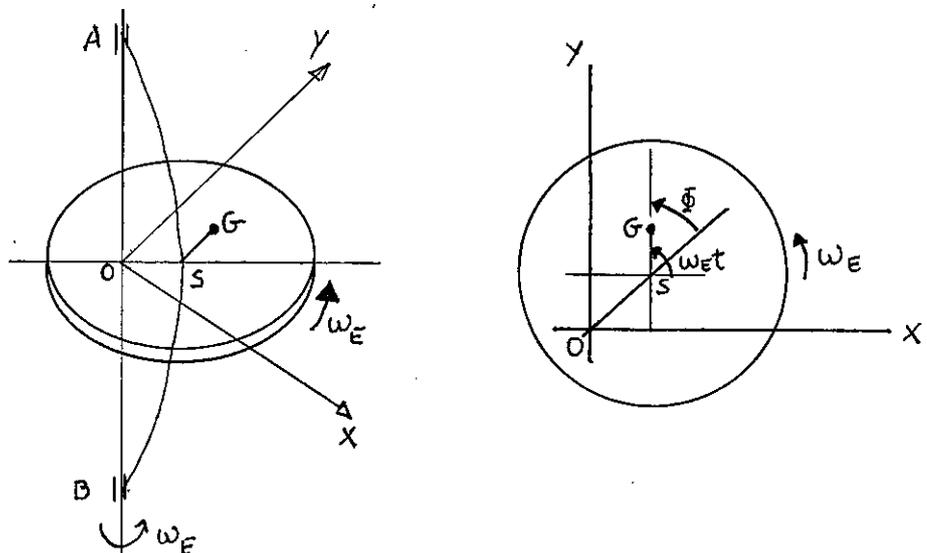
40.- Efectos de la flexibilidad del rotor

- Aun cuando sin entrar en un estudio detallado del comportamiento en marcha de rotores (para lo cual remitimos al lector a la bibliografía existente, si es preciso reflejar algunos conceptos que nos hagan comprender mejor los aspectos relacionados con el equilibrado de rotores flexibles.

- Imaginemos el rotor de la figura, consistente en un árbol flexible (de rigidez K_r y amortiguamiento C_r y cuya masa se supone concentrada en el disco central, de valor M . Sea S el centro geométrico del rotor y G su centro de gravedad (excentricidad = e).

Al girar con velocidad ω_E , el árbol, este se flexa, excitado por la fuerza de inercia que resulta del desequilibrio.

Trazando unos ejes coordenados como se ve en la figura, con centro en O (sobre la línea de apoyos, eje



teórico del árbol no flexionado) tendremos que durante el giro del árbol a la velocidad w_E , el centro del disco S describirá una circunferencia (el árbol "voltea", "cabecea").

La velocidad con la que se desplaza el centro S alrededor de O se llama "velocidad de cabeceo" ($\dot{\theta}$), y puede ser igual o diferente a la de giro del árbol (w_E).

- Si el árbol es circular, ($K_{rx} = K_{ry}$), se demuestra que la amplitud según los ejes OX y OY vale:

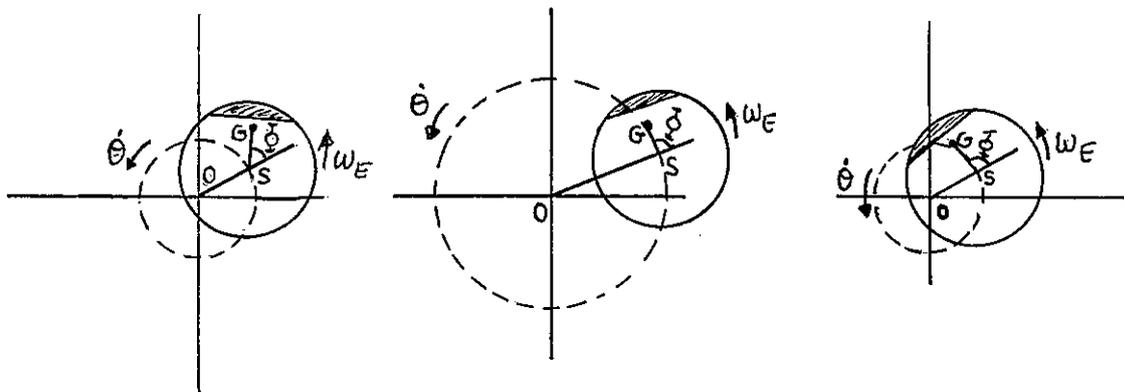
$$X = Y = \frac{e \cdot r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\epsilon \cdot r)^2}} \quad \begin{aligned} r &= w_E / w_n \\ w_n &= \sqrt{K_r / M} \end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = w_E \text{ (cabeceo sincrónico)}$$

Es decir, el movimiento de S alrededor de O se efectúa a la misma velocidad que el árbol gira sobre sí mismo.

Sin embargo, la posición que adopta el centro de gravedad, dada por el ángulo $\bar{\theta}$, depende del valor de w_E .

En las figuras se han representado los tres casos posibles:



$$\dot{\theta} = \omega_E$$

$$\omega_E < \omega_n$$

$$\delta < \pi/2$$

$$\dot{\theta} = \omega_E$$

$$\omega_E = \omega_n$$

$$\delta = \pi/2$$

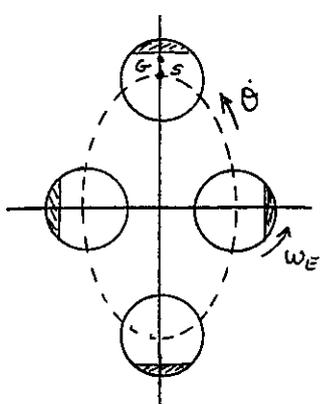
$$\dot{\theta} = \omega_E$$

$$\omega_E > \omega_n$$

$$\delta > \pi/2$$

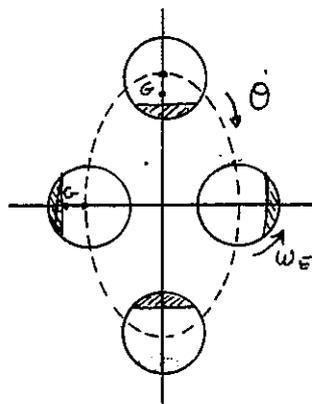
- Si el árbol no es circular (o la rigidez de los apoyos no es la misma en el plano vertical y en el horizontal) entonces $\omega_{nx} \neq \omega_{ny}$ por ser $K_{fx} \neq K_{fy}$.

En este caso, el cabeceo no será sincrónico, y el árbol puede adoptar durante su giro cualquiera de las configuraciones que se ve en las figuras:



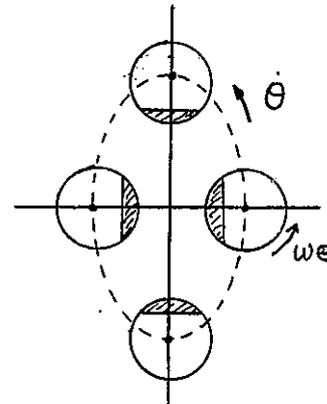
$$\omega_E < \omega_{nx}$$

$$\omega_E < \omega_{ny}$$



$$\omega_E > \omega_{nx}$$

$$\omega_E < \omega_{ny}$$



$$\omega_E > \omega_{nx}$$

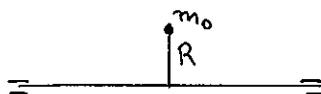
$$\omega_E < \omega_{ny}$$

Como se ve, en este tipo de árboles (o de apoyos) existirán dos "velocidades críticas" (w_{nx} y w_{ny}). En función de esto, la elipse podrá ser más o menos alargada (si se hace trabajar el árbol en una de esas velocidades críticas, el eje mayor de la elipse irá aumentando, de manera que el movimiento "aparente" del árbol se parecerá cada vez más al de una ballesta, pareciendo que el árbol se arquea en el plano).

50.- Clasificación de los rotores a efectos del estudio de su equilibrado:

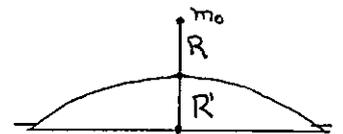
a.- Rotores rígidos: son aquellos en los que su desequilibrio no cambia para cualquier velocidad, dentro de su rango normal de funcionamiento.

b.- Rotores flexibles: son aquellos en los que su desequilibrio se modifica al variar su velocidad de giro.



rígido

$$|J| = m \cdot R \cdot \omega e^2$$



flexible

$$|J| = m_0 \cdot (R + R^2) \cdot \omega e^2$$

Los rotores rígidos pueden clasificarse a su vez en:

a.- Cuasi-flexibles: Son rotores que no pueden considerarse rígidos, pero que se pueden equili-

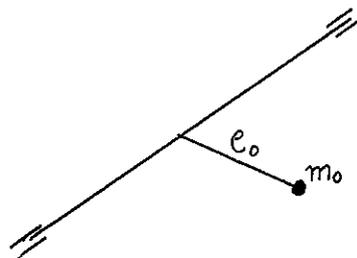
brar completamente dada su poca velocidad de giro.

b.- Flexibles: son aquellos que sólo pueden equilibrarse por métodos especiales para equilibrado de rotores flexibles. A su vez se puede considerar un caso particular de estos, que serían los rotores flexibles de velocidad única, que son aquellos que se equilibran para una sola velocidad de giro.

60.- Medida de la cantidad de desequilibrio en los rotores

- Para una velocidad de giro determinada, el desequilibrio es proporcional, según hemos visto, al producto de $m_0 \cdot e_0$

- Si se trata de una masa puntual conocida, (m_0), como la de la figura, a una distancia del eje de rotación también conocida, (e_0), el valor del desequilibrio será $m_0 \cdot e_0$. Se puede medir por consiguiente en kg·m.



Si se emplea el peso, en lugar de la masa, se suelen emplear las unidades siguientes :

gramo·centímetro (usada bastante, pero no recomendada)

miligramo·metro (recomendada en el S.I.)

onza·pulgada (extendida en la práctica)
gramos·pulgada (también usada en la práctica)

- Si se trata de un rotor con desequilibrio desconocido, si este es corto (desequilibrio sólo estático), su desequilibrio será proporcional a $m \cdot r_0$, siendo m la masa del rotor y r_0 la distancia del c.d.g. al eje de giro. Las unidades de medida pueden ser las mismas.

En cambio, si es largo, o sea, si el desequilibrio es de tipo dinámico, este será proporcional a I_{r1} , por lo que se medirá en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$, o en la práctica, $\text{cN} \cdot \text{cm}^2$.

(En la práctica, esta medida de desequilibrado dinámico no se utiliza, pues normalmente los rotores se equilibran en dos planos, como si fuera un desequilibrio estático en cada uno)

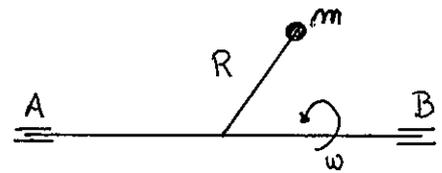
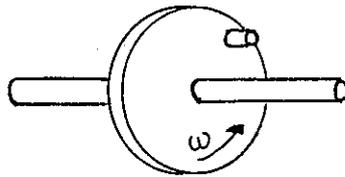
NOTA: Muchas veces el equilibrado se refiere a un descentramiento único e , por lo que se habla de "desequilibrado de x gramos", por ejemplo.

3.1.2.1.1.- EQUILIBRADO DE UNA MASA PUNTUAL EN ROTACION

- Introducción:

Tal como se ve en la figura, este es el caso de un disco delgado perfectamente equilibrado, (disco ideal), al cual se adiciona una masa m , a la distancia R del eje de giro.

Se trata por consiguiente del caso de un desequilibrio estático, en el cual este es totalmente conocido (tanto m , como R).



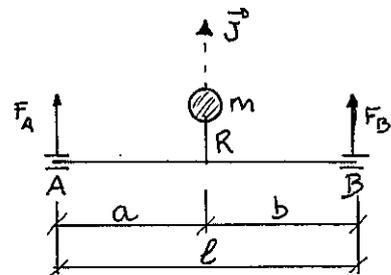
- Efecto sobre el bastidor:

En este caso los efectos sobre el bastidor son dos fuerzas giratorias situadas en A y B, de módulos:

$$|\bar{F}_A| = b/l \cdot |\bar{J}|$$

$$|\bar{F}_B| = a/l \cdot |\bar{J}|$$

$$\text{siendo } |\bar{J}| = m \cdot R \cdot \omega^2$$



Si la velocidad de giro es constante, estos módulos serán también constantes, y como se ve, proporcionales a $m \cdot R$

- Equilibrado:

Equilibrar este desequilibrio es bastante sencillo. Basta colocar una masa m' , en dirección opuesta a la anterior, y a una distancia R' tal que

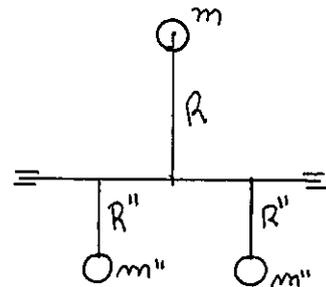
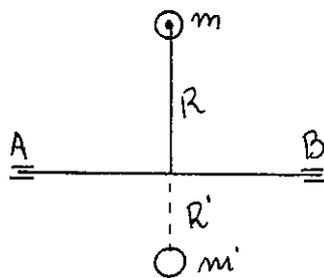
$$m \cdot R = m' \cdot R'$$

con lo cual resultará:

$$|\bar{J}'| = m' \cdot R'^2 \cdot \omega^2 = m \cdot R \cdot \omega^2 = |\bar{J}|$$

Esto implica que las reacciones sobre el bastidor quedan anuladas

$$|\bar{F}_A| = |\bar{F}_B| = 0$$



Como se comprende fácilmente, podemos tomar arbitrariamente cualquiera de los dos valores m' o R' , de manera que su producto sea $m \cdot R$

Si se fija R' , el valor de la masa equilibradora sería

$$m' = \frac{m \cdot R}{R'}$$

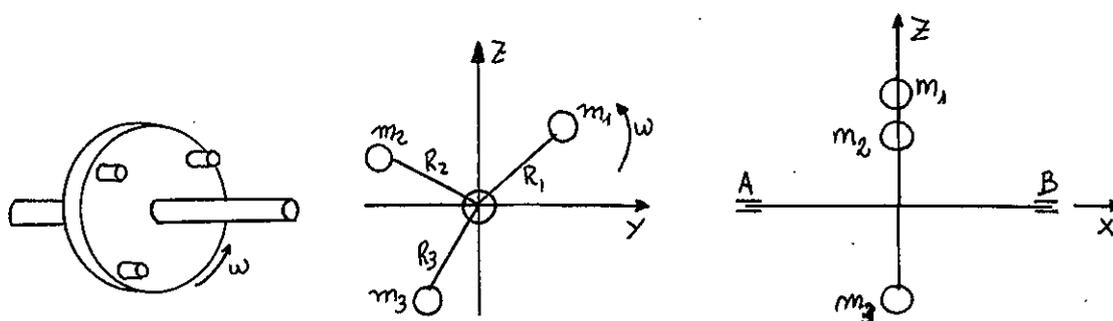
(Como se ve en la otra figura, también se podría haber equilibrado la masa con dos masa equilibrantes m'' a la distancia R'' . La explicación matemática es obvia)

NOTA: Obsérvese que el equilibrado, en definitiva, ha consistido en llevar el c.d.g. al eje de rotación.

3.1.2.1.2.- EQUILIBRADO DE VARIAS MASAS PUNTUALES SITUADAS EN UN MISMO PLANO DE ROTACION

- Introducción:

Tal como se ve en la figura este es el caso de un disco delgado ideal (perfectamente equilibrado), al cual se le adicionan un conjunto de masas conocidas m_1, m_2, \dots, m_n , a distancias del eje de giro R_1, R_2, \dots, R_n , también conocidas.

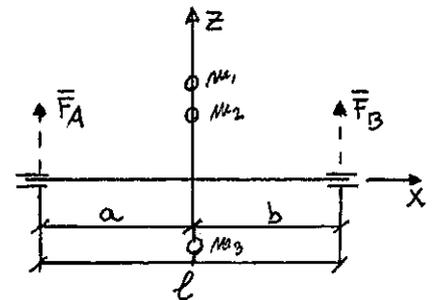
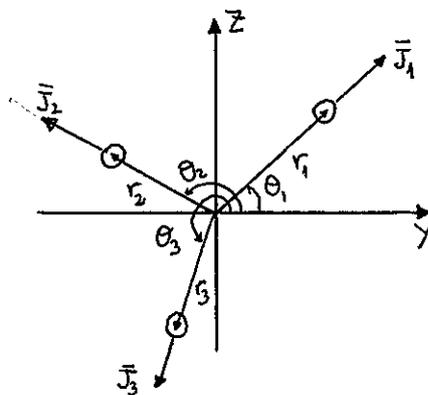


Se trata, por consiguiente, de un desequilibrio estático, en el que éste está totalmente definido.

- Efectos sobre el bastidor:

En este caso los efectos sobre el bastidor son dos fuerzas giratorias en A y B, de módulos constantes, (si lo es ω), y cuyos valores pueden hallarse fácilmente a partir del conocimiento de la resultante de las fuerzas coplanarias concurrentes que forman las inercias de las masas.

Llamando \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y \vec{r}_3 a los vectores de posición de cada masa (cuyos módulos son respectivamente R_1 , R_2 y R_3 , y cuyos argumentos son θ_1 , θ_2 y θ_3), tendremos para la resultante:



$$\vec{J}_R = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3$$

$$\vec{J}_R = m_1 \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_3$$

$$\vec{J}_R = \omega^2 \cdot (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3)$$

Según esto,

$$|\vec{F}_A| = b/l \cdot |\vec{J}_R| \quad \text{y} \quad |\vec{F}_B| = a/l \cdot |\vec{J}_R|$$

- Equilibrado:

Para hacer que $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B| = 0$ basta con introducir una masa m' a una distancia R' de manera que de lugar a una fuerza de inercia \vec{J}' que sea igual y contraria a la resultante \vec{J}_R . Entonces:

$$\bar{J}_R + \bar{J}' = 0$$

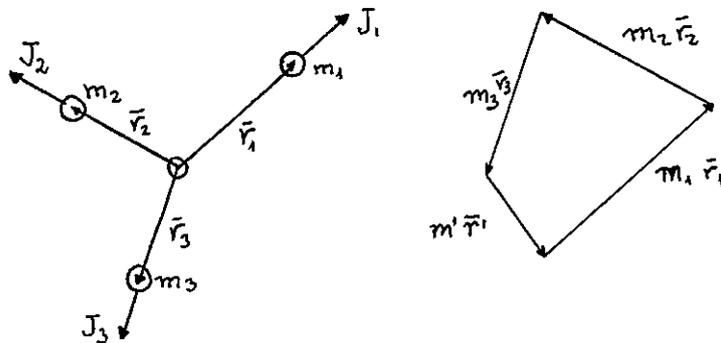
$$\omega^2 \cdot (m_1 \cdot \bar{r}_1 + m_2 \cdot \bar{r}_2 + m_3 \cdot \bar{r}_3 + m' \cdot \bar{r}') = 0$$

o en definitiva:

$$m_1 \cdot \bar{r}_1 + m_2 \cdot \bar{r}_2 + m_3 \cdot \bar{r}_3 + m' \cdot \bar{r}' = 0$$

La resolución de esta ecuación, que permite hallar el producto $m' \cdot r'$, puede hacerse en forma gráfica o en forma analítica.

- Gráficamente, simplemente contruyendo el polígono de fuerzas, tal como se ve en la figura



- Analíticamente, descomponiendo los vectores en sus componentes

$$m_1 \cdot R_1 \cdot \cos \theta_1 + m_2 \cdot R_2 \cdot \cos \theta_2 + m_3 \cdot R_3 \cdot \cos \theta_3 + m' \cdot R' \cdot \cos \theta' = 0$$

$$m_1 \cdot R_1 \cdot \sin \theta_1 + m_2 \cdot R_2 \cdot \sin \theta_2 + m_3 \cdot R_3 \cdot \sin \theta_3 + m' \cdot R' \cdot \sin \theta' = 0$$

Elevando al cuadrado y sumando:

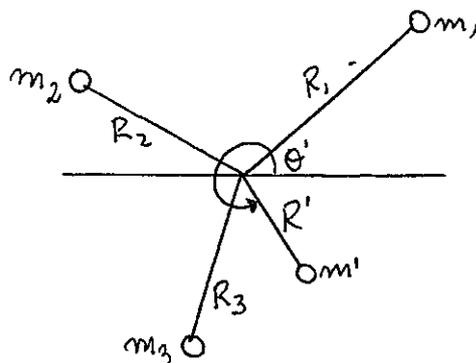
$$m' \cdot R' = [(m_1 \cdot R_1 \cdot \cos \theta_1 + m_2 \cdot R_2 \cdot \cos \theta_2 + m_3 \cdot R_3 \cdot \cos \theta_3)^2 + \\ + (m_1 \cdot R_1 \cdot \sin \theta_1 + m_2 \cdot R_2 \cdot \sin \theta_2 + m_3 \cdot R_3 \cdot \sin \theta_3)^2]^{1/2}$$

Dividiendo ambas:

$$\theta' = \text{Tag}^{-1} \frac{-m_1 \cdot R_1 \cdot \sin \theta_1 - m_2 \cdot R_2 \cdot \sin \theta_2 - m_3 \cdot R_3 \cdot \sin \theta_3}{-m_1 \cdot R_1 \cdot \cos \theta_1 - m_2 \cdot R_2 \cdot \cos \theta_2 - m_3 \cdot R_3 \cdot \cos \theta_3}$$

(Nótese que con la operación de equilibrado, el c.d.g. del sistema de masas, incluida la equilibrada, se sitúa en el eje de rotación)

Igual que en el caso anterior, conocidos m' , R' , y θ' puede fijarse arbitrariamente m' y hallar R' , o viceversa. Lo que no puede modificarse es el ángulo de posición θ'

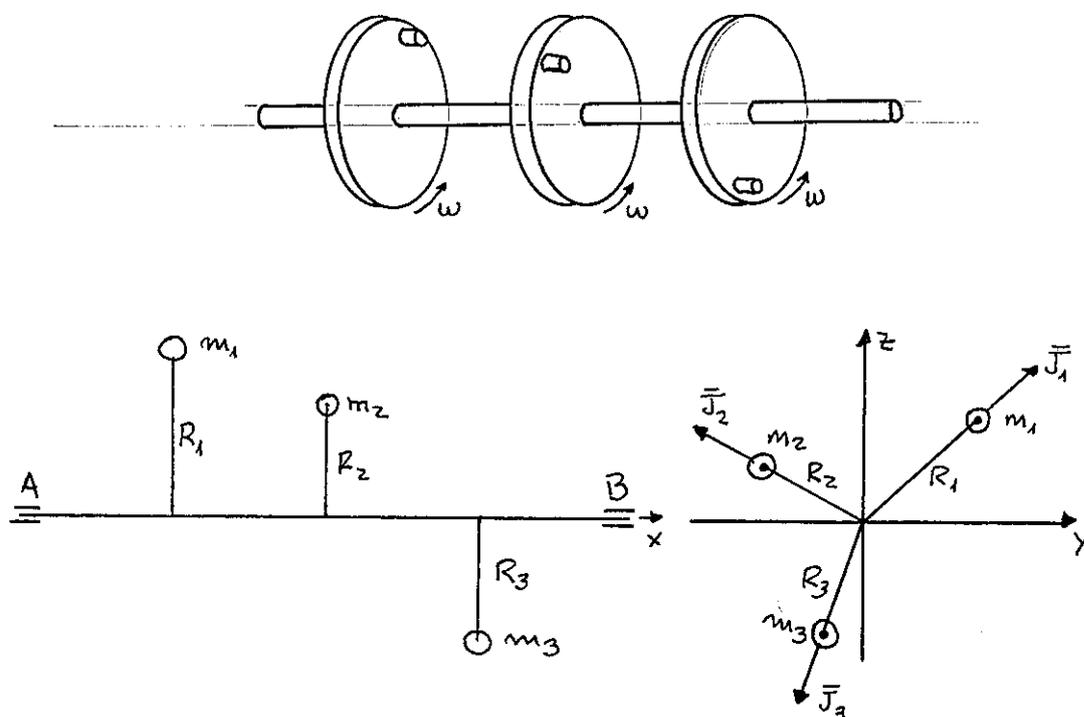


3.1.2.1.3.- EQUILIBRADO DE VARIAS MASAS PUNTUALES, SITUADAS EN DIFERENTES PLANOS DE ROTACION

- Introducción:

Tal como se ve en la figura, este es el caso de un conjunto de discos delgados, ideales (perfectamente equilibrados), calados en diferentes puntos de un mismo árbol giratorio, y a los cuales se adosan un conjunto de masas desequilibradoras, conocidas en magnitud y posición.

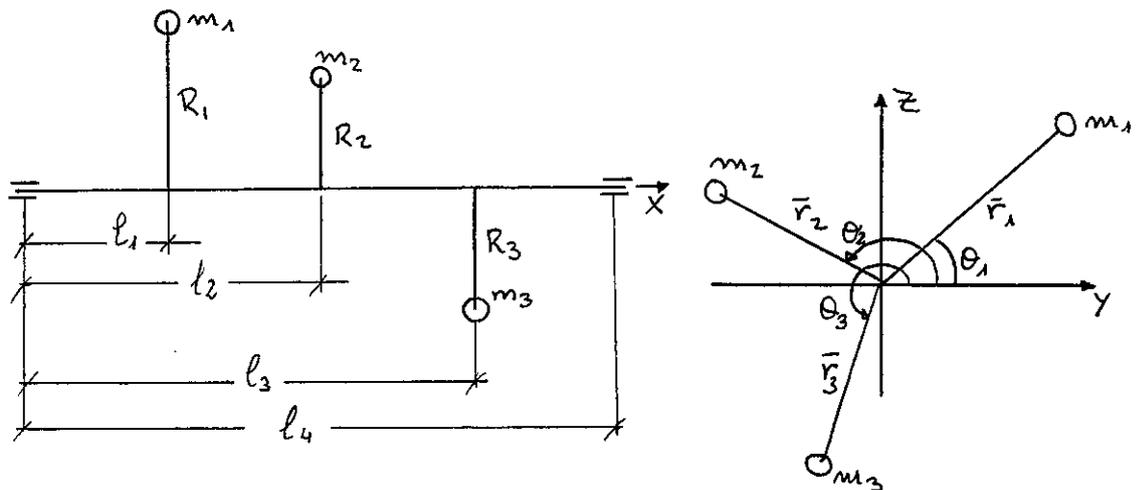
Se trata, por lo general, de un desequilibrio tanto estático como dinámico (los momentos de las fuerzas de inercia respecto de los apoyos no pueden despreciarse), como tendremos ocasión de analizar.



-Efectos sobre el bastidor:

En este caso también, los efectos sobre el bastidor son dos fuerzas giratorias \bar{F}_A y \bar{F}_B de módulos constantes (si lo es ω), y que se deben al sistema espacial de fuerzas \bar{J}_1 , \bar{J}_2 y \bar{J}_3 , o lo que es igual, a los efectos de la resultante general del sistema J_R y al momento resultante del mismo respecto a los propios apoyos.

Llamando \bar{r}_1 , \bar{r}_2 y \bar{r}_3 a los vectores de posición de cada masa (cuyos módulos son R_1 , R_2 y R_3 , y cuyos argumentos son θ_1 , θ_2 y θ_3 , respectivamente) y siendo l_1 , l_2 y l_3 las distancias respectivas al apoyo izquierdo, se tendrá:



Tomando momentos respecto de A:

$$\bar{F}_B \times l \cdot \bar{i} + m_3 \cdot \bar{r}_3 \times l_3 \cdot \bar{i} + m_2 \cdot \bar{r}_2 \times l_2 \cdot \bar{i} + m_1 \cdot \bar{r}_1 \times l_1 \cdot \bar{i} = 0$$

de donde podría calcularse \bar{F}_A . Y lo mismo haríamos con \bar{F}_B .

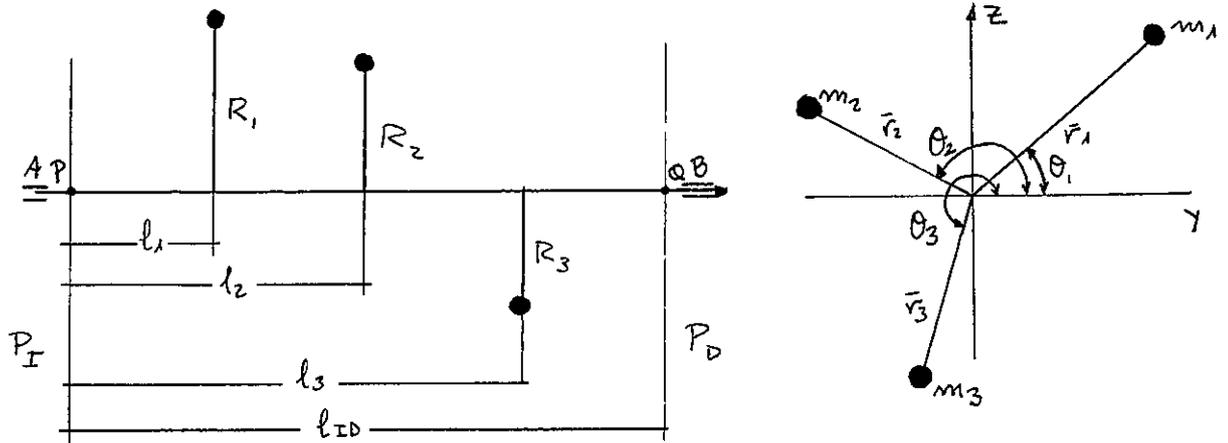
- Equilibrado:

- Para que \bar{F}_A y \bar{F}_B sean nulas en todo momento, ha de lograrse que sea nula la resultante general del sistema, y que sea cero también el momento resultante respecto de cualquier punto que se considere (y en particular, respecto de los apoyos).

- Como veremos más adelante, para equilibrar un sistema de este tipo hace falta adicionar dos masa: una para equilibrar la resultante general (como si de un equilibrado estático se tratase) y otra para equilibrar los momentos desequilibrados.

Además, veremos también que los planos transversales donde se sitúen estas masas equilibradoras pueden ser arbitrarios.

- Llamando P_A al plano izquierdo donde se va a colocar una de las masas equilibradoras y a P_B el plano derecho, donde se va a colocar la otra masa equilibradora (ambos elegidos arbitrariamente), tendremos las siguientes figuras:



Si m'_I y m'_D son las masas equilibradoras en los dos planos izquierdo y derecho, y R'_I y R'_D las distancias respectivas a los ejes de giro, y si θ'_I y θ'_D son los argumentos correspondientes, se tendrá:

$$[1] \Sigma \vec{F} = 0 \implies m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 + m'_I \cdot \vec{r}'_I + m'_D \cdot \vec{r}'_D = 0$$

$\Sigma M = 0$ (tomando momentos respecto del punto P)

$$(l_1 \cdot \vec{i} \times m_1 \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_1) + (l_2 \cdot \vec{i} \times m_2 \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_2) + (l_3 \cdot \vec{i} \times m_3 \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_3) + (l_{ID} \cdot \vec{i} \times m'_D \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}'_D) = 0$$

Esta última ecuación puede escribirse:

$$\vec{i} \times (l_1 \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_1 + l_2 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_2 + l_3 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_3 + l_{ID} \cdot m'_D \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}'_D) = 0$$

que se cumple cuando:

$$[2] \quad m_1 \cdot l_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot l_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot l_3 \cdot \vec{r}_3 + m'_D \cdot \vec{r}'_D = 0$$

Si se toman momentos respecto del punto D , se tendría:

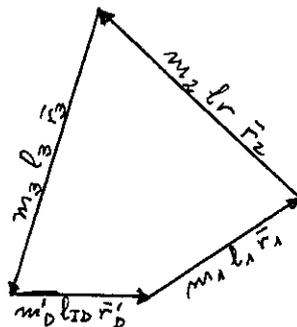
$$[3] \quad m_1 \cdot (l_{ID} - l_1) \cdot \bar{r}_1 + m_2 \cdot (l_{ID} - l_2) \cdot \bar{r}_2 + m_3 \cdot (l_{ID} - l_3) \cdot \bar{r}_3 + m'_D \cdot l_{ID} \cdot \bar{r}'_D = 0$$

Las ecuaciones [1], [2] y [3] permiten hallar $m'_I \cdot R'_I$ y $m'_D \cdot R'_D$, así como θ'_I y θ'_D .

Tal resolución puede hacerse en forma gráfica o en forma analítica.

- Gráficamente, la resolución de las ecuaciones [1] y [2] puede hacerse del modo siguiente:

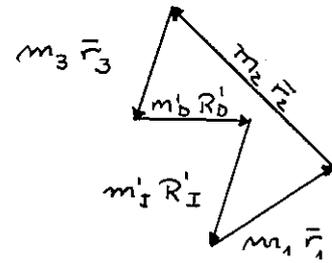
En primer lugar se calcula la ecuación [2], trazando el correspondiente polígono de momentos (con ello se calcula $m'_D \cdot R_{ID} \cdot \bar{r}'_D$)



La dirección de este vector nos da el argumento θ'_D y su módulo da el producto $m'_D \cdot R'_D$ (dividiéndolo por l_{ID})

A continuación puede hallarse $m'_I \cdot R'_I$ por medio de la ecuación [1].

Este vector indica el ángulo θ'_{I} , y su módulo da el producto $m'_{I} \cdot R'_{I}$.



(Obviamente, a los mismos resultados se llegaría empleando las ecuaciones [1] y [3])

- Analíticamente, la solución del sistema de ecuaciones puede hacerse descomponiéndolas en sus componentes según los ejes OX y OY.

La ecuación [2] queda:

$$m_1 \cdot l_1 \cdot R_1 \cdot \cos \theta_1 + m_2 \cdot l_2 \cdot R_2 \cdot \cos \theta_2 + \\ + m_3 \cdot l_3 \cdot R_3 \cdot \cos \theta_3 + m'_D \cdot l_{ID} \cdot R'_D \cdot \cos \theta'_D = 0$$

$$m_1 \cdot l_1 \cdot R_1 \cdot \sin \theta_1 + m_2 \cdot l_2 \cdot R_2 \cdot \sin \theta_2 + \\ + m_3 \cdot l_3 \cdot R_3 \cdot \sin \theta_3 + m'_D \cdot l_{ID} \cdot R'_D \cdot \sin \theta'_D = 0$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$m'_D \cdot R'_D = 1/l_{ID} \cdot [(m_1 \cdot l_1 \cdot R_1 \cdot \cos \theta_1 + m_2 \cdot l_2 \cdot R_2 \cdot \cos \theta_2 + \\ + m_3 \cdot l_3 \cdot R_3 \cdot \cos \theta_3)^2 + (m_1 \cdot l_1 \cdot R_1 \cdot \sin \theta_1 + \\ + m_2 \cdot l_2 \cdot R_2 \cdot \sin \theta_2 + m_3 \cdot l_3 \cdot R_3 \cdot \sin \theta_3)^2]^{1/2}$$

Dividiendo ambas:

$$\theta'_D = \text{Tag}^{-1} \frac{(-m_1 \cdot l_1 \cdot R_1 \cdot \text{Sen } \theta_1 - m_2 \cdot l_2 \cdot R_2 \cdot \text{Sen } \theta_2 - m_3 \cdot l_3 \cdot R_3 \cdot \text{Sen } \theta_3)}{(-m_1 \cdot l_1 \cdot R_1 \cdot \text{Cos } \theta_1 - m_2 \cdot l_2 \cdot R_2 \cdot \text{Cos } \theta_2 - m_3 \cdot l_3 \cdot R_3 \cdot \text{Cos } \theta_3)} \quad [5]$$

La ecuación [1] puede escribirse:

$$m_1 \cdot R_1 \cdot \text{Cos } \theta_1 + m_2 \cdot R_2 \cdot \text{Cos } \theta_2 + m_3 \cdot R_3 \cdot \text{Cos } \theta_3 + \\ + m'_D \cdot R'_D \cdot \text{Cos } \theta'_D + m'_I \cdot R'_I \cdot \text{Cos } \theta'_I = 0$$

$$m_1 \cdot R_1 \cdot \text{Sen } \theta_1 + m_2 \cdot R_2 \cdot \text{Sen } \theta_2 + m_3 \cdot R_3 \cdot \text{Sen } \theta_3 + \\ + m'_D \cdot R'_D \cdot \text{Sen } \theta'_D + m'_I \cdot R'_I \cdot \text{Sen } \theta'_I = 0$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$m'^2_I \cdot R'^2_I = [(m_1 \cdot R_1 \cdot \text{Cos } \theta_1 + m_2 \cdot R_2 \cdot \text{Cos } \theta_2 + m_3 \cdot R_3 \cdot \text{Cos } \theta_3 + \\ + m'_D \cdot R'_D \cdot \text{Sen } \theta'_D)^2 + (m_1 \cdot R_1 \cdot \text{Sen } \theta_1 + \\ + m_2 \cdot R_2 \cdot \text{Sen } \theta_2 + m_3 \cdot R_3 \cdot \text{Sen } \theta_3 + \\ + m'_D \cdot R'_D \cdot \text{Sen } \theta'_D)^2]^{1/2} \quad [6]$$

Dividiendo ambas:

$$\theta'_I = \text{Tag}^{-1} \frac{(-m_1 \cdot R_1 \cdot \text{Sen } \theta_1 - m_2 \cdot R_2 \cdot \text{Sen } \theta_2 - m_3 \cdot R_3 \cdot \text{Sen } \theta_3 - m'_D \cdot R'_D \cdot \text{Sen } \theta'_D)}{(-m_1 \cdot R_1 \cdot \text{Cos } \theta_1 - m_2 \cdot R_2 \cdot \text{Cos } \theta_2 - m_3 \cdot R_3 \cdot \text{Cos } \theta_3 - m'_D \cdot R'_D \cdot \text{Sen } \theta'_D)}$$

[7]

- Evidentemente el caso estudiado de 3 masas puede generalizarse a n masas, situadas en n planos diferentes de rotación, y de todas las cuales se conoce su posición angular (θ) y radial (R), así como el valor de la masa (m).

Fijados dos planos arbitrarios de equilibrado, la resolución de la ecuación:

$$m^{\prime}_D \cdot \bar{r}^{\prime}_D = 1/l_{zD} \cdot \sum_{i=1}^n (m_i \cdot l_i \cdot \bar{r}_i)$$

permite hallar el producto $m^{\prime}_D \cdot \bar{r}^{\prime}_D$ en el plano P_D , de manera que el momento de todas las fuerzas de inercia respecto del punto F (intersección del eje con el plano P_z donde se situará la otra masa) es cero.

Igualmente la ecuación:

$$m^{\prime}_z \cdot \bar{r}^{\prime}_z = - m^{\prime}_D \cdot \bar{r}^{\prime}_D - \sum_{i=1}^n m_i \cdot \bar{r}_i$$

permite hallar el producto $m^{\prime}_z \cdot \bar{r}^{\prime}_z$ en el plano P_z de manera que la resultante de todas las fuerzas de inercia (incluida la producida por la masa correctora en el plano P_D) es cero.

- En resumen, se tienen 6 variables, referidas a dos planos arbitrariamente elegidos.

$$\theta_D, m'_D, R'_D, \theta_I, m'_I, R'_I$$

de estas, θ_D, θ_I son valores fijos para cada caso concreto.

De las otras cuatro, podemos elegir arbitrariamente dos y calcular las otras dos, por las ecuaciones conocidas.

NOTA: Un caso especial se refiere a cuando todas las masas se encuentran en un plano que a su vez contiene al eje de giro, es decir, cuando:

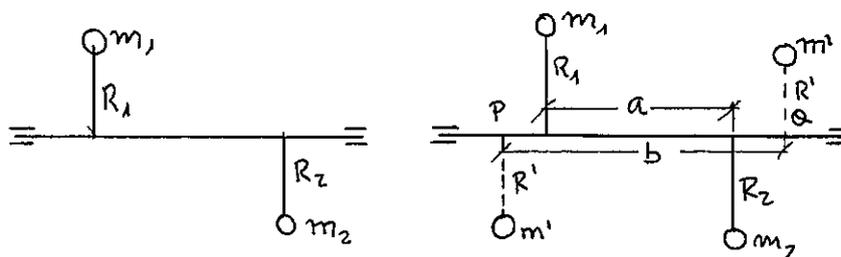
$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$$

En este caso, las ecuaciones [1] y [2] se reducen a dos ecuaciones escalares en la forma:

$$m_1 \cdot R_1 + m_2 \cdot R_2 + m_3 \cdot R_3 + m'_D \cdot R'_D + m'_I \cdot R'_I = 0$$

$$m_1 \cdot l_1 \cdot R_1 + m_2 \cdot l_2 \cdot R_2 + m_3 \cdot l_3 \cdot R_3 + m'_D \cdot l_{ID} \cdot R'_D = 0$$

En este contexto, el caso más sencillo es el de dos masas situadas en el mismo plano, pero opuestas entre sí, como se ve en la figura.



Si $|J_1| = |J_2|$, o sea, si

$$m_1 = m_2$$

$$\text{ó } m_1 \cdot R_1 = m_2 \cdot R_2$$

$$R_1 = R_2$$

el equilibrado se logra fácilmente situando dos masas idénticas m' , a la distancia R' , en los planos que pasan por P y Q (elegidos arbitrariamente) y tal que:

$$m_2 \cdot R_2 \cdot a = m' \cdot R' \cdot b$$

NOTA: La generalización del procedimiento a cualquier número de masas desequilibradas conduce a que puede ser extrapolado a cualquier tipo de rotor, puesto que en definitiva un rotor macizo puede considerarse como un conjunto de "rebanadas", cada una de las cuales es asimilable a un disco ideal con una masa desequilibrada adosada. O mejor, un conjunto de discos cuyos centros de gravedad pueden no coincidir con el eje de giro.

Según esto, cualquier rotor puede equilibrarse colocando dos masas a las distancias apropiadas del eje de rotación, y con las adecuadas posiciones angulares, en dos planos arbitrariamente elegidos.

NOTA: Igual que se equilibra en dos planos podría hacerse en tres o más. En realidad, dos planos es el número mínimo con los que puede equilibrarse un rotor.

3.1.2.2.1.- EQUILIBRADO DE ROTORES CORTOS

- Introducción:

Tal como ya se ha definido, rotores cortos son aquellos en los que el momento de las fuerzas de inercia respecto de los apoyos puede ser despreciado.

Se trata de grandes ruedas, volantes, o ventiladores, etc.

Como consecuencia, presentan un desequilibrio estático y pueden asimilarse perfectamente al caso de varias masas desequilibradas en un plano.

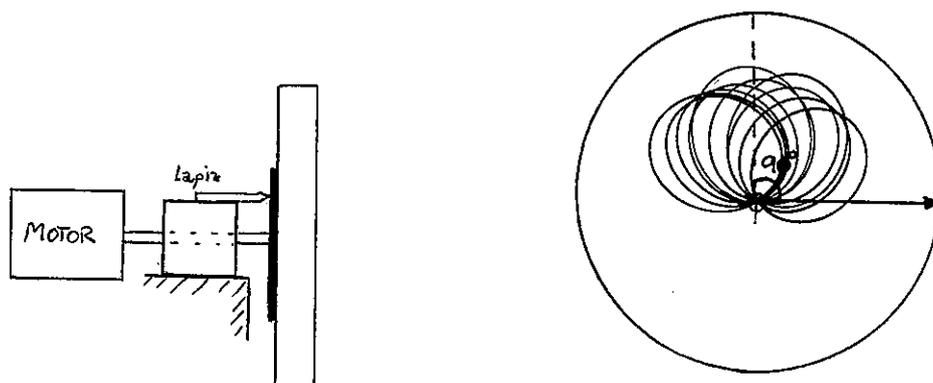
La diferencia esencial estriba, que en el caso de rotores reales, la magnitud y la posición del desequilibrio (la posición del centro de gravedad, o la magnitud o posición de la parte de masa desequilibrada) son totalmente desconocidas.

Como consecuencia de ello se precisa de algún método que detecte y valore la magnitud y posición del desequilibrio, para proceder a su equilibrado.

NOTA: En todo lo que sigue vamos a referirnos al equilibrado de rotores cortos "in situ", y no en máquinas, de las cuales hablaremos al final del tema.

Esencialmente son dos los fenómenos en que se apoyan los diferentes métodos de equilibrado: la medida de las vibraciones producidas por el desequilibrio sobre los apoyos, y la medida de la flexibilidad del rotor durante el movimiento de cabeceo.

NOTA: Una forma práctica de ver el desequilibrio de un rotor corto consiste en pegar una cartulina al mismo y hacerlo girar, manteniendo un lápiz contra la cartulina (y éste, en posición fija respecto del rotor).



Para cada velocidad de giro, el lápiz dejará marcado un círculo sobre el papel. Si se va acelerando el rotor, se irán marcando unas espirales como las que se ven en la figura. Al alcanzar la velocidad crítica, el radio de estos pseudocírculos será máximo.

Como con independencia del amortiguamiento, a la velocidad crítica el ángulo de fase vale $\pi/2$, si

se conoce la dirección de la máxima amplitud (línea de trazos en la figura) tendremos que a 90° se encuentra la posición de la masa desequilibrada.

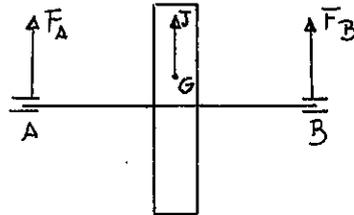
NOTA: Lo dicho anteriormente podría parecer a primera vista un método factible para proceder al equilibrado por tanteos. Bastaría ir colocando masas de diferente valor, en dirección opuesta a la flecha dibujada en la figura, hasta conseguir que la amplitud de la oscilación fuera nula o mínima.

En la práctica, sin embargo, este método es muy poco operativo, pues como sabemos, en las proximidades de la velocidad crítica, el ángulo de desfase varía muy rápidamente (para pequeñas variaciones de la velocidad del rotor), por lo cual resulta difícil ubicar la dirección del desbalanceo.

- Efectos sobre el bastidor:

En este caso (como en su similar de masas concentradas) los efectos sobre el bastidor son una fuerza giratoria sobre cada apoyo, ambas contenidas en el mismo plano que también contiene al eje.

Tales fuerzas originan la vibración de los apoyos y son causa del movimiento de cabeceo del eje flexado.



Tal como sabemos, la vibración de los apoyos, medida en cualquier dirección. (En la del movimiento posible del sistema si se considera de 1 GDL) es proporcional a la magnitud del desequilibrio (para una w dada), y está desfasada el ángulo ξ respecto a la variación de la fuerza.

- Equilibrado:

Teniendo en cuenta los dos fenómenos en que se basan los métodos de equilibrado de rotores cortos (medida de la vibración de los apoyos y medida del cabeceo del árbol), tres son los métodos que se aplican en la práctica (recuérdese que se está hablando de equilibrado "in situ"):

Método de la medida del ángulo de desfase.

Método de la medida de las amplitudes de vibración.

Método del análisis orbital.

Todos ellos requieren una instrumentación adecuada, y dos o más carreras (arranque-parada del rotor) para conseguir el equilibrado.

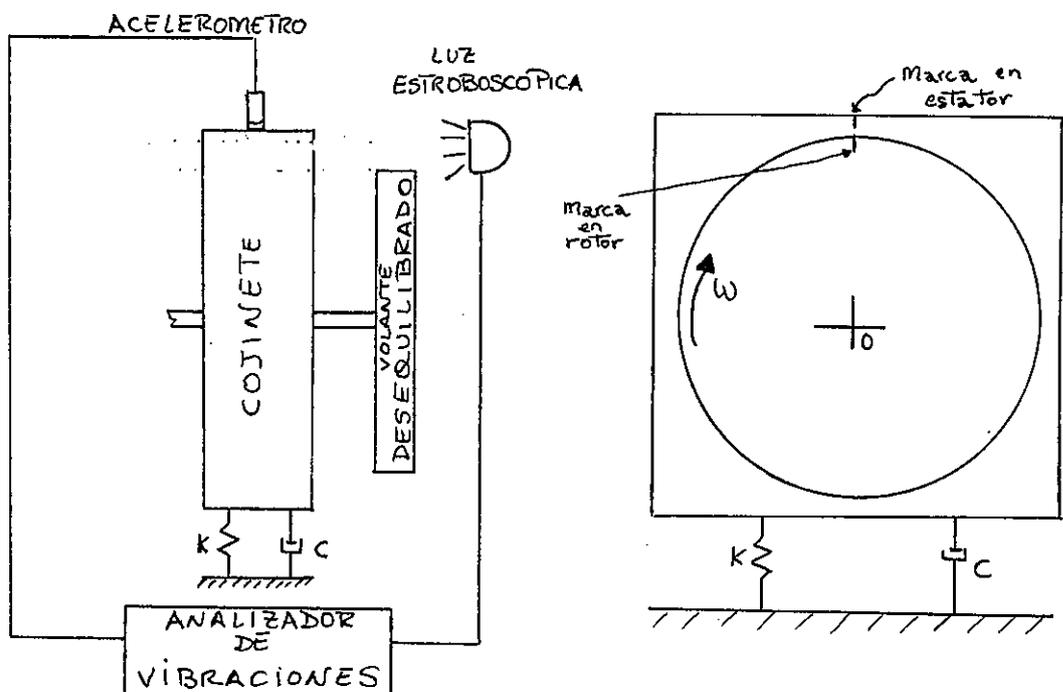
- Método de medida del ángulo de desfase:

Este método requiere de la colocación de un acelerómetro en el cojinete más próximo al rotor que se quiere equilibrar.

(Su colocación ha de efectuarse en la dirección del radio, y en el ángulo respecto de la horizontal en que se prevean mayores amplitudes de vibración. Lo normal es colocarlos en el eje vertical o en el horizontal, dependiendo de la rigidez del apoyo en ambos sentidos).

Este acelerómetro permitirá medir la amplitud de la vibración (normalmente en milésimas de milímetro, micras, o en milésimas de pulgada -mils-), así como deberá actuar sobre una lámpara estroboscópica encendiéndola cuando la amplitud de la vibración captada sea máxima.

A continuación se efectúa una marca de referencia sobre el rotor y otra sobre el cojinete o bastidor, enfrentadas como se ve en la figura, y en la posición que se desee. Ellas servirán para referencias de ángulos (la marca en el bastidor será el "cero" relativo)



- Una vez efectuadas las marcas se pone el rotor a girar a su velocidad de régimen (esto es importante. Sólo se equilibra correctamente si se hace girar el rotor a su velocidad nominal, por este método).

Cuando el acelerómetro activa la luz estroboscópica la marca del rotor se verá θ_0 grados desfasada en la marca en el estator, y puede medirse. Asimismo, también puede medirse la amplitud máxima de vibración en el cojinete (estator), X_0 .

(Recuérdese que para una ω dada, X_0 es proporcional al desequilibrio existente y desconocido, que llamaremos $m_0 \cdot R_0$ $X_0 = \lambda \cdot m_0 \cdot R_0$, dependiendo la constante λ de proporcionalidad solamente de las características del sistema vibrante).

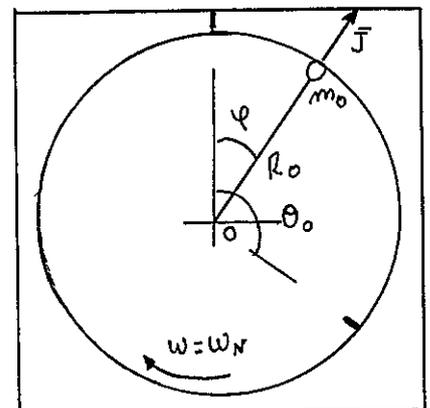
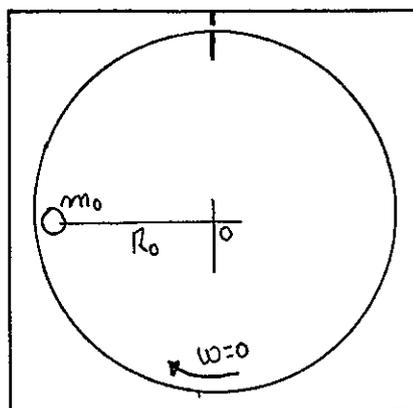
NOTA: Obsérvese que el ángulo θ_0 es el ángulo de desfase relativo, es decir, respecto de la marca de referencia.

Este no tiene nada que ver con el ángulo de desfase entre la fuerza de inercia (su componente vertical en este caso) y el desplazamiento del sistema vibrante.

En la figura se ha representado de nuevo el sistema, pero suponiendo conocido el valor y posición del desequilibrio (lo que implica conocer el valor y dirección de la fuerza de inercia). En ella se ve claramente la diferencia entre el ángulo

$$\xi = \text{Tag}^{-1} \frac{2\epsilon \cdot r}{1 - r^2}$$

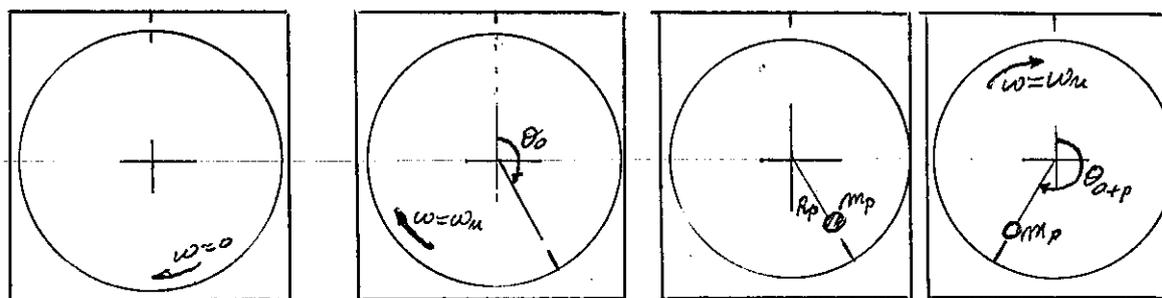
y el ángulo de fase relativo θ_0 , que es donde se ve la marca del rotor.



-Una vez medida la amplitud X_0 y el ángulo de desfase relativo θ_0 se para el rotor y se le adiciona una masa conocida, en una posición determinada (en ángulo y radio respecto de la señal de referencia en el rotor).

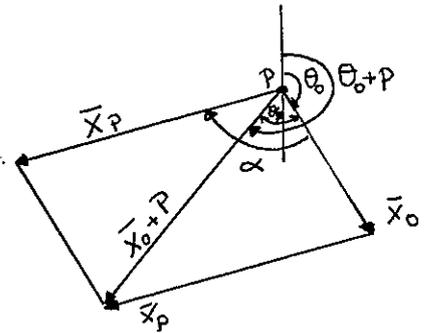
En la figura se ha tomado m_0 (masa de prueba) a la distancia R_0 , y colocada a 0° respecto de la señal de referencia.

En estas condiciones se pone a girar de nuevo el rotor y se mide la amplitud máxima de la nueva vibración (que ahora sera debida al desequilibrio previo existente y desconocido y al desequilibrio introducido) que llamaremos X_{0+p} , y el nuevo ángulo de desfase relativo, que llamaremos θ_{0+p}



(Recuérdese que en este caso también X_{0+p} es proporcional al total del desequilibrio existente, siendo la misma constante λ la de proporcionalidad).

- Una vez efectuadas estas dos carreras, y anotados los valores de X_0 , θ_0 , X_{0+P} , θ_{0+P} puede realizarse la construcción gráfica que se ve en la figura.



19.- Se lleva el vector complejo $X_0/\theta_0 \equiv \bar{X}_0$ a partir de un polo Q.

20.- Se lleva, desde el mismo polo, el vector complejo

$$X_{0+P}/\theta_{0+P} \equiv \bar{X}_{0+P}$$

Forma con el anterior el ángulo θ_P ($\theta_P = \theta_{0+P} - \theta_0$)

30.- El vector complejo diferencia será debido a la carga de prueba (al desequilibrio introducido) y valdrá.

$$\bar{X}_P = \bar{X}_{0+P} - \bar{X}_0$$

El módulo de este vector puede medirse directamente en el dibujo, o hallarse por la expresión:

$$X_P = [X_0^2 + X_{0+P}^2 - 2 \cdot X_0 \cdot X_{0+P} \cdot \cos \theta_P]^{1/2}$$

El ángulo α que este vector \bar{X}_P forma con el desequilibrio original \bar{X}_O también puede hallarse:

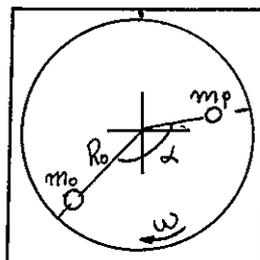
$$\alpha = \text{Cos}^{-1} \frac{X_O^2 + X_P^2 - X^2 O + P}{2 \cdot X_O \cdot X_P}$$

40.- Dada la proporcionalidad entre equilibrio y vibración, puede escribirse:

$$\frac{m_O \cdot R_O}{X_O} = \frac{m_P \cdot R_P}{X_P}$$

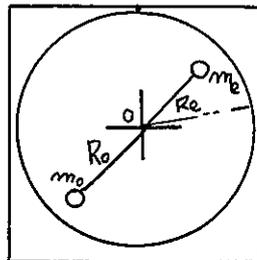
Como X_O y X_P son magnitudes conocidas en el gráfico, y $m_P \cdot R_P$ es un valor conocido (en gr. milímetros, o cualquier otra unidad), puede calcularse el valor del desequilibrio inicial.

La posición angular relativa del desequilibrio inicial viene dada por el ángulo α , medido a



partir de la posición de la masa de prueba, que en este caso coincide con la señal de referencia.

59.- Una vez hallada $m_o \cdot R_o$, y su posición respecto a la marca inicial, el equilibrado se consigue colocando la masa m_e ($m_e = m_o$) a la distancia R_e del eje de giro igual a la que se colocó la masa de prueba ($R_e = R_o$), y en sentido contrario al desequilibrio inicial, como se ve en la figura.



NOTA: El equilibrado también podría lograrse "quitando" en el punto donde se sitúa m_o , una masa equivalente a m_o (efectuando un taladro apropiado, por ejemplo).

NOTA: Como se ve, el método expuesto permite equilibrar un rotor "corto" en dos carreras, entendiéndose por tales el arranque-régimen-parada, del rotor.

- Método de la medida de las amplitudes:

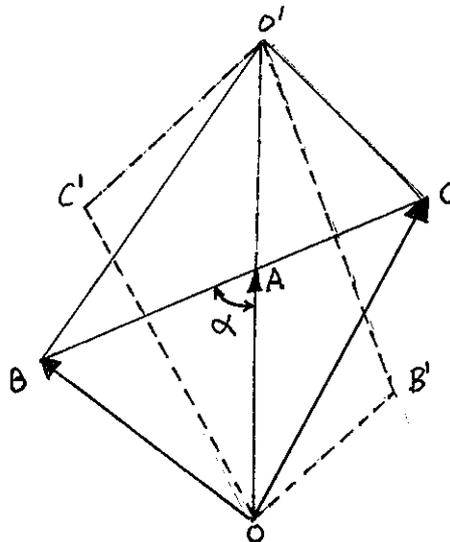
- Este método permite el equilibrado del rotor midiendo solamente las amplitudes de las vibraciones causadas, sin necesidad de medir el ángulo de fase.

Por tanto, sólo se precisa un acelerómetro u otro procedimiento capaz de medir los desplazamientos del cojinete soporte.

- El método requiere tres carreras del rotor:

La primera sin ninguna masa de prueba anexa al rotor. La segunda con una masa m_p de prueba, arbitrariamente colocada. La tercera, con una masa del mismo valor que m_p , pero colocada en posición diametralmente opuesta a la anterior.

- Observando la figura se comprenderá fácilmente este método:



En la primera carrera, sin peso de prueba, medimos la amplitud de la vibración. A una cierta escala y en dirección arbitraria (perpendicular en este caso) dibujamos el vector que la representa \vec{OA} .

Evidentemente, a otra escala, \vec{OA} representa el desequilibrio original ($m_0 \cdot \vec{r}$)

En la segunda carrera, con la masa de prueba, se tendrá otra medida a la vibración, dada por un vector de magnitud \vec{OB} , y dirección desconocida.

Evidentemente, el vector \vec{OB} será la suma del desbalanceo original (\vec{OA}) y del debido al peso añadido (que llamaremos \vec{AB}).

En la tercera carrera, una vez quitado el peso m de la posición anterior, lo colocamos en la posición opuesta. En estas circunstancias se tendrá otra medida de la vibración, dada por un vector \vec{OC} , de magnitud conocida, pero de dirección desconocida. Igual que antes el vector \vec{OC} será la suma del vector \vec{OA} más el \vec{AC} (debido al peso añadido en esta nueva posición).

Naturalmente, los vectores \vec{BA} y \vec{CA} serán iguales en módulos, pero opuestos.

Como resultado de las tres medidas se conocen las medidas de los vectores $|\overline{OA}|$, $|\overline{OB}|$ y $|\overline{OC}|$, pero no sus posiciones relativas (tampoco se conoce sus verdaderos valores, sino sólo la amplitud de la vibración, que como sabemos es proporcional al desequilibrio existente).

Lo que si sabe también es que $|\overline{OA}|$ ha de ser la mediana del triángulo OBC.

El problema, por tanto, consistirá en construir un triángulo del cual se conoce la magnitud de dos de sus lados y la de la mediana.

Geoméricamente, esto puede hacerse del modo que se ve en la figura:

Se toma un punto arbitrario O, y a partir de él en una dirección cualquiera, una longitud $\overline{OO'} = 2 \cdot \overline{OA}$.

Con centro en O describimos un arco de radio OC, y con centro en O' otro de radio OB. La intersección de ambos nos da el punto C.

Uniendo C con A, y prolongándolo en $AB = AC$, obtendremos el punto B.

Puesto que $|\overline{AB}|$ representa el desequilibrio del peso de prueba, y éste es conocido, podemos hallar la

escala que mide el desequilibrio, con lo cual puede calcularse el desequilibrio original

$$m_o \cdot R_o = m_p \cdot R_p \cdot (\overline{OA} / \overline{AB})$$

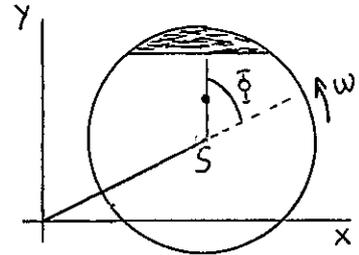
La posición del desbalanceo original queda fijada por los α° que forma con la línea \overline{BAC} (sobre la que se colocó las dos masas de prueba).

NOTA: La construcción indicada puede conducir a una ambigüedad, ya que igualmente podrían haberse obtenido los puntos B' y C' , y por tanto, un ángulo $-\alpha$.

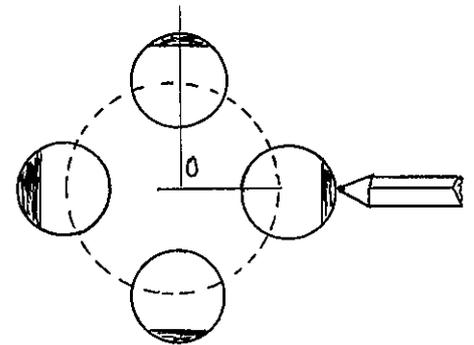
Esto se corrige con una cuarta carrera, colocando la masa equilibradora en la posición indicada por el paso anterior. Si el desequilibrio aumenta el ángulo elegido no era el adecuado, y ha de tomarse el inverso.

- Método del análisis orbital:

- Este método puede considerarse como una sofisticación tecnológica del primitivo método del "equilibrado con lápiz" tal como se ve en la figura. Como sabemos, para bajas velocidades del rotor, el "punto pesado" (donde se encuentra la parte desequilibrada) forma un ángulo $\bar{\alpha}$ próximo a cero.



En consecuencia manteniendo un lápiz que roce ligeramente el rotor, este dejará un trazo en la parte exterior de éste, cada vez que pase por la posición A. Esta parte será la que tenga el desequilibrado.



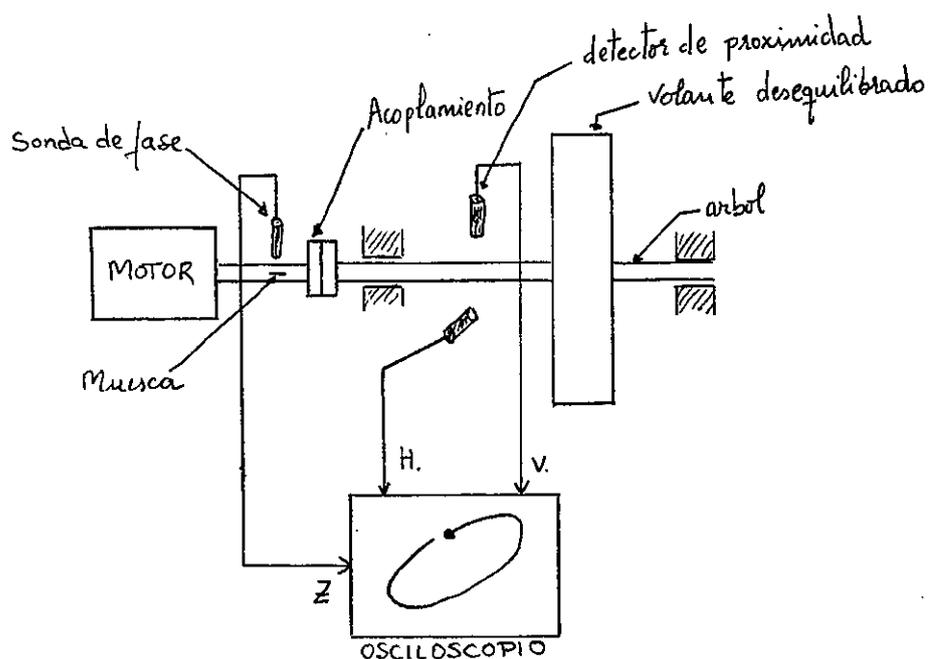
Añadiendo una masa en sentido opuesto, y en la dirección OA, se logrará el equilibrio después de uno o varios intentos (el valor y situación de la masa debe tomarse por tanteos, comprobando que la magnitud de la vibración disminuye cada vez más).

Evidentemente, este método sólo vale para velocidades muy bajas, pues cuando crece w , el ángulo $\bar{\alpha}$ aumenta, y

el punto pesado ya no es el que queda marcado por el lápiz.

- La versión actual de este método consiste esencialmente en lo mismo, sólo que midiendo además el ángulo $\bar{\alpha}$, y requiere el soporte de una instrumentación adecuada.

La figura representa la instrumentación requerida.



Consta de dos detectores de proximidad (que generan una señal eléctrica proporcional a la distancia entre el detector y la superficie del árbol giratorio, una sonda de fase (o detector que da una señal eléctrica cada vez que frente a él pase una marca efectuada sobre el árbol: muesca, cinta reflectante, etc.) y un

osciloscopio, (o un analizador FFT), que recibe las señales de los dos detectores (del de proximidad y de la sonda de fase).

Los dos detectores de proximidad se colocan a 90°, generalmente en posición horizontal y vertical. Cada uno se conecta a la correspondiente entrada del osciloscopio.

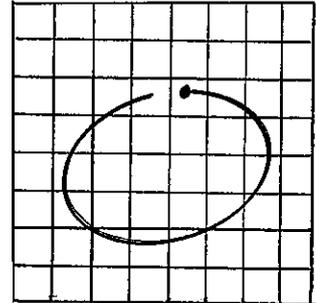
El detector de la posición de giro del árbol (detector de fase) controla la intensidad de brillo del trazo en el osciloscopio. De esta forma, cuando la muesca pasa por delante de la sonda, la distancia se incrementa repentinamente, produciéndose un incremento del voltaje negativo, lo cual causa un "punto brillante" en la pantalla. A continuación, una vez pasada la muesca, se origina un acercamiento repentino, lo que se traduce en un aumento rápido del voltaje positivo, el cual causa un tramo del trazo "en blanco" (sin trazo).

Ambos fenómenos permiten conocer la posición angular del árbol (por medio del punto brillante) y el sentido de giro (por medio del intervalo en blanco, que sigue necesariamente al punto brillante).

Dado que las dos señales de los detectores de proximidad (el horizontal y el vertical) son de tipo

armónico, su composición dará una composición como la de la figura, llamada "órbita".

Esta "órbita" representa el movimiento del centro del árbol, pudiendo ser una circunferencia o una elipse.



(Será una circunferencia cuando la rigidez del árbol y de los apoyos sea la misma en el plano horizontal y el vertical. Como contrario tendremos una elipse)

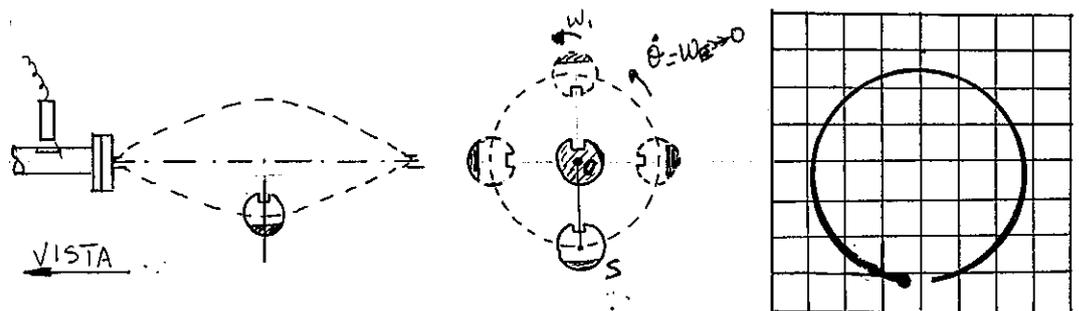
Por otro lado, al variar la velocidad de giro, el tamaño de la circunferencia (o de la elipse) irá variando, así como la posición del punto brillante. Precisamente, la variación de la posición del punto brillante es la clave del análisis orbital!

Para fijar la idea puede verse en la página 34, que para $w_e < w_n$, $0 \leq \delta \leq \pi$; para $w_e = w_n$, $\delta = \pi/2$; para $w_e > w_n$, $\pi/2 \leq \delta \leq \pi$

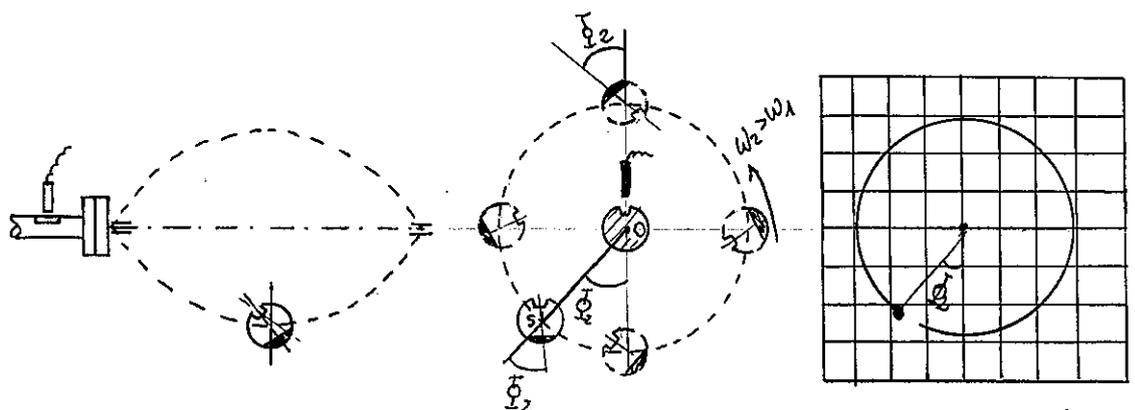
Teniendo esto presente se ha representado en los dibujos dos posiciones del árbol giratorio (no se ha dibujado el volante que es lo que se supone realmente desequilibrado), por una sección dada a través de los detectores de proximidad.

En el centro de las figuras se ha representado la sección del árbol en la zona del detector de fase, y por tanto, en la zona del mismo no flexionada.

(Se supone que el árbol gira a izquierdas, mirando en dirección de la flecha, con un cabeceo sincrónico $\dot{\theta} = \omega_{e1}$)

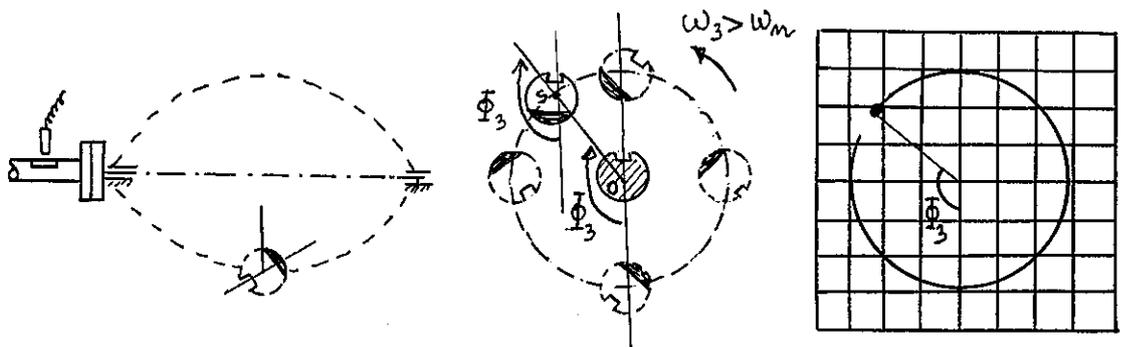


A velocidades bajas, ($\omega_{e1} \rightarrow 0$), $\delta_1 \gg 0$, y la posición del árbol cuando aparece el punto brillante, es la OS. La órbita es circular, y el punto brillante está en la parte inferior. El tramo "en blanco" indica el giro a izquierdas.



A velocidades más altas ($\omega_{e2} > \omega_{e1}$), pero por debajo de la crítica ($\omega_{e2} < \omega_n$), el ángulo δ crece, aproximándose a $\pi/2$. (δ_2).

La posición del árbol cuando aparece el punto brillante es \overline{OS} . La órbita es circular y de mayor tamaño. El punto brillante aparece "retrasado", respecto a la posición inferior, el ángulo δ_2 . (Retrasado significa que se ha movido en sentido contrario al del giro de la órbita)



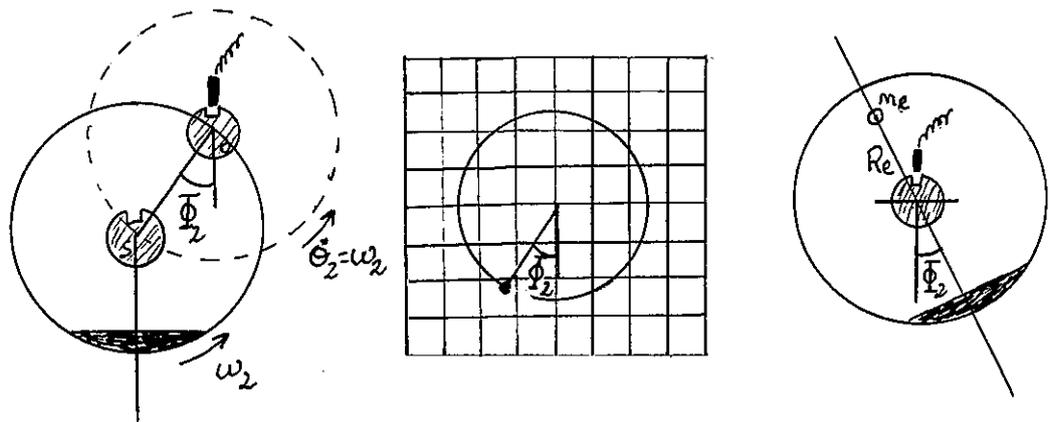
A velocidades superiores a la crítica ($\omega_{e3} > \omega_n$), el ángulo δ sobrepasa los 90° (δ_3) (para $\omega_{e3} \gg \omega$, $\delta \gg \pi$), y se produce una nueva disminución del tamaño de la órbita. El punto pesado aparece "retrasado" el ángulo δ_3 .

- En función de todo lo expuesto, el proceso de equilibrado es bastante simple, aun cuando ha de procederse por tanteos.

En efecto, la posición del punto brillante, para una ω_e dada, define el ángulo δ (a partir de una posición de referencia, que en el ejemplo que venimos siguiendo es la posición vertical inferior).

En consecuencia, midiendo el ángulo ξ en el osciloscopio (mediante una fotografía de la pantalla o "fijandola" si ello es posible), parando luego el rotor y girándolo manualmente hasta que la muesca coincida con el detector de fase, se podrá conocer cual es la posición del punto pesado.

Si consideramos el volante desequilibrado del que hablamos al inicio, y tomamos la órbita para w_{e2} , con lo cual se obtuvo el ángulo ξ_2 , la posición del punto pesado se determinará como se ve en la figura.



Giro sincrónico
del árbol y volante

Orbita obtenida
para w_2

Volante parado.
Enfrentados
muesca y detector.

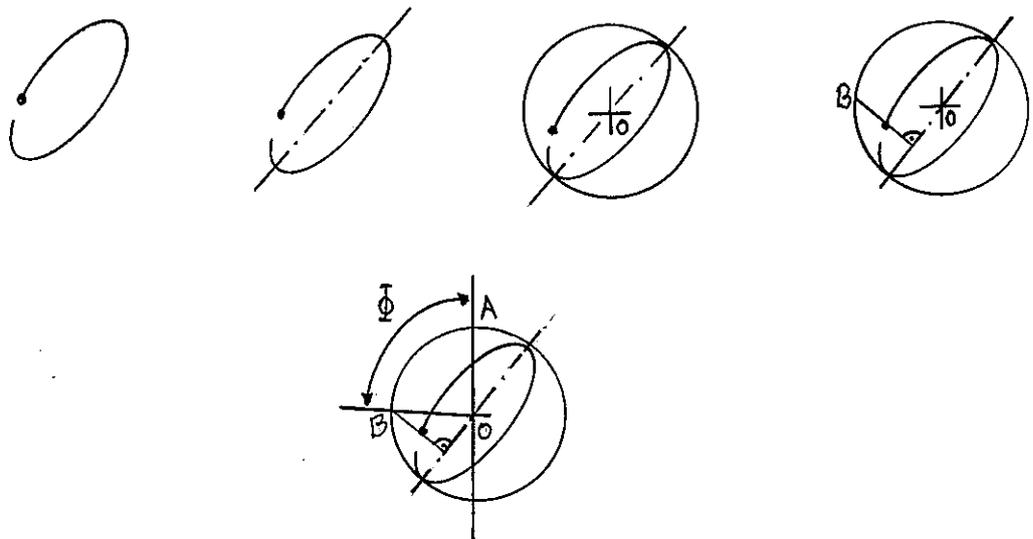
Una vez determinada la posición angular del punto pesado, colocaremos una masa equilibrante m_0 , a la distancia R_0 , y a 180° de ξ_2 . Con ello haríamos una nueva carrera del rotor, y comprobaríamos que el punto brillante se mantiene en el mismo sitio, pero que el radio de la órbita ha disminuido, o se ha anulado

(equilibrado perfecto). Así se podrían hacer tanteos sucesivos, hasta convertir la órbita en un punto.

NOTA: Puede ocurrir que nos pasemos en el producto de $m \cdot R$, con lo cual el punto pesado se desplazaría 180° del original. Ello llevaría a una modificación de la posición del punto brillante, que inmediatamente detectaría esta eventualidad.

- En el caso en la que la rigidez del rotor (o la de los apoyos, o la de ambos) no sea la misma en los planos horizontal y vertical, la órbita tendrá forma elíptica.

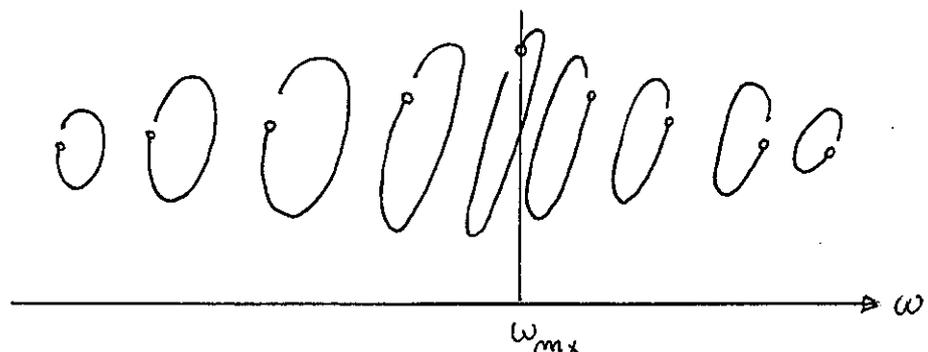
En este caso, las figuras muestran claramente como habría de procederse para hallar el ángulo $\bar{\alpha}$.



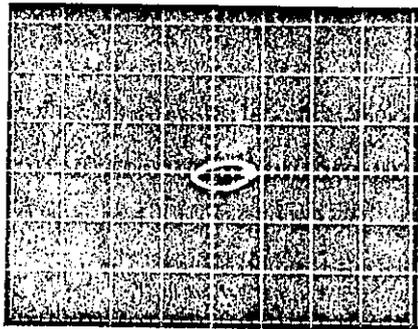
- 19.- Trazar el eje mayor de la elipse.
- 29.- Trazar una circunferencia con diámetro el eje mayor de la elipse.
- 39.- Trazar por el punto brillante una perpendicular a ese eje mayor. La intersección con la circunferencia es el punto B.
- 49.- El ángulo BDA es el ξ .

- Igualmente, cuando $K_x \neq K_y$, o lo que es igual, $\omega_{nx} \neq \omega_{ny}$, sabemos que se produce un cabeceo asincrónico, al sobrepasar la primera velocidad crítica ($\omega_{nx} \leq \omega_e \leq \omega_{ny}$), y que desaparece al sobrepasar de nuevo la segunda velocidad crítica ($\omega_e > \omega_{nx}$ y $\omega_e > \omega_{ny}$). En tales condiciones, θ no tienen el mismo sentido que ω_e , cosa que también se refleja en la órbita cuyo punto brillante, y el segmento en blanco consecutivo, cambian de sentido.

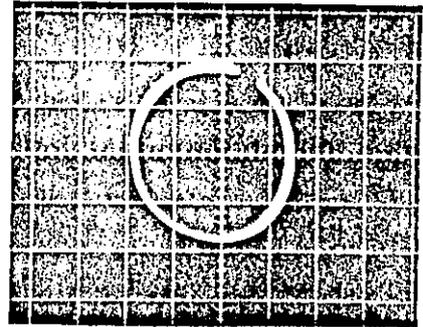
La figura muestra un caso general de la evolución de la órbita en un rotor desequilibrado (obsérvese que el detector de fase está colocado horizontalmente. Por ello aparece el punto brillante, para velocidades bajas, en la posición de las nueve horas).



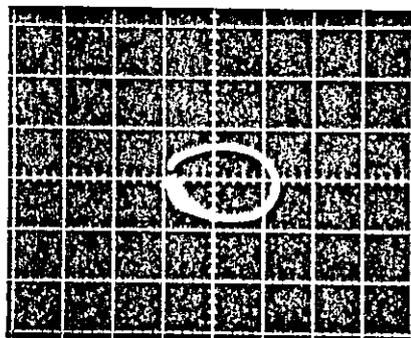
Las figuras representan unas fotos de un caso real, a diferentes velocidades de giro, y después del proceso de equilibrado.



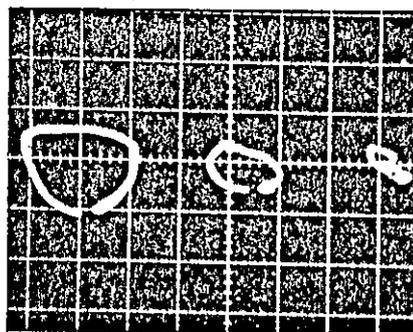
$$\omega_M > \omega_E = 4000 \text{ rpm}$$



$$\omega_E = \omega_M = 9100 \text{ rpm}$$



$$\omega_M < \omega_E = 29000 \text{ rpm}$$



3.1.2.2.2.- EQUILIBRADO DE ROTORES LARGOS

- Introducción:

- Tal como se han definido, rotores "largos" son aquellos en los que el momento de las fuerzas de inercia (respecto de cualquier punto, y en particular respecto de los apoyos) y no puede ser despreciado. Se trata de grandes rotores de turbinas, alternadores, etc. Como consecuencia presentan un desequilibrio dinámico (en general dinámico y estático conjuntamente).

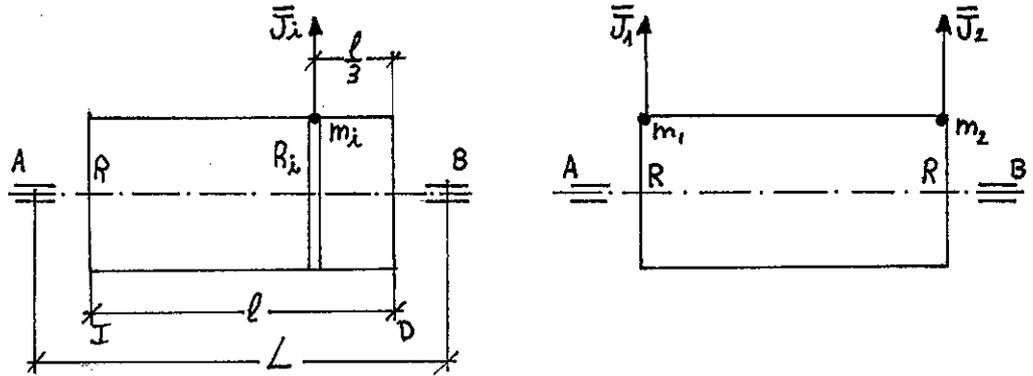
Este tipo de rotores puede asimilarse a un conjunto de masas puntuales en diferentes planos de rotación (lo cual es cierto si suponemos el rotor largo descompuesto en una serie de "rebanadas" cada una de ellas con su propio desequilibrio).

En consecuencia, y tal como se vio para ese caso, el conjunto puede ser equilibrado por sólo dos masas colocadas en dos planos de equilibrado arbitrariamente elegidos (normalmente se toman los dos planos que pasan por los extremos del rotor).

- También puede estudiarse el problema desde otro punto de vista.

En efecto, un rotor largo desequilibrado, al que hemos supuesto como un conjunto de rebanadas desequilibradas, puede sustituirse por un sistema equivalente, (a efectos dinámicos), formado por dos masas de valor y posiciones relativas determinadas, situadas en dos

planos transversales al eje del rotor cualesquiera. En efecto, supongamos el rotor de la figura, del cual se conoce la masa desequilibrada m_i en la rebanada i .



La fuerza de inercia producida por este desequilibrio elemental vale:

$$|\bar{J}_i| = m_i \cdot \omega^2 \cdot R$$

A efectos dinámicos, esta masa puede ser reemplazada por dos masas m_1 y m_2 , situadas en los planos izquierdo y derecho del rotor, y a la misma distancia R del eje (podía haberse elegido otra distancia cualquiera).

La posición angular de estas masas es tal que las tres se encuentran en el mismo plano que pasa por el eje.

Las fuerzas de inercia respectivas serán:

$$J_1 = m_1 \cdot R \cdot \omega^2$$

$$J_2 = m_2 \cdot R \cdot \omega^2$$

Para que este sistema sea equivalente al anterior se ha de cumplir:

$$m_1 \cdot \omega^2 \cdot R = m_1 \cdot \omega^2 \cdot R + m_2 \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$m_1 \cdot \omega^2 \cdot R \cdot 1/3 = m_1 \cdot \omega^2 \cdot R \cdot 1$$

De donde se deduce:

$$m_1 = m_1 + m_2$$

$$m_1 = 3m_1 \implies \begin{cases} m_1 = 1/3 \cdot m_1 \\ m_2 = 2/3 \cdot m_1 \end{cases}$$

repetiendo la misma operación con todas las rebanadas tendremos que el rotor largo desequilibrado puede ser sustituido por un conjunto de masas en el plano Izquierdo y otro conjunto en el plano Derecho. O, en último extremo, por dos masas solamente, una en el plano I y otra en el plano D.

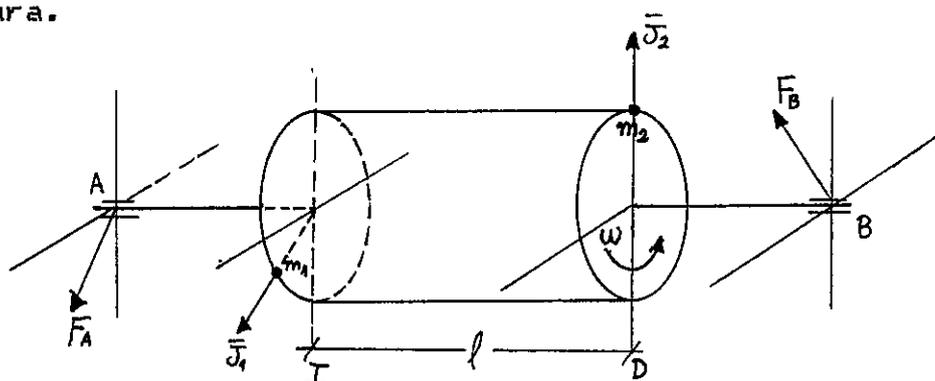
Obviamente, en el caso real el desequilibrio de cada rebanada (magnitud y posición angular) es desconocido, por lo que el método anterior no puede ser aplicado, pero podemos asegurar que el conjunto de desequilibrios del rotor puede ser sustituido por dos masas equivalentes, situadas en dos planos arbitrariamente elegidos.

- Al igual que vimos para rotores cortos, se precisa de algún método que detecte y valore la magnitud y posición de los desequilibrios equivalentes en los dos planos elegidos, para luego proceder a su corrección. En este caso, los valores a aplicar son los mismos que

para rotores cortos, aún cuando nosotros sólo vamos a aplicar el de medida del ángulo de fase.

- Efecto sobre el bastidor:

El efecto sobre el bastidor será una fuerza giratoria en cada apoyo que en general estarán desfasadas angularmente una respecto de la otra, como se ve en la figura.

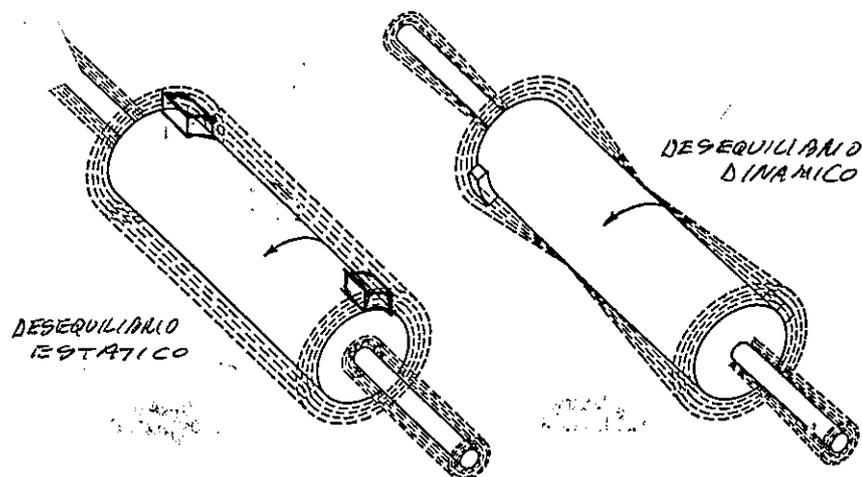


Si suponemos el desequilibrio total del rotor reducido a las dos masas m_1 y m_2 , la reacción en A, \vec{F}_A , se deberá al efecto de las dos masas conjuntamente, y lo mismo podrá decirse de la reacción en B, \vec{F}_B .

(Al efecto de la masa m_1 en el plano derecho, o al de la m_2 en el plano izquierdo, se le denomina "efecto cruzado").

Evidentemente, sobre cada apoyo se originará una vibración cuya amplitud será debido al efecto de la masa próxima más al de la masa lejana.

NOTA: En las figuras puede observarse en forma gráfica el comportamiento de un rotor desequilibrado, tanto estática como dinámicamente. Se ve claro que las vibraciones causadas por el desequilibrio se transmiten a los apoyos, haciendo aparecer los vectores rotatorios anteriormente mencionados.



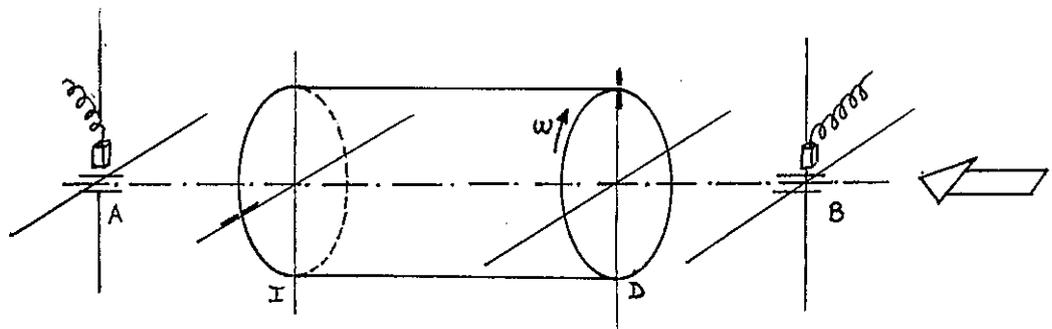
(Observese que para que el desequilibrio sea estático las dos masas equivalentes han de ser del mismo valor y estar situadas en el mismo plano que contienen al eje)

- Equilibrado por el método de la medida del ángulo de fase:

Este método no es más que una aplicación a rotores largos del método visto para rotores cortos. Requiere la colocación de un acelerómetro en cada apoyo, en la misma posición relativa (por ejemplo, los dos en el eje vertical que pasa por el centro de cada rodamiento).

Cada acelerómetro accionará su correspondiente lámpara estroboscópica, de forma que se pueda medir el ángulo de desfase relativo.

También requiere la ejecución de dos marcas sobre el rotor (una en el plano derecho D y otra en el plano izquierdo I) y las correspondientes sobre el estator. Ambas marcas no tienen porqué estar situadas en la misma posición angular. Las medidas de los ángulos de desfase han de ser tomadas mirando al rotor desde un mismo lado (en la figura, de derecha a izquierda. En la práctica se suele mirar el rotor desde su lado libre).



- Una vez dispuesto todo el sistema y efectuadas las marcas, se efectúan tres carreras del rotor.

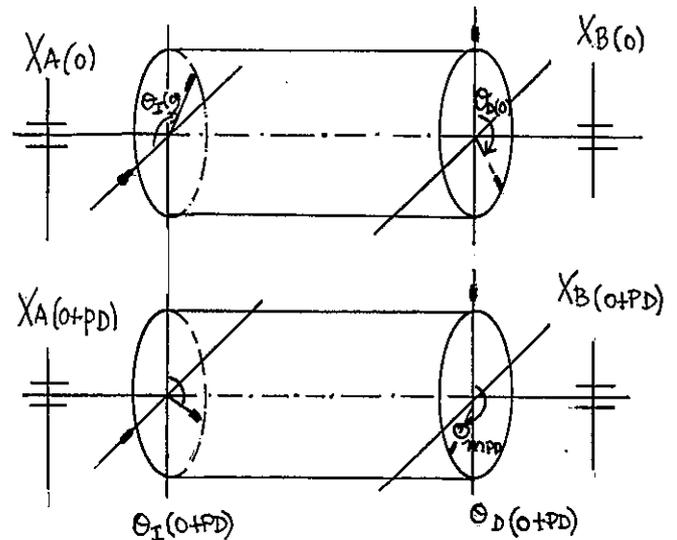
En la primera carrera se miden las amplitudes en los cojinetes A y B, así como los correspondientes ángulos de desfase relativos.

Así se tendrá $X_{A(0)}$ y $\theta_{I(0)}$ que forman el vector complejo $\bar{X}_{A(0)}$.

También se tendrá $X_{B(0)}$ y $\theta_{D(0)}$ que forman el vector complejo $\bar{X}_{B(0)}$.

En la segunda carrera se coloca una masa m_{PD} conocida, a

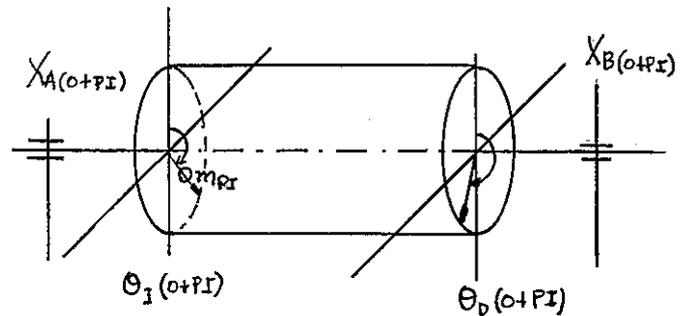
una distancia R_{PD} conocida y en posición determinada, en el lado derecho del rotor (sobre la marca). Luego se miden las amplitudes y desfases en cada lado.



Se obtienen así:

$$\begin{aligned} X_{A(0+PD)}; \theta_{I(0+PD)} & ; \bar{X}_{A(0+PD)} \\ X_{B(0+PD)}; \theta_{D(0+PD)} & ; \bar{X}_{B(0+PD)} \end{aligned}$$

En la tercera carrera se coloca una masa conocida m_{r2} en posición determinada, en el lado izquierdo del rotor (sobre la marca, por ejemplo).

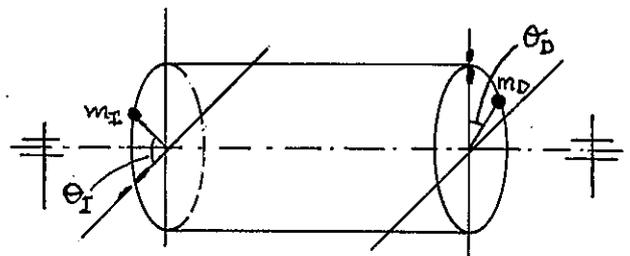


Se obtienen así:

$$X_{A(0+PI)}; \theta_{1(0+PI)} \implies \bar{X}_{A(0+PI)}$$

$$X_{B(0+PI)}; \theta_{D(0+PI)} \implies \bar{X}_{B(0+PI)}$$

- Si se conocieran las dos masas m_z y m_D , dinámicamente equivalentes y que son la causa del desequilibrado del rotor, así como su posición respecto a las marcas efectuadas, tendríamos



también los complejos D_z y D_D que definen el desequilibrio verdadero del rotor (respecto de las marcas)

$$\bar{D}_z = D_z / \theta_z ; D_z = m_z \cdot R \cdot \omega^2$$

$$\bar{D}_D = D_D / \theta_D ; D_D = m_D \cdot R \cdot \omega^2$$

Evidentemente, cualquiera de los valores complejos anteriores podrá expresarse en función de este desequilibrio inicial y de los correspondientes coeficientes complejos:

$$\bar{X}_{A(\omega)} = \bar{\delta}_{AI} \cdot \bar{D}_I + \bar{\delta}_{AD} \cdot \bar{D}_D \quad [1]$$

$$\bar{X}_{B(\omega)} = \bar{\delta}_{BI} \cdot \bar{D}_I + \bar{\delta}_{BD} \cdot \bar{D}_D \quad [2]$$

Siendo $\bar{\delta}_{AI}$, $\bar{\delta}_{AD}$, $\bar{\delta}_{BI}$ y $\bar{\delta}_{BD}$ los correspondientes "coeficientes de influencia" o "constantes de proporcionalidad complejas"

- $\bar{\delta}_{AI}$ es el complejo por el que hay que multiplicar el complejo \bar{D}_I para hallar la vibración producida por este en el cojinete A, $X_{A(\omega)}$ (de la cual se conoce su amplitud y fase).

Representa, en consecuencia, el efecto de desbalanceo producido por la masa m_I en el cojinete A.

- $\bar{\delta}_{AD}$ Representa el efecto del desbalanceo producido por la masa m_D en el cojinete A.

En consecuencia, la ecuación [1] representa los efectos de los desbalanceos producidos por m_I y m_D en el cojinete A.

Evidentemente, lo mismo podría decirse respecto del cojinete B.

- Al añadir la masa m_{PD} , en el lado derecho del rotor, y con ángulo dado respecto de la señal de referencia

(cero grados en este caso), las nuevas ecuaciones serán: (si \bar{P}_D es el complejo que representa la masa añadida):

$$\bar{X}_{A(O+PD)} = \bar{\delta}_{AI} \cdot \bar{D}_I + \bar{\delta}_{AD} \cdot (\bar{D}_D + \bar{P}_D) \quad [3]$$

$$\bar{X}_{B(O+PD)} = \bar{\delta}_{BI} \cdot \bar{D}_I + \bar{\delta}_{BD} \cdot (\bar{D}_D + \bar{P}_D) \quad [4]$$

Restando [1] de [3] y [2] de [4] obtenemos:

$$\bar{X}_{A(O+PD)} - \bar{X}_{A(O)} = \bar{\delta}_{AD} \cdot \bar{P}_D$$

$$\bar{X}_{B(O+PD)} - \bar{X}_{B(O)} = \bar{\delta}_{BD} \cdot \bar{P}_D$$

de donde puede calcularse los dos coeficientes de influencia

$$\bar{\delta}_{AD} = \frac{\bar{X}_{A(O+PD)} - \bar{X}_{A(O)}}{\bar{P}_D}$$

$$\bar{\delta}_{BD} = \frac{\bar{X}_{B(O+PD)} - \bar{X}_{B(O)}}{\bar{P}_D}$$

- Al añadir la masa m_{PI} en el lado izquierdo del rotor, y con un ángulo dado respecto de la marca (cero grados en este caso), si llamamos \bar{P}_I al complejo que la representa, puede escribirse:

$$\bar{X}_{A(O+PI)} = \bar{\delta}_{AI} \cdot (\bar{D}_I + \bar{P}_I) + \bar{\delta}_{AD} \cdot \bar{P}_D \quad [5]$$

$$\bar{X}_{B(O+PI)} = \bar{\delta}_{BI} \cdot (\bar{D}_I + \bar{P}_I) + \bar{\delta}_{BD} \cdot \bar{D}_D \quad [6]$$

Restando [1] de [5] y [2] de [6] se tienen:

$$\bar{X}_{A(O+PI)} - \bar{X}_{A(O)} = \bar{\delta}_{AI} \cdot \bar{P}_I$$

$$\bar{X}_{B(O+PI)} - \bar{X}_{B(O)} = \bar{\delta}_{BI} \cdot \bar{P}_I$$

de donde pueden calcularse los coeficientes de influencia:

$$\bar{\delta}_{AI} = \frac{\bar{X}_{A(O+PI)} - \bar{X}_{A(O)}}{\bar{P}_I}$$

$$\bar{\delta}_{BI} = \frac{\bar{X}_{B(O+PI)} - \bar{X}_{B(O)}}{\bar{P}_I}$$

-Una vez conocidos estos cuatro coeficientes, las ecuaciones [1] y [2] nos permiten hallar \bar{D}_I y \bar{D}_D :

$$\bar{D}_I = \frac{\bar{\delta}_{BD} \cdot \bar{X}_{A(O)} - \bar{\delta}_{AD} \cdot \bar{X}_{B(O)}}{\bar{\delta}_{BD} \cdot \bar{\delta}_{AI} - \bar{\delta}_{AD} \cdot \bar{\delta}_{BI}}$$

$$\bar{D}_D = \frac{\bar{\delta}_{BI} \cdot \bar{X}_{A(O)} - \bar{\delta}_{AI} \cdot \bar{X}_{B(O)}}{\bar{\delta}_{BD} \cdot \bar{\delta}_{AI} - \bar{\delta}_{AD} \cdot \bar{\delta}_{BI}}$$

- Conocidos $\left\{ \begin{array}{l} \bar{D}_I = a + bi = D_I \angle \theta_I, \text{ siendo } D_I = m_I \cdot R \cdot \omega^2 \\ \bar{D}_D = c + di = D_D \angle \theta_D, \text{ siendo } D_D = m_D \cdot R \cdot \omega^2 \end{array} \right.$

podremos calcular las masas equilibradoras m_{EI} y m_{ED} , siendo sus posiciones respectivas $(\theta_I + \pi)$ y $(\theta_D + \pi)$.

Si las masas equilibrantes se colocan con el mismo radio R , entonces:

$$m_{ez} = m_z$$

$$m_{ep} = m_p$$

- Método de equilibrado por correcciones independientes en cada plano:

Este es un método aproximado, que se resuelve por tanteos sucesivos, y que consiste en equilibrar primero un plano del rotor (olvidándose de lo que ocurra en el otro extremo), para luego pasar a equilibrar el segundo plano.

El método obvia totalmente las consecuencias del "efecto cruzado", por lo cual los resultados difícilmente serán óptimos, pudiendo darse el caso de que la corrección en un plano empeore, por motivo del efecto cruzado, la vibración (el desequilibrio) en el otro plano.

- El método puede resumirse en las siguientes etapas:

19.- Se instrumenta el rotor, colocando un acelerómetro en cada rodamiento, en la misma posición relativa (en la que se esperen mayores vibraciones) y se colocan dos lámparas estroboscópicas conectadas al acelerómetro. Estas centellearán cuando la vibración alcance su máxima amplitud.

20.- Se hacen las correspondientes marcas de fase en ambos lados del rotor.

39.- Se hace girar el rotor y se anota la amplitud máxima y fase en cada lado.

49.- Se elige para equilibrar en primer lugar el lado que presenta vibración más fuerte. Para ello se sigue el método de medida del ángulo de desfase, colocando una masa de prueba en situación definida.

59.- Se efectúa una nueva carrera y se anotan de nuevo la amplitud y fase en cada lado del rotor.

69.- Se para de nuevo el rotor y en la forma ya conocida, se calcula la masa correctora y se añade al plano del rotor que se está equilibrando.

79.- Se efectúa una nueva carrera del rotor y se observa el nivel de equilibrado en el plano elegido así como el nivel de vibraciones en el otro plano y el ángulo de fase. En este otro plano (donde no se han efectuado correcciones) la vibración podrá ser menor o mayor que la registrada antes de proceder al equilibrado en el plano elegido.

89.- Se para de nuevo el rotor y se añade una masa de prueba en el otro plano. Se anota la vibración y fase de ambos planos.

99.- Se para el rotor y se equilibra el segundo plano por el procedimiento conocido.

100.- Se efectúa una nueva carrera para ver el efecto del equilibrado en ambos planos. Puede ocurrir que el primer plano, inicialmente equilibrado, vuelva a encontrarse desequilibrado por motivo del efecto cruzado.

Si fuera así se precisaría una nueva tanda de operaciones de equilibrado pero sin retirar los pesos equilibradores ya colocados.

NOTA: Si no existieran efectos cruzados, es decir, si se tratara de un desequilibrio puramente estático, este sistema de equilibrado podría realizarse en solo tres carreras, colocando a la vez las dos masas de ensayo, una en cada plano, y calculando simultáneamente las masas correctoras para cada plano.

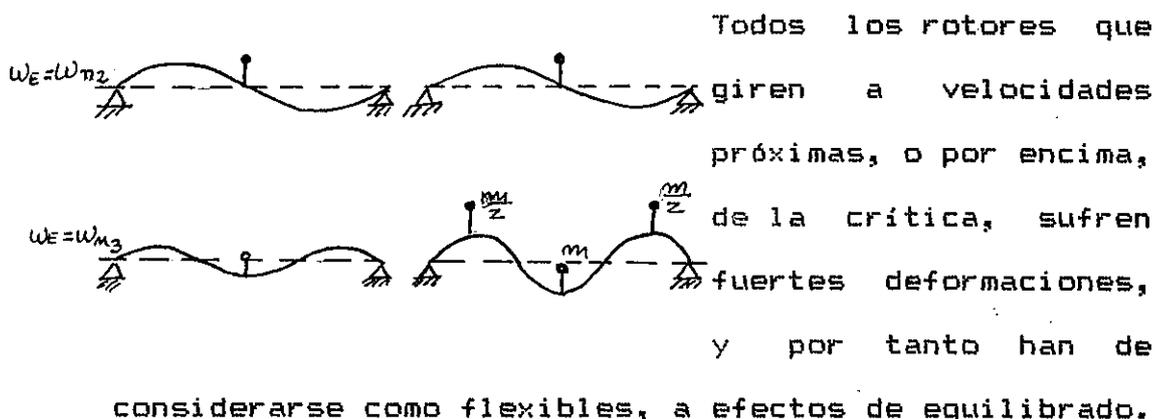
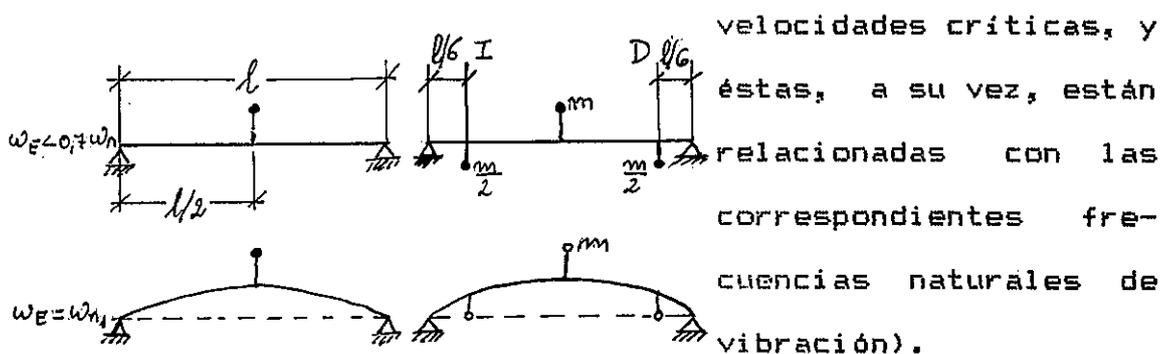
NOTA: Cuando el efecto cruzado es muy grande, es decir, cuando el equilibrado de un plano empeora la vibración en el otro, puede procederse "cambiando" las lecturas de corrección, es decir, usar las lecturas del plano derecho para corregir el plano izquierdo, y viceversa.

(Este es un caso que suele ocurrir en rotores largos en voladizo).

3.1.3.1.- INTRODUCCION DEL EQUILIBRADO DE MIEMBROS EN ROTACION FLEXIBLES

- Hasta ahora hemos analizado varios casos de equilibrado de rotores rígidos, en los que se ha supuesto que la deformación no existía.

Tal supuesto es correcto en la práctica si el rotor gira por debajo del 70% de su velocidad crítica. (En efecto, el clasificar un rotor como rígido o flexible sólo tiene que ver con la relación que guarde la velocidad nominal de giro con las sucesivas



Las figuras son bastante expresivas de lo que ocurre en un rotor flexible desequilibrado.

Las de la izquierda representan un rotor con una masa desequilibrada m , girando por debajo del 70% de la velocidad crítica, y a velocidades iguales a la 1ª, 2ª y 3ª velocidades críticas. Se observa perfectamente que a la 1ª velocidad crítica aumenta la magnitud del desequilibrio, a la segunda velocidad crítica el desequilibrio es el mismo que a velocidades inferiores al 70% de la crítica, y a la 3ª velocidad crítica el desequilibrado vuelve a aumentar.

En estas condiciones, si se eligen dos planos de equilibrado Izquierdo y Derecho a $1/6$ de la luz, y se equilibra a velocidad de rotación baja (rotor rígido) se precisa colocar dos masas de valor $m/2$, como se ve en la figura.

Sin embargo, cuando el rotor gira a la primera velocidad crítica (la deformada es una senoide). La masa desequilibrada m se desplaza aún más del eje de giro, por lo que el equilibrado en los planos I y D requiere la colocación de masas mayores equilibradoras (de valor m en este caso supuesto). Evidentemente, cuando la velocidad descienda por debajo de la crítica, este rotor, así equilibrado, se encontrará desequilibrado.

velocidad de régimen del rotor, no cause graves desequilibrios para velocidades más bajas (durante el periodo de arranque).

Cuando el rotor gira a la segunda velocidad crítica, el plano central no se desplaza de su posición, por lo que no se precisan pesos correctores en las posiciones indicadas.

A la tercera velocidad crítica, se precisarían de nuevo dos pesos correctores de $m/2$ cada uno, pero colocados en las posiciones que se ven en la figura.

- Como resumen de todo lo dicho se ve una cosa clara: Un rotor flexible sólo puede equilibrarse correctamente para una velocidad de giro dada.

A cualquier otra velocidad quedará automáticamente desequilibrado.

La única forma de evitar el problema mencionado es corregir cada desequilibrio del rotor en el plano donde se produce:

(Desgraciadamente, tal corrección es imposible en la mayoría de los rotores reales, excepto turbinas de múltiples ruedas por desconocer en que planos (rebarnadas) del mismo se producen tales desequilibrios).

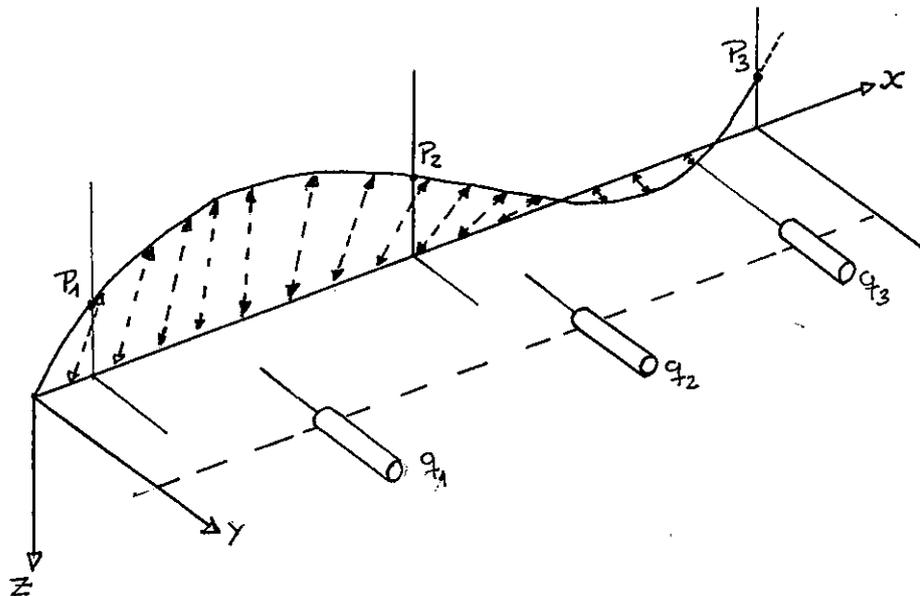
Esto nos lleva a la necesidad de un equilibrado multiplano, que aun cuando sólo sea 100% efectivo para la

3.1.3.2.- EQUILIBRADO DE ROTORES FLEXIBLES

- El método que a continuación vamos a ver, conocido como "equilibrado multiplano", puede considerarse como una generalización del método de equilibrado en dos planos de rotores largos, anteriormente estudiado.

- El método permite elegir "p" planos de equilibrado y precisa tomar las medidas de amplitud y fase en "q" planos de medida.

La situación es la mostrada gráficamente en la figura:



- En el caso de dos planos de equilibrado I y D, y dos planos de medida A y B, vistos para un rotor largo rígido, las ecuaciones que daban las amplitudes complejas relativas (medidas en los planos de medida), en función de los desequilibrios complejos relativos

en los planos de corrección, y de los coeficientes de influencia complejos, venían dadas por:

$$\bar{X}_{A(i)} = \bar{\delta}_{A1} \cdot \bar{D}_1 + \bar{\delta}_{AD} \cdot D_D$$

$$\bar{X}_{B(i)} = \bar{\delta}_{B1} \cdot \bar{D}_1 + \bar{\delta}_{BD} \cdot D_D$$

en donde el complejo $\bar{\delta}_{A1}$ representaba el efecto del desbalanceo existente en el plano I sobre el plano de medida A.

- Generalizando este concepto, podemos escribir:

$$[\bar{X}_0]_{q \times 1} = [\bar{\delta}]_{q \times p} \cdot [\bar{D}]_{p \times 1} \quad [11]$$

en donde la matriz columna $[\bar{X}_0]$, representa las medidas de amplitud y fase en los que (relativas a un marca inicial) producidas por los desequilibrios existentes.

La matriz columna $[\bar{D}]$ representa los desbalanceos existentes en los p planos donde se va a proceder al equilibrado.

La matriz $[\bar{\delta}]_{p \times q}$ es la matriz de los coeficientes de influencia complejos, en donde el término genérico $\bar{\delta}_{i,j}$ representa el efecto del desbalanceo existente en el plano i sobre el plano de medida j.

- Para evaluar los términos de la matriz $[\delta]$ han de efectuarse n carreras del rotor, a velocidades $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$, en las proximidades de la velocidad nominal de giro (para la cual el rotor va a ser equilibrado)

La magnitud y fase de la vibración, en cada uno de los planos de medida se anota para cada velocidad $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$.

Estas observaciones se relacionan con los desequilibrios originales en cada uno de los planos de corrección por las expresiones:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}^1_{o1} \\ \bar{X}^1_{o2} \\ \dots \\ \bar{X}^1_{on} \\ \hline \bar{X}^2_{o1} \\ \bar{X}^2_{o2} \\ \dots \\ \bar{X}^2_{on} \\ \hline \dots \\ \bar{X}^n_{o1} \\ \bar{X}^n_{o2} \\ \dots \\ \bar{X}^n_{on} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}^1_{11} & \bar{\delta}^1_{12} & \bar{\delta}^1_{13} & \dots & \bar{\delta}^1_{1p} \\ \bar{\delta}^1_{21} & \bar{\delta}^1_{22} & \bar{\delta}^1_{23} & \dots & \bar{\delta}^1_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\delta}^1_{q1} & \bar{\delta}^1_{q2} & \bar{\delta}^1_{q3} & \dots & \bar{\delta}^1_{qp} \\ \hline \bar{\delta}^2_{11} & \bar{\delta}^2_{12} & \bar{\delta}^2_{13} & \dots & \bar{\delta}^2_{1p} \\ \bar{\delta}^2_{21} & \bar{\delta}^2_{22} & \bar{\delta}^2_{23} & \dots & \bar{\delta}^2_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\delta}^2_{q1} & \bar{\delta}^2_{q2} & \bar{\delta}^2_{q3} & \dots & \bar{\delta}^2_{qp} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\delta}^n_{11} & \bar{\delta}^n_{12} & \bar{\delta}^n_{13} & \dots & \bar{\delta}^n_{1p} \\ \bar{\delta}^n_{21} & \bar{\delta}^n_{22} & \bar{\delta}^n_{23} & \dots & \bar{\delta}^n_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\delta}^n_{q1} & \bar{\delta}^n_{q2} & \bar{\delta}^n_{q3} & \dots & \bar{\delta}^n_{qp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \\ \dots \\ \bar{D}_p \end{bmatrix} \quad [2]$$

En esta ecuación se observa que si

$$n \cdot q = p \quad [3]$$

La matriz $[\bar{\delta}]$ será cuadrada. En consecuencia el número de carreras n vienen determinadas por la relación 3.

- Para calcular el valor de cada uno de estos coeficientes $\bar{\delta}_{ij}$ se añade una masa de ensayo en uno de los planos p y se mide la respuesta en cada uno de los planos de medida.

Por ejemplo, añadiendo el peso de ensayo \bar{P} en el plano i (en magnitud y posición relativa conocida), podríamos escribir, para la velocidad w_1 :

$$\begin{bmatrix} \bar{X}^{1_{11}} \\ \bar{X}^{1_{12}} \\ \dots \\ \bar{X}^{1_{1q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}^{1_{11}} & \bar{\delta}^{1_{12}} & \bar{\delta}^{1_{13}} & \dots & \bar{\delta}^{1_{1p}} \\ \bar{\delta}^{1_{21}} & \bar{\delta}^{1_{22}} & \bar{\delta}^{1_{23}} & \dots & \bar{\delta}^{1_{2p}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\delta}^{1_{q1}} & \bar{\delta}^{1_{q2}} & \bar{\delta}^{1_{q3}} & \dots & \bar{\delta}^{1_{qp}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{D}_1 + \bar{P} \\ \bar{D}_2 \\ \dots \\ \bar{D}_p \end{bmatrix} \quad [4]$$

siendo X_{1i} el complejo medido en el plano i cuando la masa de ensayo se coloca en el plano de equilibrado i , etc.

Restando de [4] la parte correspondiente a w_1 de [2], se tendrá:

$$\bar{\delta}_{11}^1 = \frac{\bar{X}_{11}^1 - \bar{X}_{01}^1}{\bar{P}} ; \bar{\delta}_{21}^1 = \frac{\bar{X}_{12}^1 - \bar{X}_{02}^1}{\bar{P}} \dots$$

$$\dots \quad \bar{\delta}_{11}^1 = \frac{\bar{X}_{11}^1 - \bar{X}_{01}^1}{\bar{P}}$$

- Si ahora se quita la masa de ensayo del plano de corrección 1, y se coloca en el 2, y se repite el procedimiento para la misma velocidad de giro w_1 , se obtendrá $\bar{\delta}_{12}^1, \bar{\delta}_{22}^1, \bar{\delta}_{32}^1, \dots, \bar{\delta}_{q2}^1$, por medio del conocimiento de los complejos $\bar{X}_{12}^1, \bar{X}_{22}^1, \bar{X}_{32}^1, \dots, \bar{X}_{q2}^1$

$$\bar{\delta}_{12}^1 = \frac{\bar{X}_{21}^1 - \bar{X}_{01}^1}{\bar{P}} ; \bar{\delta}_{22}^1 = \frac{\bar{X}_{22}^1 - \bar{X}_{02}^1}{\bar{P}} \dots$$

$$\dots \quad \bar{\delta}_{12}^1 = \frac{\bar{X}_{21}^1 - \bar{X}_{01}^1}{\bar{P}}$$

- Repitiendo el procedimiento para las n rotaciones, tendremos calculados todos los coeficientes $\bar{\delta}_{ij}^k$.

La expresión generalizada de estos será:

$$\bar{\delta}_{ij}^k = \frac{\bar{X}_{ji}^k - \bar{X}_{0i}^k}{\bar{P}} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, q \\ j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

- Una vez calculada la matriz $[\delta]$, se invertirá y se hallarán las p masas desequilibradas:

$$[\bar{D}] = [\delta]^{-1} \cdot [\bar{X}]$$

NOTA: Si los planos de medida son los dos de los cojinetes, entonces $q = 2$.

En este caso, $n = p/q$ puede ser par o impar, según que lo sea p.

Si p se elige impar, $n = \frac{1}{2} (p + 1)$

Si p es par, $n = \frac{1}{2} p$

En el caso de elegir p impar debe eliminarse una línea de la ecuación [2] para que $[\delta]$ siga siendo una matriz cuadrada.

3.2.1.- INTRODUCCION AL EQUILIBRADO DE MIEMBROS EN TRASLACION

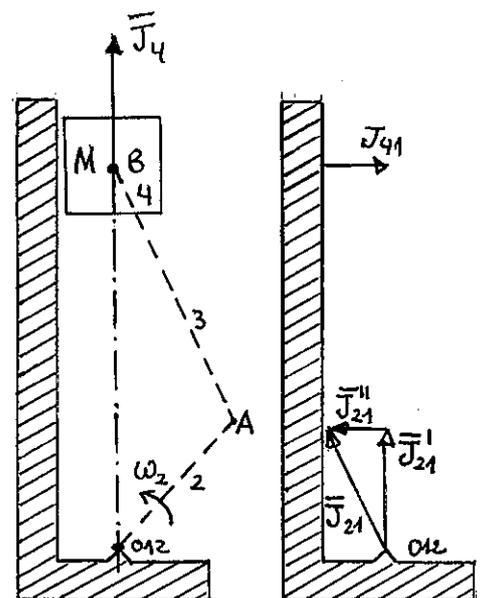
- Ya hemos visto como las masas con movimiento de traslación (generalmente con movimiento alternativo) son causa de la aparición de importantes acciones sobre el bastidor, y por consiguiente originan fuertes desequilibrios en los mecanismos.

- En el caso concreto de la corredera (pistón en motores y compresores) de los mecanismos biela-manivela-corredera, las fuertes aceleraciones que esta sufre se traducen en unas fuerzas desequilibradas sobre el bastidor, que vamos a considerar someramente.

En el mecanismo de la figura se supone que sólo el pistón tiene masa M , y que la manivela gira con velocidad ω_2 .

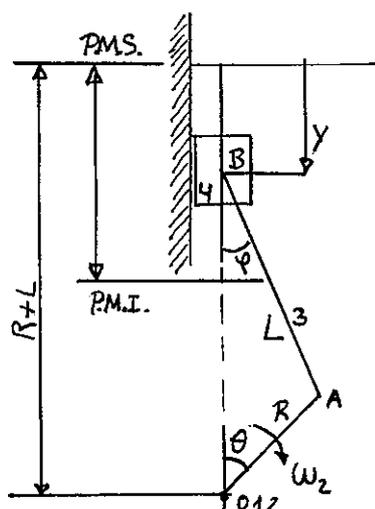
La fuerza de inercia que aparece sobre el pistón es \bar{J}_4 , en la dirección y sentido señalado en el dibujo.

Ella da lugar a las reacciones sobre el bastidor \bar{J}_{41} y \bar{J}_{21} .



De esta manera, las acciones sobre el bastidos son una fuerza nula vertical \bar{J}'_{21} y un "par de vuelco" $\bar{J}_{41} - \bar{J}''_{21}$

De estas dos acciones es mucho más importante la fuerza $J^{\circ}z_1$ que el par, por lo que sólo vamos a considerar la primera.



En el mecanismo de la figura se tiene:

$$y = R + L - R \cdot \cos \theta - L \cdot \cos \phi$$

$$y = R \cdot (1 - \cos \theta) + L \cdot (1 - \cos \phi) \quad [11]$$

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \\ &= \sqrt{1 - (R^2/L^2) \cdot \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

(Pues $\sin \phi/R = \sin \theta/L$)

Desarrollando el radical en serie (binomio de Newton)

$$\begin{aligned} [1 - (R^2/L^2) \cdot \sin^2 \theta]^{1/2} &= \\ &= 1 - \frac{1}{2} (R/L \cdot \sin \theta)^2 - \frac{1}{8} (R/L \cdot \sin \theta)^4 \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} y &= R \cdot (1 - \cos \theta) + R \cdot [\frac{1}{2} (R/L) \cdot \sin^2 \theta \\ &\quad + \frac{1}{8} (R^3/L^3) \cdot \sin^4 \theta + \dots] \end{aligned}$$

Dado que R/L normalmente es pequeño pueden despreciarse los términos superiores al cuadrado con lo que queda para el desplazamiento y la expresión aproximada:

$$y = R \cdot (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} (R^2/L) \cdot \sin^2 \theta \quad [12]$$

Derivando [2] respecto del tiempo:

$$\dot{y} = R \cdot \omega \cdot [\text{Sen } \theta + \frac{1}{2} \cdot (R/L) \cdot \text{Sen } 2\theta] \quad [3]$$

Derivando de nuevo:

$$\ddot{y} = R \cdot \omega^2 \cdot [\text{Cos } \theta + (R/L) \cdot \text{Cos } 2\theta] \quad [4]$$

Con lo cual al final la fuerza de inercia provocada por la masa M será:

$$|\bar{J}_4| = M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \text{Cos } \theta + M \cdot (R^2/4L) \cdot (2\omega)^2 \cdot \text{Cos } 2\theta \quad [5]$$

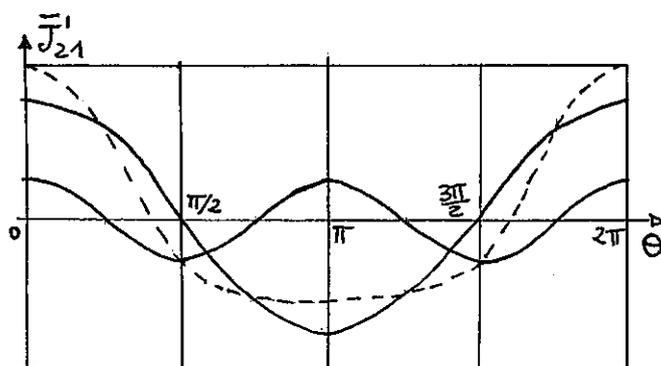
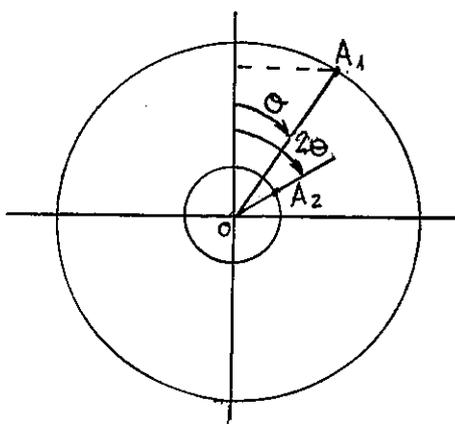
Como $\bar{J}_4 = \bar{J}''_{z1}$, resulta:

$$|J''_{z1}| = M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \text{Cos } \theta + M \cdot (R^2/4L) \cdot (2\omega)^2 \cdot \text{Cos } 2\theta \quad [6]$$

En consecuencia la fuerza que sobre el bastidor causa una masa con movimiento alternativo se compone de dos sumandos de tipo armónico: uno de amplitud $A_1 = M \cdot \omega^2 \cdot R$ y frecuencia circular θ y otro de amplitud $A_2 = M \cdot (R^2/4L) \cdot (2\omega)^2$ y frecuencia circular 2θ .

NOTA: Aunque no sean rigurosamente exactos los términos, al primer sumando se le conoce por fuerza de inercia de primer orden y al segundo, fuerza de inercia de segundo orden.

En las figuras se han representado estos sumandos en forma gráfica. La suma de las dos fuerzas armónicas de diferentes amplitudes y frecuencias circulares una doble que la otra se ha representado, con trazos, para un ciclo.



NOTA: Obsérvese que al aumentar la longitud de la biela L se reduce la importancia del segundo sumando.

Si $L = \infty$, la fuerza de inercia resultante sobre el bastidor sería armónica

$$|J_{21}^i| = M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \theta$$

- A la vista de las acciones existentes sobre el bastidor se comprende fácilmente que el equilibrado no puede resolverse añadiendo una masa equilibradora al miembro en cuestión (modificando su centro de gravedad) como se hacía con los rotores desequilibrados.

NOTA: Aunque no sean rigurosamente exactos los términos, al primer sumando se le conoce por fuerza de inercia de primer orden y al segundo, fuerza de inercia de 2º orden.

La única forma de hacerlo, según se adelantó en el punto 2-2, es la de colocar miembros adicionales en el mecanismo al que pertenezca la corredera, de forma que las fuerzas de inercia por ellos producidos sea, en todo instante, igual y contraria a la de la corredera.

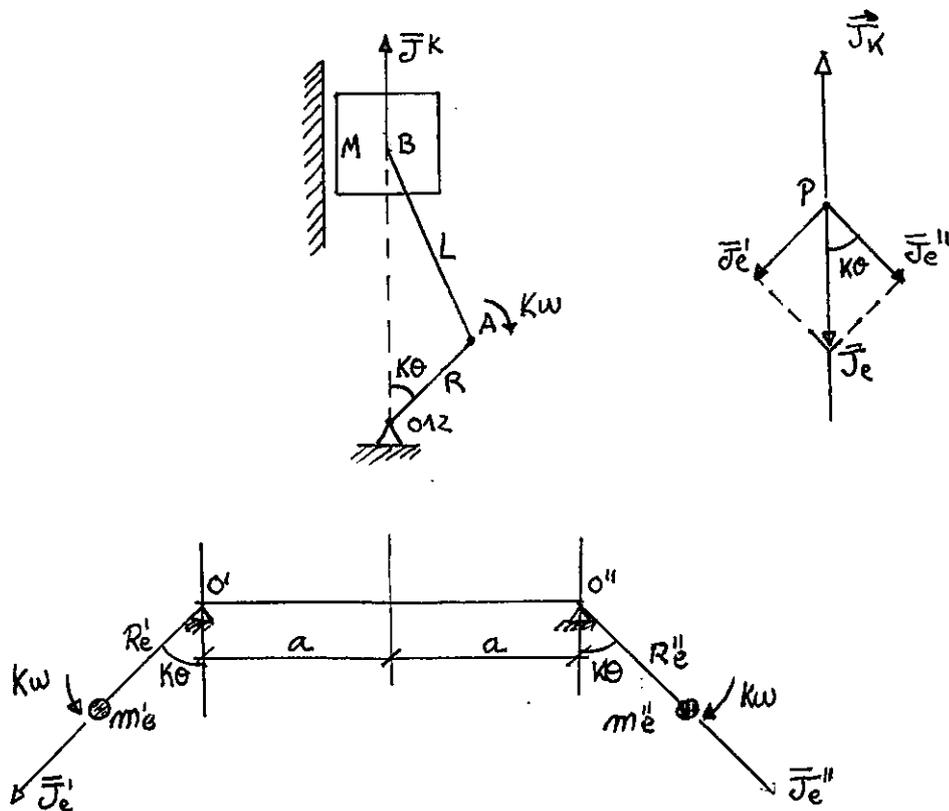
Tal forma de proceder al equilibrado de estos miembros vamos a verla con un ejemplo.

3.2.2.- EQUILIBRADO DE MIEMBROS EN TRASLACION

- Tal como se ha dicho, el equilibrado de miembros de traslación solo puede efectuarse introduciendo nuevos miembros en el mecanismo al que pertenece la corredera de manera que en su movimiento produzcan unas fuerzas de inercia cuyas acciones sobre el bastidor anulen a las producidas por la corredera.

- Como se comprenderá fácilmente, el procedimiento requiere la compensación por separado de la fuerza de inercia de primer orden y de la de segundo orden.

- En la figura se presenta el esquema básico del mecanismo compensador para el armónico de orden k .



(Se ha puesto la velocidad angular $k\omega$ y el ángulo $k\theta$ para indicar que el procedimiento puede ser de aplicación a la fuerza de inercia de primer orden ($k = 1$) o de segundo orden ($k = 2$))

Se han colocado dos masas compensadoras m'_z y m''_z , giratorias, con centro en O' y O'' , arbitrariamente elegidos, pero de forma que queden simétricamente situados respecto al eje de la corredera, y radios respectivos R'_z y R''_z . Estas masas, por medio del accionamiento que sea (normalmente a base de ruedas dentadas) han de moverse a la misma velocidad $k\omega$, y formar con el eje de la corredera (vertical en el dibujo) el mismo ángulo $k\theta$.

De esta forma, las fuerzas de inercia, producidas por m'_z y m''_z se compondrán vectorialmente para dar en todo instante una resultante igual y opuesta a la fuerza de inercia de la corredera, como se ve en el dibujo.

Si se toma $m_z = m'_z = m''_z$; $R_z = R'_z = R''_z$, entonces:

$$|\bar{J}'_z| = |\bar{J}''_z| = m_z \cdot R_z \cdot (k\omega)^2$$

En el polígono de fuerzas:

$$\bar{J}'_z + \bar{J}''_z = \bar{J}_z \implies |\bar{J}_z| = 2 \cdot m_z \cdot R_z \cdot (k\omega)^2 \cdot \cos(k\theta)$$

Igualando esta módulo con el de la fuerza de inercia de la corredera para el armónico k (\bar{J}^k) se tendrá:

$$|\bar{J}^k| = 2 \cdot m_E \cdot R_E \cdot (kw)^2 \cdot \cos(k\theta)$$

- Para la fuerza de inercia de primer orden:

$$M \cdot R \cdot w^2 \cdot \cos \theta = 2 \cdot m_E \cdot R_E \cdot (w)^2 \cdot \cos(\theta)$$

$$M \cdot R = 2 \cdot m_E \cdot R_E$$

$$m_E \cdot R_E = M \cdot R / 2$$

Expresión que nos permite hallar el producto $m_E \cdot R_E$ para equilibrar la fuerza de segundo orden (eligiendo convenientemente m_E y R_E)

- Para la de segundo orden:

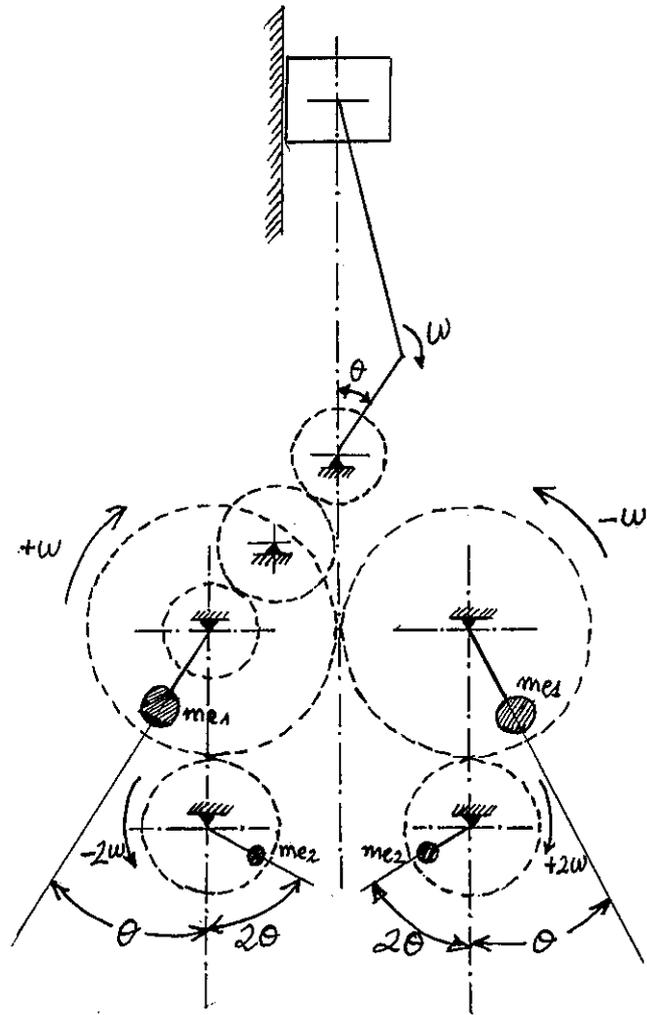
$$M \cdot (R^2 / 4L) \cdot (2w)^2 \cdot \cos 2\theta = 2 \cdot m_E \cdot R_E \cdot (2w)^2 \cdot \cos(2\theta)$$

$$M \cdot R^2 / 4L = 2m_E \cdot R_E$$

$$m_E \cdot R_E = M \cdot R^2 / 8L$$

Expresión que nos permite hallar el producto $m_E \cdot R_E$ para equilibrar la fuerza de segundo orden.

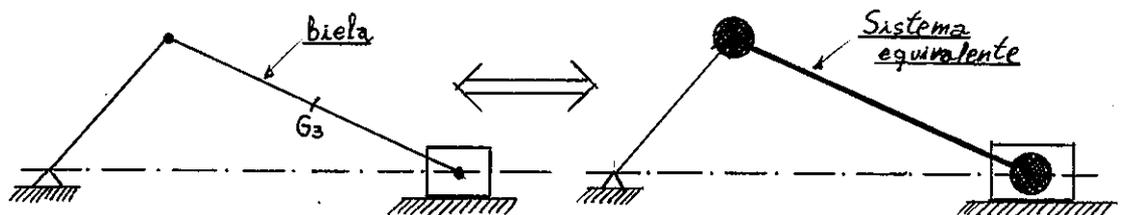
- En la figura se representa un esquema de la resolución práctica, a base de ruedas dentadas, del equilibrado de las fuerzas de inercia de primero y segundo orden de una corredera.



3.3.1.- INTRODUCCION AL EQUILIBRADO DE MIEMBROS EN MOVIMIENTO COMPUESTO

- Los miembros en movimiento compuesto, como son bielas de mecanismos biela-manivela-corredera, tampoco pueden equilibrarse como los rotores, ni siquiera como las correderas.

Su equilibrado se basa en modificar su geometría para lograr que el sistema de masas concentradas, dinámicamente equivalente a la biela, coincida con el extremo de la manivela y con el eje de la corredera, de manera que pueden ser equilibrados como una masa rotatoria y otra en traslación, (o dos masas en rotación, si el mecanismo es de doble manivela).



NOTA: Como sabemos de dinámica de mecanismos, un miembro en movimiento puede ser sustituido por un sistema equivalente formado por dos masas puntuales: una colocada en un punto cualquiera del eje geométrico del miembro, y la otra situada en el correspondiente centro de percusión.

Llamando A al punto arbitrariamente elegido, y P al centro de percusión, y siendo m_A y m_P las correspondientes masas concentradas en cada punto, el sistema será dinámicamente equivalente al miembro AB, de masa m , centro de gravedad G y momento de inercia respecto de G I_G , si:

$$m_A + m_P = m$$

$$m_A \cdot \overline{AG} = m_P \cdot \overline{PG}$$

$$\overline{m_A} \cdot \overline{AG}^2 = \overline{m_P} \cdot \overline{PG}^2 = I_G$$

De estas tres ecuaciones se obtienen los valores de m_A y m_P que las satisfacen:

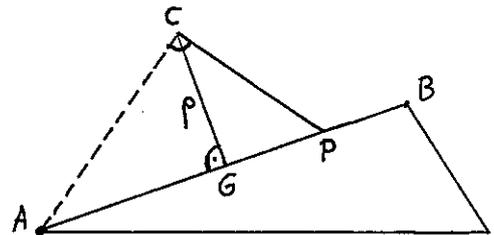
$$m_A = m \cdot (\overline{GP} / \overline{AP})$$

$$m_P = m \cdot (\overline{GP} / \overline{BP})$$

NOTA: La situación del centro de percusión puede obtenerse fácilmente por la expresión:

$$\overline{AG} \cdot \overline{GP} = \rho^2$$

siendo ρ el radio de inercia del miembro biela.



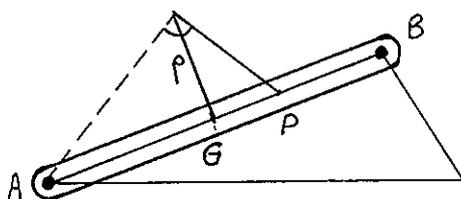
La construcción gráfica es la que se ve en la figura.

P se halla contruyendo el triángulo rectángulo ACG, con lados \overline{AG} y f , y trazando por C una perpendicular a \overline{AC} hasta que corte \overline{AB} en P

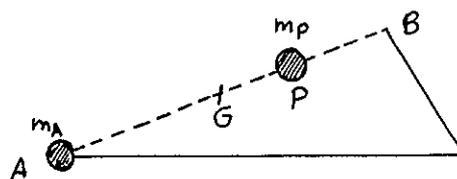
3.3.2.- EQUILIBRADO DE MIEMBROS EN MOVIMIENTO COMPUESTO

- Tal como se dijo anteriormente, el equilibrado de bielas consiste en modificar la geometría de la misma (posición del centro de gravedad y valor del radio de inercia) para hacer que las dos masas que le son dinámicamente equivalentes coincidan con las articulaciones de la misma.

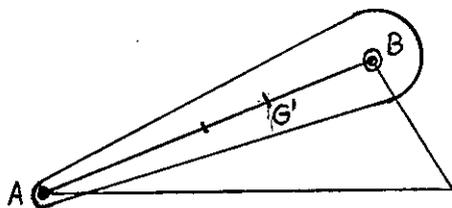
En ese momento, la biela puede ser equilibrada junto con las manivelas o correderas a las que se une, como se ve en las figuras.



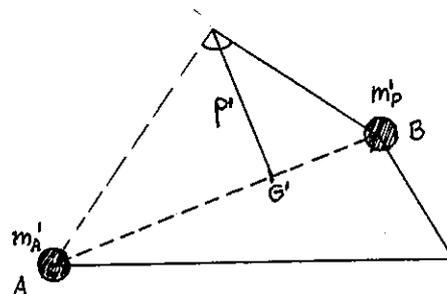
biela original



sistema equivalente



biela modificada
(G' nuevo centro
de gravedad)



sistema equivalente

- Coseguido el sistema equivalente m'_A y m'_P , la masa m'_A se equilibra como una masa en traslación y la m'_P como una masa en rotación, por los procedimientos ya conocidos.

(En la práctica, m'_P suele ser $2/3 m$ y m'_A $1/3 m$, siendo m la masa total de la biela.

4.1.- INTRODUCCION AL EQUILIBRADO DE MECANISMOS

- Un mecanismo cualquiera se dice que está equilibrado cuando el conjunto de las fuerzas que actúan sobre sus miembros producen sobre el bastidor una resultante y un momento resultante (respecto de cualquier punto del mismo) nulo.

- Por consiguiente, el equilibrado de mecanismos consistirá en la ejecución de las operaciones necesarias (sobre la geometría de los miembros, número de estos o disposición en el mecanismo) para lograr la nulidad de la fuerza y momento de inercia resultantes sobre el bastidor (fuerzas y momentos que se transmitirán a través de los miembros directamente unidos al bastidor).

- Dado que la eliminación de las fuerzas de inercia sobre el bastidor no garantizan la anulación de los momentos por ella producidos, ambos problemas, eliminación de fuerzas y eliminación de momentos, han de ser tratados por separado.

- De acuerdo con lo expuesto en el punto 2-2, tres son los métodos para lograr que las fuerzas sobre el bastidor den un resultante cero:

1º.- Equilibrar separadamente todos y cada uno de los miembros del mecanismo, ya sean estos manivelas (rotores) bielas o correderas.

Esto significa la modificación de la geometría de algunos miembros (manivelas y bielas) y la introducción de nuevos miembros (para equilibrar las correderas si las hubiera).

29.- Efectuar un rediseño conveniente de cada miembro para que sin que cada uno esté equilibrado por separado hacer que las fuerzas de inercia del conjunto produzcan una resultante nula sobre el bastidor. Esto se consigue haciendo que el centro de gravedad del conjunto de todos los miembros móviles permanezca estacionario.

(Este método puede considerarse una simplificación y generalización del caso anterior)

30.- Adicionar un "duplicado" del mecanismo original, de manera que el centro de gravedad del conjunto de ambos mecanismos permanezca estacionario.

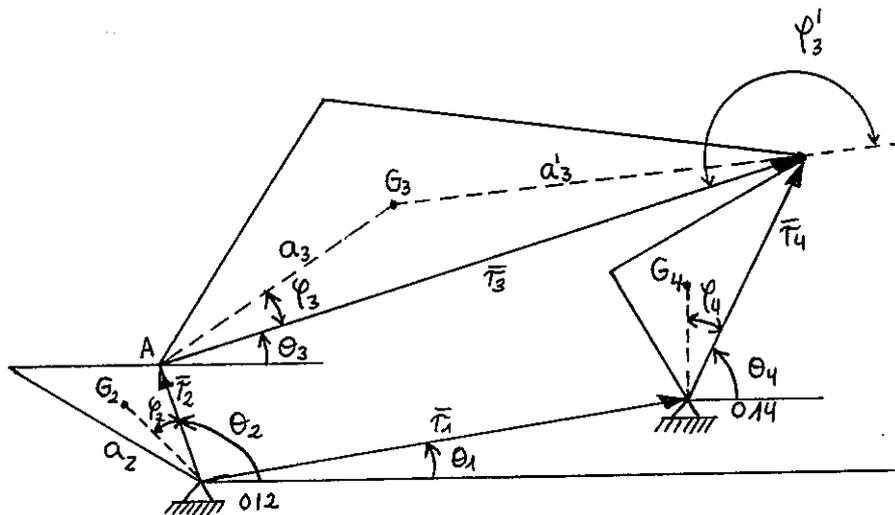
- De estos tres métodos, (existen algunos más que no mencionamos), el primero ya lo conocemos y el tercero no resulta de interés su estudio, por lo cual vamos a centrarnos en el equilibrado de mecanismos planos por este método, conocido por el "método de los vectores linealmente independientes".

NOTA: En todo el estudio vamos a referirnos a mecanismos simples, como puede ser un mecanismo manivela-biela-corredera aislado.

Evidentemente, un mecanismo formado por 8 mecanismos manivela-biela-corredera, unidos por el mismo cigüeñal, formando un motor de 8 cilindros, tendrá un tratamiento para su equilibrio totalmente diferente, hasta el punto como veremos más adelante, que una conveniente disposición de cilindros, bielas y codos del cigüeñal puede producir un equilibrio total. En consecuencia en el caso de mecanismos complejos lo que analizaremos es su equilibrio intrínseco o grado de desequilibrado.

4.2.- EQUILIBRADO GENERAL DE MECANISMOS PLANOS SIMPLES

- Tal como hemos señalado vamos a desarrollar el método de los vectores linealmente independientes, aplicado a un mecanismo de 4 barras como el de la figura:



Sean m_2 , m_3 y m_4 las masas de los miembros, G_2 , G_3 y G_4 los correspondientes centros de gravedad, \bar{r}_2 , \bar{r}_3 , \bar{r}_4 y \bar{r}_1 los vectores complejos que definen cinemáticamente el mecanismo.

Las coordenadas a_i , \bar{r}_i definen la posición del centro de gravedad en el interior de cada miembro.

- La masa total de los miembros móviles del mecanismo será:

$$M = m_2 + m_3 + m_4$$

La posición del centro de gravedad del conjunto de los miembros móviles vendrá dada por:

$$\bar{r}_G = 1/M \cdot (m_2 \cdot \bar{r}_{G2} + m_3 \cdot \bar{r}_{G3} + m_4 \cdot \bar{r}_{G4})$$

siendo \bar{r}_{G2} , \bar{r}_{G3} y \bar{r}_{G4} los vectores complejos que definen el centro de gravedad de cada miembro.

En forma compleja, estos vectores podemos escribirlos:

$$\bar{r}_{G2} = a_2 \cdot e^{i(\theta_2 + \beta_2)}$$

$$\bar{r}_{G3} = r_2 \cdot e^{i\theta_2} + a_3 \cdot e^{i(\theta_3 + \beta_3)}$$

$$\bar{r}_{G4} = r_1 \cdot e^{i\theta_1} + a_4 \cdot e^{i(\theta_4 + \beta_4)}$$

Sustituyendo y operando:

$$\begin{aligned} M \cdot \bar{r}_G &= (m_2 \cdot a_2 \cdot e^{i\beta_2} + m_3 \cdot r_2) \cdot e^{i\theta_2} + (m_3 \cdot a_3 \cdot e^{i\beta_3}) \cdot e^{i\theta_3} + \\ &+ (m_4 \cdot a_4 \cdot e^{i\beta_4}) \cdot e^{i\theta_4} + m_4 \cdot r_1 \cdot e^{i\theta_1} \end{aligned} \quad [1]$$

Por otro lado, también puede escribirse:

$$\bar{r}_2 + \bar{r}_3 = \bar{r}_1 + \bar{r}_4$$

$$\bar{r}_2 \cdot e^{i\theta_2} + \bar{r}_3 \cdot e^{i\theta_3} - \bar{r}_1 \cdot e^{i\theta_1} - \bar{r}_4 \cdot e^{i\theta_4} = 0 \quad [2]$$

Esta ecuación [2] indica que los términos que dependen del tiempo en la ecuación [1] (θ_2 , θ_3 , θ_4) no son linealmente independientes.

Evidentemente si en la ecuación [1] se anulasen todos los coeficientes de los términos que dependen del tiempo, el centro de gravedad permanecería estacionario.

En hacer, precisamente, que tales coeficientes se anulen, consiste el método de equilibrado que estamos estudiando.

- Despejando $e^{i\theta_3}$ en la ecuación [2] y sustituyendo en [1] se tendrá:

$$e^{i\theta_3} = 1/r_3 \cdot (r_1 \cdot e^{i\theta_1} - r_2 \cdot e^{i\theta_2} + r_4 \cdot e^{i\theta_4})$$

$$\begin{aligned} M \cdot \bar{r}_G = & [m_2 \cdot a_2 \cdot e^{i\theta_2} + m_3 \cdot r_2 - m_3 \cdot a_3 \cdot (r_2/r_3) \cdot e^{i\theta_3}] \cdot e^{i\theta_2} + \\ & + [m_4 \cdot a_4 \cdot e^{i\theta_4} + m_3 \cdot a_3 \cdot (r_4/r_3) \cdot e^{i\theta_3}] \cdot e^{i\theta_4} + \\ & + [m_1 \cdot r_1 + m_3 \cdot a_3 \cdot (r_1/r_3) \cdot e^{i\theta_3}] \cdot e^{i\theta_1} \end{aligned} \quad [3]$$

Esta ecuación [3] muestra que el centro de gravedad del conjunto puede hacerse estacionario sobre el miembro 1

(ya que este miembro no se mueve, y θ_1 no depende del tiempo), si se anulan los coeficientes de $e^{i\theta_2}$ y $e^{i\theta_3}$

Es decir, si:

$$m_2 \cdot a_2 \cdot e^{i\theta_2} + m_3 \cdot r_2 - m_3 \cdot a_3 \cdot (r_2/r_3) \cdot e^{i\theta_3} = 0 \quad [4]$$

$$m_4 \cdot a_4 \cdot e^{i\theta_4} + m_3 \cdot a_3 \cdot (r_4/r_3) \cdot e^{i\theta_3} = 0 \quad [5]$$

en cuyo caso, la ecuación [3], quedará:

$$\bar{r}_B = (r_1/r_3 \cdot M) \cdot (m \cdot r_3 + m_3 \cdot a_3 \cdot e^{i\theta_3}) \cdot e^{i\theta_1} \quad [6]$$

que como se ve, es independiente del tiempo.

La ecuación [4] se puede simplificar localizando G_3 respecto del punto B, en la forma:

$$a_3 \cdot e^{i\theta_3} = r_3 + a'_3 \cdot e^{i\theta'_3}$$

(a'_3 y θ'_3 son los valores que se ven en la figura)

con lo cual la ecuación [4] queda:

$$m_2 \cdot a_2 \cdot e^{i\theta_2} + m_3 \cdot r_2 - m_3 \cdot (r_2/r_3) \cdot (r_3 + a'_3 \cdot e^{i\theta'_3}) = 0$$

$$m_2 \cdot a_2 \cdot e^{i\theta_2} + m_3 \cdot a'_3 \cdot (r_2/r_3) \cdot e^{i\theta'_3} = 0 \quad [7]$$

Para que se satisfagan simultáneamente las ecuaciones [5] y [7] ha de ocurrir:

$$m_2 \cdot a_2 = m_3 \cdot a'_3 \cdot (r_2/r_3)$$

$$m_4 \cdot a_4 = m_3 \cdot a_3 \cdot (r_4/r_3)$$

[8]

$$\ddot{\alpha}_2 = \ddot{\alpha}'_3$$

$$\ddot{\alpha}_4 = \ddot{\alpha}_3 + \pi$$

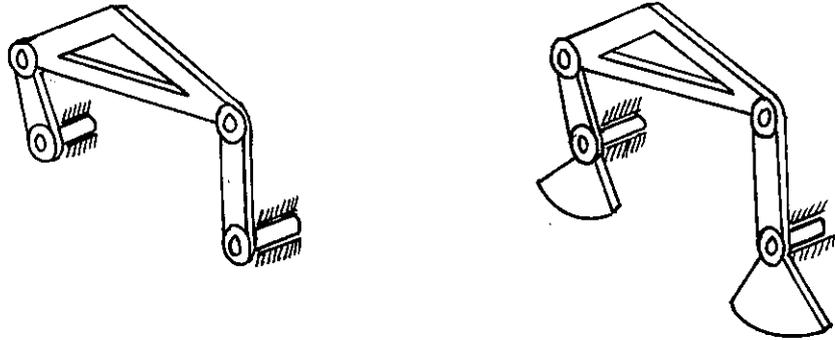
Estas expresiones demuestran que se puede fijar de antemano la masa y centro de gravedad de un miembro cualquiera, y calcular los datos correspondientes a los otros dos, para lograr el equilibrado de todo el mecanismo (centro de gravedad del conjunto inmóvil respecto al miembro 1 o bastidor).

NOTA: Las dimensiones de las barras r_1 , r_2 , r_3 y r_4 vienen fijadas generalmente por relaciones cinemáticas.

En consecuencia, en las expresiones [8] sólo puede manipularse la masa y la situación del centro de gravedad, es decir, la forma de dos miembros (supuesto que el tercero lo mantenemos intacto).

En la práctica, en caso de mecanismos de 4 barras, son las dos manivelas las que se manipulan para lograr el equilibrado del conjunto; la redistribución de masas necesaria se consigue añadiendo contrapesos, como se ve en la figura. Mientras, la biela no se ve modificada.

(En los mecanismos biela-manivela-corredera, lo que se manipula es la biela y la manivela)



Cuando se agregan contrapesos ha de verificarse:

$$m_1 \cdot a_1 \cdot \bar{\delta}_1 = m_1^o \cdot a_1^o \cdot \bar{\delta}_1^o + m_1^c \cdot a_1^c \cdot \bar{\delta}_1^c \quad [9]$$

siendo:

- m_1 , a_1 , $\bar{\delta}_1$ los parámetros que se obtienen de las ecuaciones [8]

- m_1^o , a_1^o , $\bar{\delta}_1^o$ los parámetros del miembro no equilibrado (sin los contrapesos)

- m_1^c , a_1^c , $\bar{\delta}_1^c$ los parámetros de los contrapesos

Evidentemente, también se ha de cumplir:

$$m_1 = m_1^o + m_1^c$$

[10]

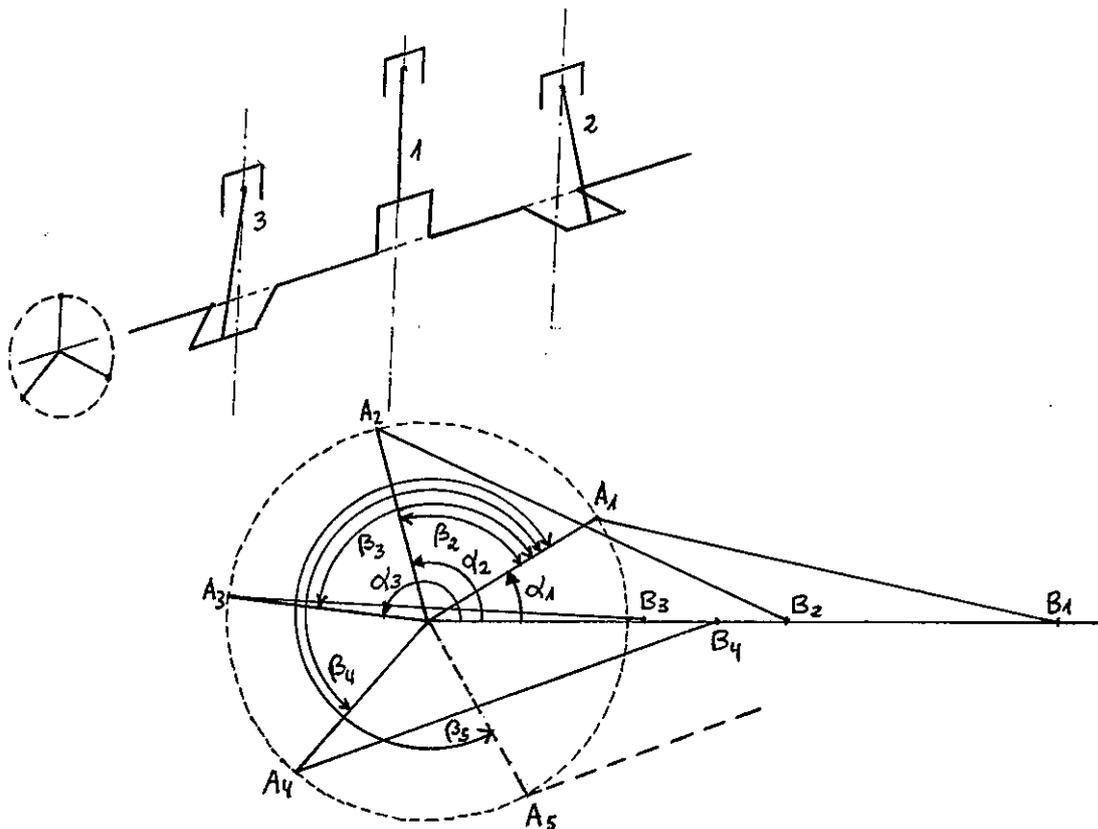
- En algunos casos no es necesario que se cumpla esta última condición [10], con la cual la [9] puede resolverse:

$$m_1^c \cdot a_1^c = \sqrt{(m_1 \cdot a_1)^2 + (m_1^o \cdot a_1^o)^2 - 2 \cdot (m_1 \cdot a_1) \cdot (m_1^o \cdot a_1^o) \cdot \cos(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_1^o)}$$

$$\bar{\alpha}_1^c = \text{Tag}^{-1} \frac{m_1 \cdot a_1 \cdot \text{Sen } \bar{\alpha}_1 - m_1^o \cdot a_1^o \cdot \text{Sen } \bar{\alpha}_1^o}{m_1 \cdot a_1 \cdot \text{Cos } \bar{\alpha}_1 - m_1^o \cdot a_1^o \cdot \text{Cos } \bar{\alpha}_1^o}$$

4.3.1.- EQUILIBRADO DE MOTORES POLICILINDRICOS EN LINEA

Sea el mecanismo de la figura, correspondiente a un motor policilíndrico, girando a velocidad constante w .



En este mecanismo se supone:

19.- Todos los ejes de los cilindros se encuentran en el mismo plano

29.- $R_1 = R_2 = R_3 = R =$ radios de las manivelas (cigüeñal)

39.- $L_1 = L_2 = L_3 = L =$ longitud de las bielas

49.- $2R_1 = 2R =$ carrera del pistón

59.- $L_1/R_1 = \dots = L/R = 4$ como es más usual)

60.- $\beta_1; \beta_2; \beta_3$ ángulos de descalaje de los cilindros
(lógicamente, $\beta_1 = 0$)

70.- $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ ángulos que forma cada manivela con el
eje de su correspondiente cilindro.

NOTA: Debemos hacer notar que en motores policilíndricos la disposición de los codos del cigüeñal (ángulos de decalaje) viene dada principalmente por la necesaria continuidad del esfuerzo giratorio.

Los tiempos de trabajo (carreras de expansión) se distribuyen de modo que produzcan un par motor lo más "regular" posible.

a) Efectos sobre el bastidor.-

10.- Fuerzas centrípetas debidas a las manivelas (codos del cigüeñal).

El cigüeñal en su conjunto es un sistema de masas giratorias equivalente a un sistema de varias masas puntuales situadas en diferentes planos axiales y normales. Los planos de rotación y los ángulos de los codos están fijados por el tipo de motor de que se trate.

29.- Fuerzas de inercia debidas a las bielas.

Como vimos en el punto 3-3-1., puede asimilarse una parte de ésta a la parte de la manivela, y otra a la del pistón. Las consecuencias de la inercia de las bielas sobre el bastidor son dos fuerzas: una centrípeta, debido a $2/3$ de su masa, y otra alternativa, debida a $1/3$ de su masa, asimilable a la masa del pistón. (Naturalmente, esta distribución es sólo aproximada, dependiendo siempre del sistema empleado para equilibrar la biela).

30.- Fuerzas de inercia alternativas, debidas a las masas del pistón y $1/3$ de la biela.

Como vimos en el punto 3-2-1. producirán sobre el bastidor unas fuerzas alternativas de variación senoidal.

Por estar los cilindros en línea, todas estas fuerzas tienen la misma dirección. Además, por actuar todas sobre el cigüeñal producirán sobre este unos momentos en el plano de los cilindros.

El valor de la fuerza total de inercia debida a todas las masas alternativas en movimiento será su suma escalar

$$|\bar{J}_\tau| = |\Sigma \bar{J}_i|$$

(siendo J_i la masa del pistón i y $1/3$ de la masa de la biela i).

El valor del momento producido por estas fuerzas, referido a un punto cualquiera del eje del cigüeñal, será

$$|\bar{M}_T| = |\Sigma \bar{J}_1 \cdot \bar{a}_1|$$

siendo a_1 la distancia de cada eje de cilindro al plano normal al eje del cigüeñal que pasa por el punto escogido.

Descomponiendo estas fuerzas de inercia en los dos sumandos conocidos (fuerzas de inercia de primero y de segundo orden, tenemos:

$$\begin{aligned} [1] \quad J_{T(p)} &= M_1 \cdot R_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1 = \\ &= f. \text{ de } i. \text{ resultante de } 1^o \text{ orden} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2] \quad J_{T(m)} &= M_1 \cdot (R_1^2 / L_1) \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha_1 = \\ &= f. \text{ de } i. \text{ resultante de } 2^o \text{ orden} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [3] \quad M_{T(p)} &= M_1 \cdot R_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot a_1 = \\ &= \text{momento debido a } f. \text{ de } i. \text{ de } 1^o \text{ orden} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [4] \quad M_{T(m)} &= M_1 \cdot (R_1^2 / L_1) \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha_1 \cdot a_1 = \\ &= \text{momento debido a } f. \text{ de } i. \text{ de } 2^o \text{ orden} \end{aligned}$$

- La ecuación [1] se puede escribir, teniendo en cuenta el valor de los ángulos α_1 y β_1 .

$$J_{T(p)} = M_1 \cdot R_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1 + M_2 \cdot R_2 \cdot \omega^2 \cdot \cos (\alpha_1 + \beta_2) + \\ + M_3 \cdot R_3 \cdot \omega^2 \cdot \cos (\alpha_1 + \beta_3) + \dots$$

Como $\cos (\alpha_1 - \beta_1) = \cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_1 - \text{Sen } \alpha_1 \cdot \text{Sen } \beta_1 =$
 $= \cos \alpha_1$, pues $\beta_1 = 0$

$$\cos (\alpha_1 + \beta_2) = \cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_2 - \text{Sen } \alpha_1 \cdot \text{Sen } \beta_2$$

.....

Sustituyendo:

$$J_{T(p)} = M_1 \cdot R_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1 + M_2 \cdot R_2 \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_2 + \\ + M_3 \cdot R_3 \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_3 + \dots - \\ - M_2 \cdot R_2 \cdot \omega^2 \cdot \text{Sen } \alpha_1 \cdot \text{Sen } \beta_2 - M_3 \cdot R_3 \cdot \omega^2 \cdot \text{Sen } \alpha_1 \cdot \text{Sen } \beta_3 - \dots$$

Teniendo en cuenta que $R_1 = R_2 = \dots = R$ y $M_1 = M_2 \dots = M$

$$J_{T(p)} = M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot [\cos \alpha_1 \cdot (\cos \beta_1 + \cos \beta_2 + \cos \beta_3 + \dots) \\ - \text{Sen } \alpha_1 \cdot (\text{Sen } \beta_1 + \text{Sen } \beta_2 + \dots)]$$

Como los valores de β_i son fijos, función del número de cilindros, llamando $\cos \beta_i = x_i$ y $\text{Sen } \beta_i = y_i$

queda la ecuación [1], finalmente:

$$J_{T(p)} = M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot (\cos \alpha_1 \cdot \Sigma x_i - \text{Sen } \alpha_1 \cdot \Sigma y_i)$$

- La ecuación [2] se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 J_{T\langle m \rangle} &= M_1 \cdot (R_1^2 / L_1) \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha_1 + \\
 &+ M_2 \cdot (R_2^2 / L_2) \cdot \omega^2 \cdot \cos 2(\alpha_1 + \beta_2) + \\
 &+ M_3 \cdot (R_3^2 / L_3) \cdot \omega^2 \cdot \cos 2(\alpha_1 + \beta_3) + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{T\langle m \rangle} &= M \cdot (R^2 / L) \cdot \omega^2 \cdot [\cos 2\alpha_1 \cdot (\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \dots) - \\
 &- \sin 2\alpha_1 \cdot (\sin 2\beta_1 + \sin 2\beta_2 + \dots)]
 \end{aligned}$$

Como $\sin 2\beta_1 = 2\sin \beta_1 \cdot \cos \beta_1$

$$\cos 2\beta_1 = \cos^2 \beta_1 - \sin^2 \beta_1$$

con las mismas consideraciones anteriores, tenemos:

$$\cos^2 \beta_1 = x_1^2 - y_1^2 \qquad \sin 2\beta_1 = 2 \cdot x_1 \cdot y_1$$

Sustituyendo, queda finalmente:

$$\begin{aligned}
 J_{T\langle m \rangle} &= M \cdot (R^2 / L) \cdot \omega^2 \cdot [\cos 2\alpha_1 \cdot \Sigma (x_1^2 - y_1^2) - \\
 &- 2\sin 2\alpha_1 \cdot \Sigma x_1 \cdot y_1]
 \end{aligned}$$

Haciendo las mismas consideraciones con las ecuaciones [3] y [4] obtenemos las expresiones para los momentos de primero y segundo orden.

Las cuatro ecuaciones son las siguientes:

$$J_{T\langle p \rangle} = M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot (\cos \alpha_1 \cdot \Sigma x_1 - \sin \alpha_1 \cdot \Sigma y_1)$$

$$\begin{aligned}
 J_{T\langle m \rangle} &= M \cdot (R^2 / L) \cdot \omega^2 \cdot [\cos 2\alpha_1 \cdot \Sigma (x_1^2 - y_1^2) - \\
 &- 2\sin 2\alpha_1 \cdot \Sigma x_1 \cdot y_1]
 \end{aligned}$$

$$M_{T(p)} = M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot (\cos \alpha_1 \cdot \sum x_1 \cdot a_1 - \text{Sen } \alpha_1 \cdot \sum y_1 \cdot a_1)$$

$$M_{T(m)} = M \cdot (R^2/L) \cdot \omega^2 \cdot [\cos 2\alpha_1 \cdot \sum a_1 \cdot (x_1^2 - y_1^2) - 2\text{Sen } 2\alpha_1 \cdot \sum a_1 \cdot x_1 \cdot y_1]$$

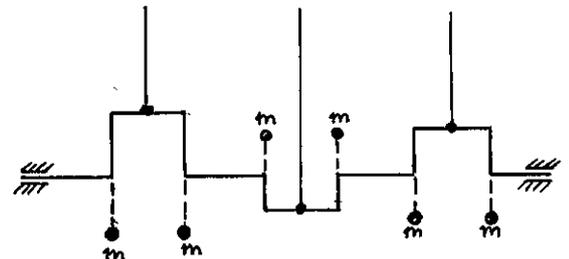
Estas son las fuerzas y momentos que aparecen sobre el cigüeñal y se transmiten al bastidor.

b) Equilibrado:

10.- El equilibrado de las masas rotativas (cigüeñal), que comprende como se dijo el codo del cigüeñal y 2/3 de la masa de la biela, puede efectuarse por el método estudiado en el punto 3-1-2-1-3., añadiendo dos masa equilibradoras en dos planos independientes de rotación, escogidos arbitrariamente.

Sin embargo, aunque resulta más costoso, es mejor equilibrar cada codo por separado, como se ve en la figura.

De esta manera habrán tantas masas equilibradoras como codos del cigüeñal.



Este método tiene las ventajas de las partes intermedias del cigüeñal (entre dos apoyos) no

tienen que transmitir fuerzas de un codo a otro, puesto que cada codo está equilibrado en su propio plano de rotación.

El cigüeñal queda así libre de cualquier momento flector debido a las masas giratorias, con independencia del número de apoyos.

29.- El equilibrado de las bielas se efectúa como se ha dicho, repartiendo su masa entre el cigüeñal y los pistones.

30.- En cuanto a las masas alternativas (pistón y 1/3 de la biela) su equilibrado se efectuará por compensación mutua entre los diferentes cilindros, dependiendo, por consiguiente, del número y disposición de estos.

Para que el conjunto de las fuerzas alternativas den una resultante y un momento nulos, se ha de cumplir:

$$0 = \cos \alpha_1 \cdot \Sigma x_1 - \text{Sen } \alpha_1 \cdot \Sigma y_1$$

$$0 = \cos 2\alpha_1 \cdot \Sigma (x_1^2 - y_1^2) - 2\text{Sen } 2\alpha_1 \cdot \Sigma x_1 \cdot y_1$$

$$0 = \cos \alpha_1 \cdot \Sigma a_1 \cdot x_1 - \text{Sen } \alpha_1 \cdot \Sigma a_1 \cdot y_1$$

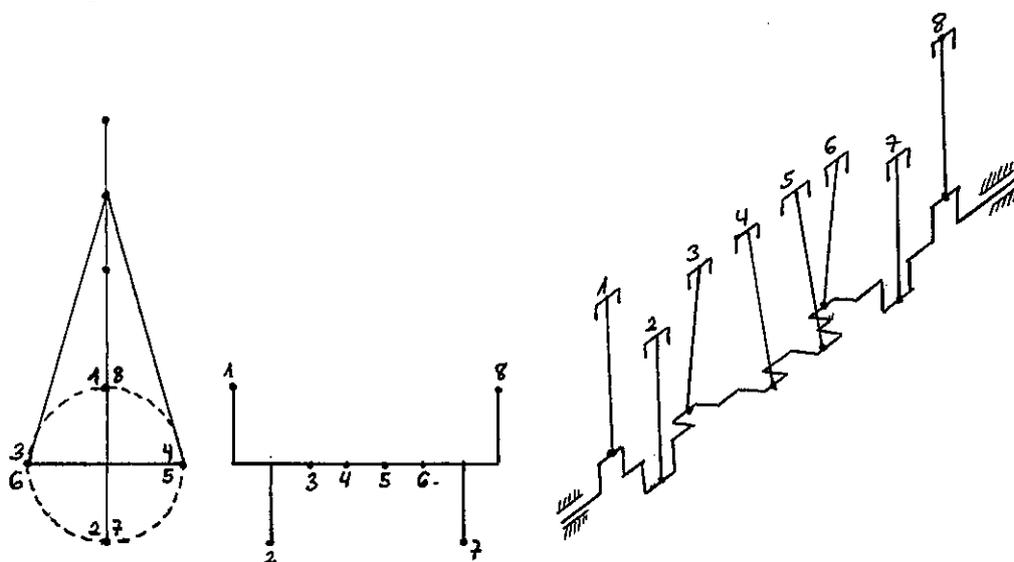
$$0 = \cos 2\alpha_1 \cdot \Sigma a_1 \cdot (x_1^2 - y_1^2) - 2\text{Sen } 2\alpha_1 \cdot \Sigma a_1 \cdot x_1 \cdot y_1$$

Si se cumplen estas 8 ecuaciones podemos decir que el mecanismo está totalmete equilibrado, debido a la buena distribución de las masas del conjunto.

- A continuación vamos a ver unos cuantos ejemplos donde se estudiará el "grado de equilibrado" de diferentes motores (en lo que se refiere a las masas alternativas, puesto que las otras siempre se pueden equilibrar por separado). En caso de que el motor estudiado no esté equilibrado daremos unas ideas sobre posibles rectificaciones de su diseño para mejorar su "grado de equilibrado"

Caso 19.- grado de equilibrado del mec. básico de los motores de 8 cilindros

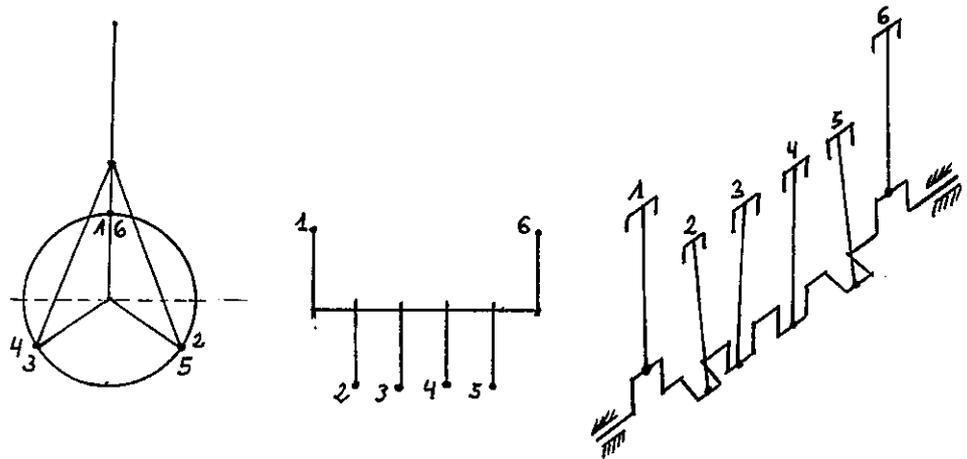
La disposición normal de estos motores es con los cuatro codos centrales en un plano axial, formando un ángulo de 90° con el plano de los otros cuatro codos, como se ve en la figura.



Haciendo igual a la unidad la distancia entre cilindros, y en función del ángulo de decalaje, confeccionamos la tabla de coeficientes siguiente:

Caso 29.- Grado de equilibrado del mecanismo básico de un motor de 6 cilindros en línea

La disposición normal adoptada para el cigüeñal de estos motores es la mostrada en la figura, y reflejada en la tabla adjunta.



Haciendo $a = 1$, tenemos la tabla:

Maniv.	β	x	y	a	a·x	ay	x^2	y^2	x^2-y^2	xy	$a(x^2-y^2)$	axy
1	0	1,000	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
2	120	-0,500	0,886	1	-0,500	0,886	0,250	0,750	-0,500	-0,433	-0,500	-0,433
3	240	-0,500	0,886	2	-1,000	-1,732	0,250	0,750	-0,500	0,433	-1,000	0,866
4	240	-0,500	-0,886	3	-1,500	-2,598	0,250	0,750	-0,500	0,433	-1,500	1,299
5	120	-0,500	-0,886	4	-2,000	3,464	0,250	0,750	-0,500	-0,433	-2,000	-1,732
6	0	1,000	0	5	5,000	0	1	0	1	0	5,000	0
Total		0	0		0	0			0	0	0	0

.....

Haciendo $M \cdot R \cdot \omega^2 = L$ y $R/L = 1/4$, quedan las cuatro ecuaciones que nos dan las fuerzas y momentos alternativos iguales a cero.

$$[1] J_{T(P)} = 0; [2] J_{T(M)} = 0; [3] M_{T(P)} = 0; [4] M_{T(M)} = 0$$

$$J_T = 0 \text{ y } M_T = 0$$

Este mecanismo también está perfectamente equilibrado en cuanto a las fuerzas de inercia creadas por las masas alternativas, debido a la disposición de las mismas.

Una vez equilibradas las masas rotativas, el mecanismo está totalmente equilibrado.

$$[1] J_T(p) = 0$$

$$[2] J_T(m) = (1/4) \cdot \cos 2\alpha_1 \cdot 4 + 2 \operatorname{Sen} 2\alpha_1 \cdot 0 = \cos 2\alpha_1$$

$$[3] M_T(p) = 0$$

$$[4] M_T(m) = (1/4) \cdot \cos 2\alpha_1 \cdot 6 + 2 \operatorname{Sen} 2\alpha_1 \cdot 0 = (3/2) \cdot \cos 2\alpha_1$$

Con lo que queda:

$$J_T = \cos 2\alpha_1 \quad \text{y} \quad M_T = (3/2) \cdot \cos 2\alpha_1$$

Las fuerzas y momentos de primer orden están equilibrados con esta distribución de cilindros, pero no los de segundo orden.

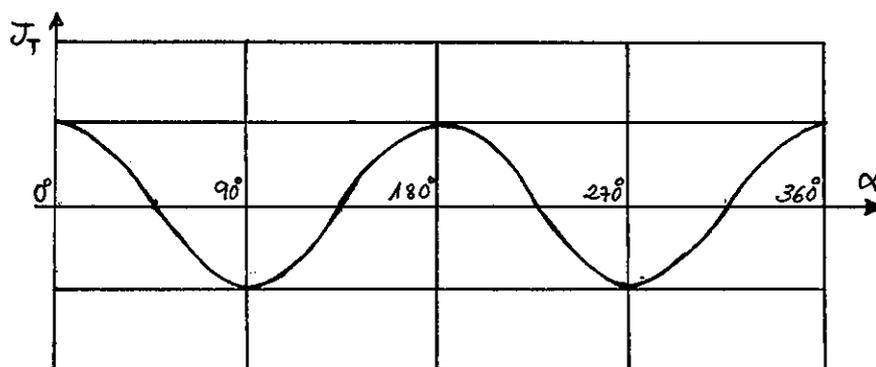
NOTA: La línea de acción de la resultante de la fuerza de trepidación (fuerza de inercia de segundo orden), pasa por el punto dado por:

$$X = M_T/J_T = (3/2) \cdot \cos 2\alpha_1 / \cos 2\alpha_1 = 3/2$$

es decir, para cualquier posición del cigüeñal, la fuerza de trepidación pasa siempre por el punto medio de los cilindros centrales.

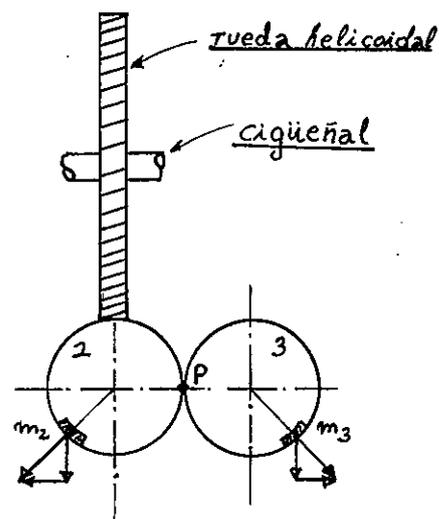
Eligiendo como plano de referencia este plano central, los momentos de segundo orden también están equilibrados, por lo que sólo queda para equilibrar la fuerza de inercia de segundo orden, situada siempre en dicho plano.

- La gráfica que muestra la variación de esta fuerza de trepidación se muestra en la figura.



- Para eliminar las fuerzas secundarias en los motores ordinarios de cuatro cilindros se usa el dispositivo de la figura, representado esquemáticamente.

Consta de dos pruebas dentadas movidas a doble velocidad que el cigüeñal, colocadas en un plano axial, de modo que el punto P quede debajo del eje del cigüeñal, en su punto medio (por donde se vio pasaba la fuerza de trepidación).



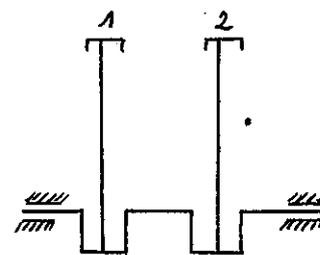
En estas ruedas se colocan las masas M_2 y M_3 , dispuestas de modo que las componentes horizontales de sus fuerzas centrífugas se neutralicen siempre entre sí, dejando que sus componentes verticales combinadas equilibren las fuerzas secundarias desequilibradas.

Caso 49.- Grado de equilibrio del mecanismo de motores de dos cilindros en línea

La composición convencional para motores de dos cilindros en línea, de dos tiempos, es la mostrada en la figura, con los codos a 180° , y esta disposición es la que vamos a estudiar.

(Con esta disposición se produce el par motor más regular posible, en motores de dos cilindro y dos tiempos. En motores de cuatro tiempos, el par motor producido es muy irregular, puesto que las carreras de trabajo resultan consecutivas.

Como se verá en la materia de "Motores térmicos", en motores de dos cilindros y cuatro tiempos, para obtener un desfase uniforme de las carreras de trabajo, y con ellas, un par motor más regular, es mejor la disposición de los codos a 360° como se muestra en la figura.



Este motor, a efectos de equilibrado, equivale a un motor monocilíndrico doble, el cual, como veremos, estará siempre bastante desequilibrado.

(Como se ve, sólo están equilibradas con esta disposición las fuerzas de primer orden)

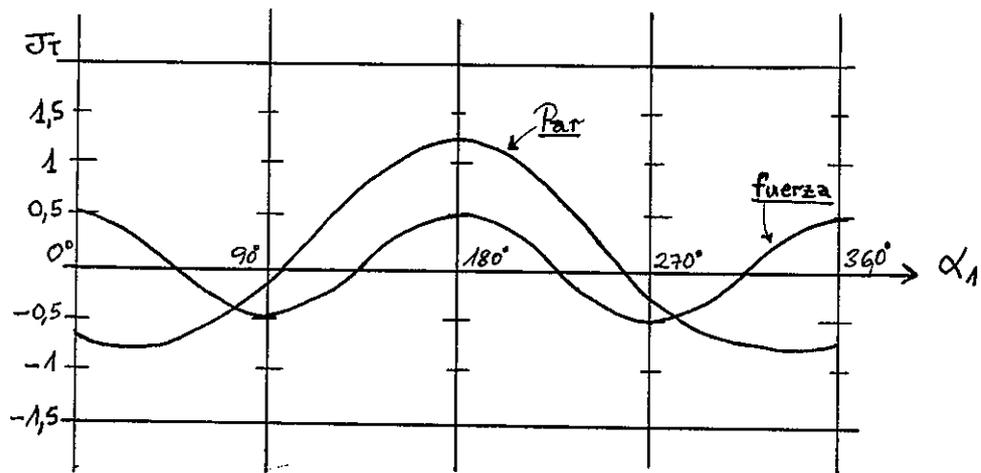
NOTA: La línea de acción de la resultante de las fuerzas de trepidación pasa por el punto dado por:

$$X = \frac{M_T}{J_T} = \frac{-\cos \alpha_1 + (1/4) \cdot \cos 2\alpha_1}{\frac{1}{2} \cos 2\alpha_1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2 \cos 2\alpha_1}{\cos 2\alpha_1}$$

Como se ve, la línea de acción de la resultante varía de un instante a otro.

- La gráfica que muestra la variación de esta fuerza de trepidación es la que se muestra en la figura.



- De todo lo dicho se desprende que el grado de equilibrado obtenido con esta disposición es bastante

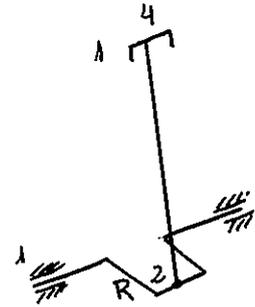
malo, al quedar equilibrada sólo la fuerza de trepidación de primer orden (Aunque hemos de recordar que esta es la de mayor entidad, siendo mucho menos importante la de segundo orden).

No existe ningún método sencillo para mejorar el equilibrado de estos motores.

Caso 50.- Grado de equilibrado del mecanismo básico de un motor monocilíndrico

Sea el motor monocilíndrico de la figura.

En él, por ser $a = 1$, los momentos producidos por la fuerza de trepidación no existen. Sólo quedan las fuerzas de 1º y 2º orden, desequilibradas, de valor:



$$[1] J_{T(p)} = M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha; \text{ haciendo } M \cdot R \cdot \omega^2 = 1;$$

$$J_{T(p)} = \cos \alpha$$

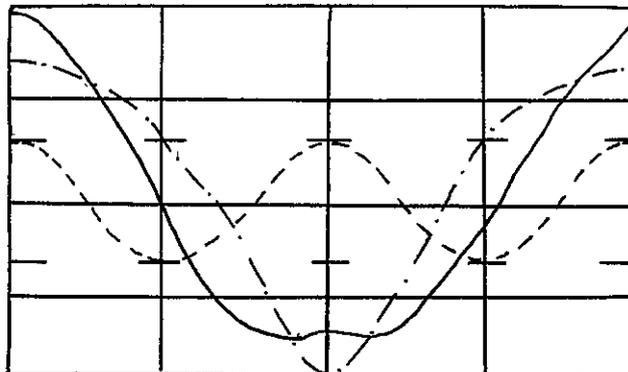
$$[2] J_{T(m)} = M \cdot (R^2/L) \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha; \text{ haciendo } R/L = 1/4$$

$$J_{T(p)} = (1/4) \cdot \cos 2\alpha$$

- La gráfica que muestra la variación de estas fuerzas de trepidación puede verse en la figura.

La fuerza de trepidación total vale:

$$J_T = \cos \alpha + (1/4) \cdot \cos 2\alpha$$



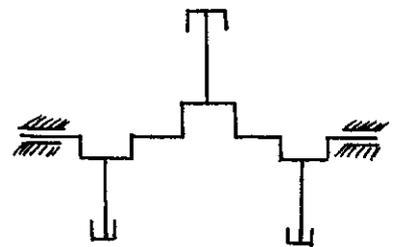
- Como vemos, un motor monocilíndrico está fuertemente desequilibrado.

Para equilibrar totalmente su masa alternativa puede recurrirse al método estudiado en el punto 3-3-2., introduciendo cuatro masa adicionales, como allí se vio.

Sin embargo, como estos motores monocilíndricos tienen un empleo más bien modesto, bien por ser de pequeñas cilindradas, ó siéndo de gran cilindrada, por tener una marcha lenta, el procedimiento anterior, bastante complicado, nunca se lleva a cabo.

En motores de laboratorio se logra un total equilibrado modificando su diseño, como se ve en la figura.

Para ello se introducen dos cilindros opuestos al cilindro del motor, colocados simétricamente a los dos lados de éste, con masas alternativas mitad de la masa del cilindro motor.



- En motores monocilíndricos para usos industriales, lo que se hace es un equilibrado parcial, a base de disminuir el peso de los materiales empleados en la biela y cigüeñal, así como una modificación de la fuerza total de trepidación, en la forma siguiente:

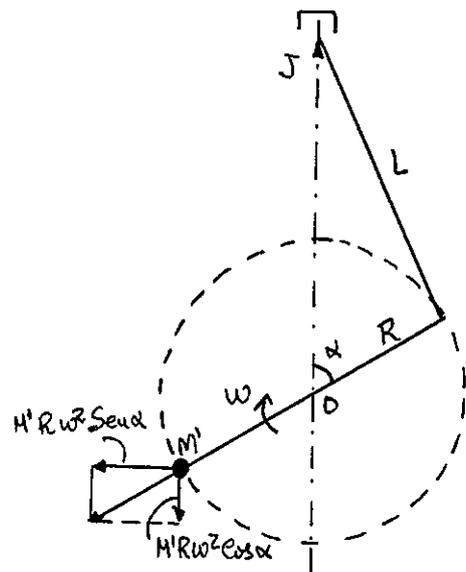
Teniendo en cuenta que en las inmediaciones de los puntos muertos es donde es mayor la fuerza de inercia, y que entonces esta fuerza de inercia tiene la misma dirección que la fuerza centrípeta producida por una masa diametralmente opuesta al codo del cigüeñal y unida a la manivela, se concibe que esta fuerza de inercia producida por las masas alternativas puede ser reducida por la adición de la masa antes mencionada.

Claro que entonces que esta masa adicional producirá en otros puntos del recorrido, particularmente en los dos puntos medios de la carrera del pistón un fuerza centrípeta no equilibrada.

Teniendo esto en cuenta, solamente en los motores de los automóviles y motocicletas, como consecuencia de ser más perjudiciales las vibraciones verticales que las transversales, es donde se suele introducir esta corrección para el equilibrio, añadiendo una masa adicional en el cigüeñal.

En el motor de la figura se observa que al introducir

la masa M' en el extremo opuesto al codo del cigüeñal, da



lugar a una componente vertical $M^2 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha$ igual y opuesto a la fuerza de inercia de primer orden, por lo que en todo momento esta fuerza estará equilibrada.

Pero al mismo tiempo aparece una componente horizontal $M^2 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha$ no equilibrada, con lo que lo único que se ha logrado es sustituir la "vibración" vertical por otra "horizontal".

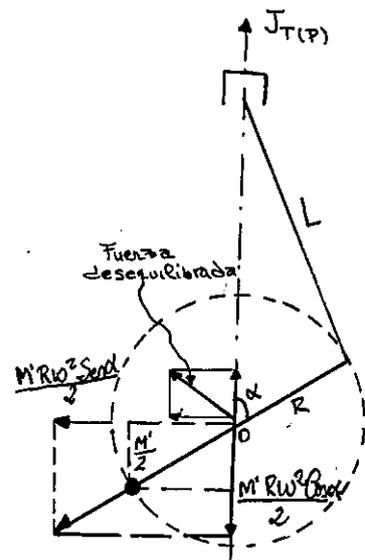
Naturalmente, la fuerza de inercia de segundo orden sigue sin equilibrar.

- Puede equilibrarse mejor el motor si en lugar de añadir la masa $M^2 = M_{\text{piston}} + (1/3) M_{\text{biela}}$ se añade una masa de valor $M^2/2$.

En este caso se equilibra en cada momento la mitad de la fuerza de inercia de primer orden, quedando dos fuerzas desequilibradas: La mitad de la fuerza de primer orden

$\frac{1}{2} \cdot M^2 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha$ y la fuerza horizontal $\frac{1}{2} \cdot M^2 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha$, como se ve en la figura.

La composición de estas dos fuerzas da lugar a una fuerza centrípeta rotativa, con velocidad ω , de módulo $\frac{1}{2} \cdot M^2 \cdot R \cdot \omega^2$, imposible de equilibrar.

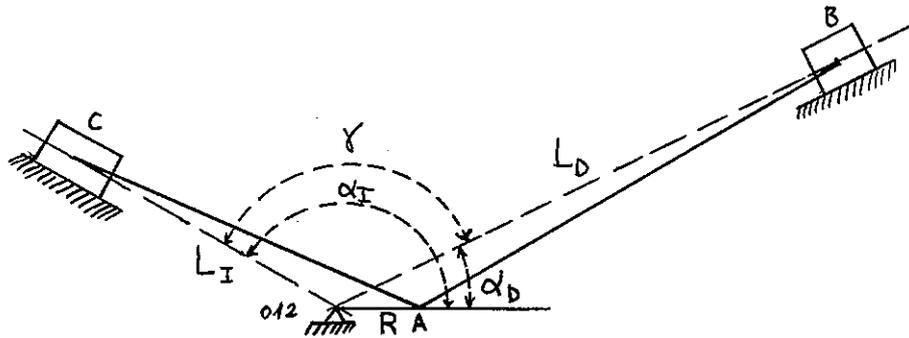


Todo lo anteriormente expuesto es lo que más se puede hacer, en motores industriales, para mejorar el equilibrado de motores monocilíndricos y amortiguar el efecto nocivo o molesto de las vibraciones producidas por las fuerzas de trepidación.

4.3.2.- GRADO DE EQUILIBRADO DE MOTORES POLICILINDRICOS EN V

a) Motor de dos cilindros en V:

Sea el motor de dos cilindros en V que se muestra en la figura, siendo τ el ángulo entre cilindros.



Ambas bielas están conectadas a un solo codo del cigüeñal.

Supondremos

$$M_I = M_D = M \text{ y } L_I = L_D = L$$

La fuerza total de inercia producida por el pistón y $1/3$ de la biela, en el lado izquierdo, será:

$$J_{T_I} = M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_I + M \cdot (R^2/L) \cdot \cos 2\alpha_I$$

en el lado derecho:

$$J_{T_D} = M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_D + M \cdot (R^2/L) \cdot \cos 2\alpha_D$$

La fuerza total será la suma vectorial:

$$\vec{J}_T = \vec{J}_{T1} + \vec{J}_{Td}$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_T &= M \cdot \overrightarrow{R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1} + M \cdot \overrightarrow{R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_d} + \\ &+ M \cdot \overrightarrow{(R^2/L) \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha_1} + M \cdot \overrightarrow{(R^2/L) \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha_d} \end{aligned}$$

Como $\alpha_d = \alpha_1 - \tau$, se puede también escribir:

$$\begin{aligned} \vec{J}_T &= M \cdot \overrightarrow{R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1} + M \cdot \overrightarrow{R \cdot \omega^2 \cdot \cos (\alpha_1 - \tau)} + \\ &+ M \cdot \overrightarrow{(R^2/L) \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha_1} + M \cdot \overrightarrow{(R^2/L) \cdot \omega^2 \cdot \cos (2\alpha_1 - 2\tau)} \end{aligned}$$

Si el ángulo de la V es de 90° como es lo más usual:

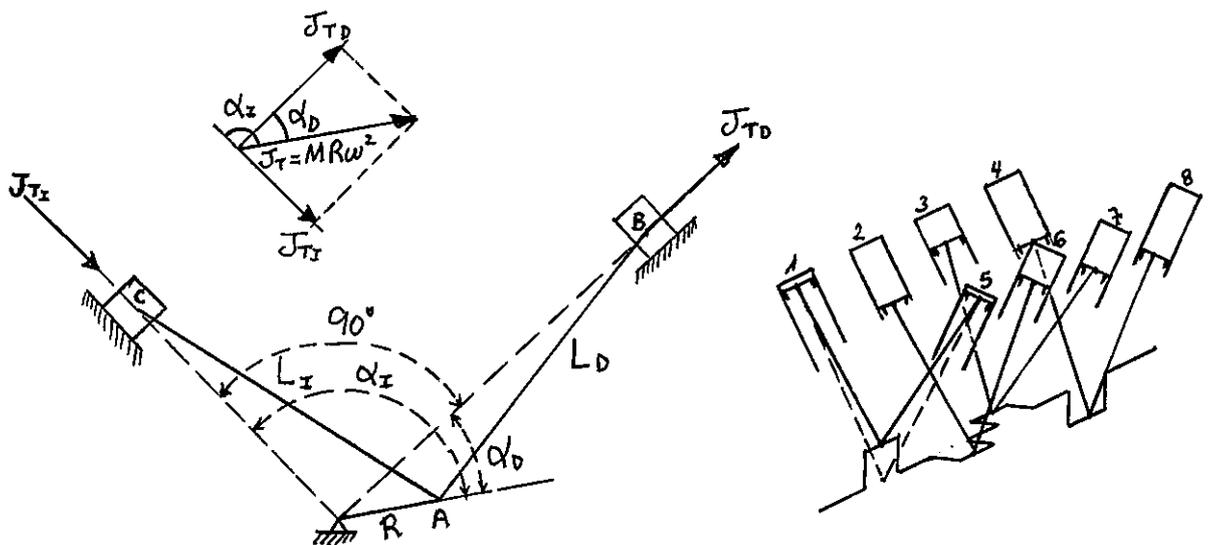
$$\begin{aligned} \vec{J}_T &= M \cdot \overrightarrow{R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1} + M \cdot \overrightarrow{R \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha_1} + \\ &+ M \cdot \overrightarrow{(R^2/L) \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha_1} - M \cdot \overrightarrow{(R^2/L) \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha_1} \end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{T(p)} &= M \cdot \overrightarrow{R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1} + M \cdot \overrightarrow{R \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha_1} \\ \vec{J}_{T(m)} &= M \cdot \overrightarrow{R \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha_1} + M \cdot \overrightarrow{(R^2/L) \cdot \omega^2 \cdot \sin 2\alpha_1} \end{aligned}$$

En lo que se refiere a la fuerza de inercia total de primer orden tenemos que la suma de los vectores $M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1$ y $M \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha_1$ que forman 90° , tiene de módulo $M \cdot R \cdot \omega^2$, constante, y la dirección la del codo del cigüeñal, como se ve en la figura.

Podemos decir que la fuerza de trepidación de primer orden es una fuerza giratoria de módulo constante, y cuya dirección es en todo momento la del codo del cigüeñal.



Puede equilibrarse exactamente en cada momento por un simple contrapeso situado en oposición al codo.

Sin embargo, las fuerzas de inercia del segundo orden resultan imposibles equilibrar por un procedimiento tan sencillo. En cuanto a los momentos, por estar ambos cilindros unidos al mismo punto del codo, no existen.

b) Motor de 8 cilindros en V

Este motor, muy utilizado en automóviles por el ahorro de espacio que representa, adopta la disposición de la figura, con $\tau = 90^\circ$.

El ángulo de decalaje de los cilindros es el mostrado en la figura, con el plano de los dos codos centrales perpendiculares a los de los otros dos.

Si efectuamos el análisis de un lado del motor, como si fuera un simple motor de 4 cilindros en línea, con los ángulos de decalaje indicados, veremos que sólo quedan por equilibrar los pares primarios.

Por medio de sendos contrapesos, como vimos en el punto anterior, se pueden compensar las fuerzas primarias de los dos cilindros conectados a un codo; por lo tanto, con 4 contrapesos se pueden eliminar todas las fuerzas primarias, y por consiguiente, los momentos producidos por ellas.

En resumen, un motor de 8 cilindros en V, con la disposición de la figura, queda totalmente equilibrado por la adición de 4 contrapesos en sentido opuesto al codo respectivo del cigüeñal.

5.1.- INTRODUCCION A LAS MAQUINAS DE EQUILIBRAR

- Tal como se ha dicho repetidas veces, es imposible lograr una pieza perfectamente equilibrada, por muy bien diseñada que esté sobre el papel, o por mucho cuidado que se ponga en su proceso de fabricación.

Ello es tanto más cierto, cuanto más alto sea el régimen de revoluciones a la que vaya a trabajar tal pieza.

Por otro lado, muchas veces la precisión requerida por los procesos de conformación de piezas (máquinas herramientas, moldes, etc.) resulta excesivamente costosa, resultando más barato fabricar con menores exigencias y proceder luego a un equilibrado posterior.

En este contexto, y cuando se trate principalmente de piezas fabricadas en serie, se hace imprescindible disponer de dispositivos que ayuden a efectuar tal equilibrado, en forma rápida, precisa y económica.

Tales dispositivos son los que se conocen como "máquinas de equilibrar".

NOTA: Resulta obvio señalar que las máquinas de equilibrado se aplican solamente al equilibrado de rotores, tanto "cortos" como "largos".

- Del estudio efectuado de equilibrado de miembros en rotación se deduce claramente cual es la función de cualquier máquina de equilibrado: detectar la posición y valor del desequilibrio, que permita la adición o sustracción posterior de masa al rotor para conseguir su equilibrado.

- Las máquinas de equilibrado (al igual que el equilibrado) pueden dividirse en dos grandes grupos:

Máquinas para equilibrado estático, o en un solo plano (hélices, ruedas de turbinas hidráulicas, volantes, etc.)

Máquinas para el equilibrado dinámico o en dos planos (rotores de turbinas, rotores de generadores eléctricos, cigüeñales, etc.)

- A su vez, las máquinas para equilibrado estático pueden clasificarse en dos grupos:

Máquinas de equilibrado por gravedad, donde el rotor desequilibrado se coloca sobre unos railes por medio de su eje y se le deja balancear suavemente hasta que el centro de gravedad se coloque en la posición inferior.

Otra versión de este mismo sistema son las máquinas en las que el rotor se coloca en una balanza cuya inclinación mide el grado de desequilibrio.

Máquinas de equilibrio inercial, a las que el rotor se le hace girar midiendo luego la amplitud de la vibración y el ángulo de fase (por cualquiera de los procedimientos estudiados, aunque en la forma más automática posible).

- En cuanto a las máquinas para equilibrado dinámico pueden clasificarse en tres grupos:

Máquinas de cuna pivotada.

Máquinas de punto modal.

Máquinas de compensación mecánica.

Todas ellas serán analizadas con detalle en los siguientes puntos y basan su funcionamiento en la medida de la amplitud y fase de la vibración en dos planos (generalmente los apoyos del rotor) que permitan luego la agregación de masas en dos planos seleccionados.

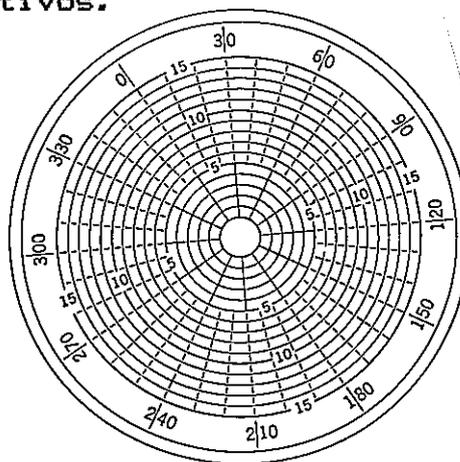
- Las máquinas de equilibrar han sufrido una fuerte evolución, desde las primeras, que requieren múltiples operaciones de tanteo y gran habilidad del operador, hasta las más moderadas que automatizan no sólo las lecturas de amplitud y fase, sino que indican el valor y posición exacta de las masas equilibradoras, e incluso que gobiernan la maquinaria encargada de realizar la colocación de tales masas.

- Desde un punto de vista operativo, las máquinas de equilibrar se clasifican en dos grupos:

Máquinas para mantenimiento, caracterizadas por una gran versatilidad (rotores de diferentes tamaños y pesos, diferentes tipos de apoyo, etc.), facilidad de manejo, amplio rango de velocidades, etc.

Máquinas de producción, caracterizadas por su propósito definido, automatismo en la colocación de pesos de prueba, lectura automática de los desequilibrios, corrección automática de los mismos, etc.

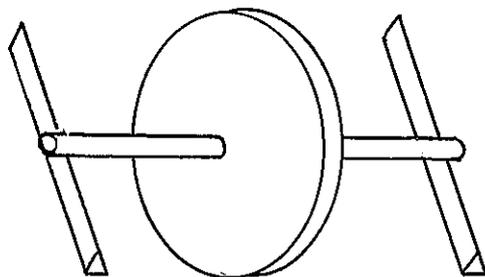
- A continuación vamos a realizar un estudio de las máquinas de equilibrar, pero sólo desde el punto de vista conceptual, sin entrar en tipos o modelos determinados, ni en sus detalles constructivos.



5.2.- MAQUINAS PARA EQUILIBRADO ESTATICO

- Tal como se ha dicho, estas máquinas se emplean para el equilibrado de rotores estrechos, en los que el momento de la fuerza de inercia respecto a los apoyos puede ser despreciado, frente al gran valor de esa fuerza de inercia.

Como el desequilibrado estático es fundamentalmente un desplazamiento del centro de gravedad del rotor respecto a su eje de giro, las máquinas de equilibrado estático más simple ubican la disposición del desequilibrio dejando girar la pieza libremente sobre sus apoyos de manera que el centro de gravedad se coloque en la posición inferior. En este caso, la posición inferior del centro de gravedad se consigue en la medida en que los rozamientos en el giro del rotor sobre el soporte sean pequeños. Para ello, existen máquinas de equilibrar de cuchillas, como se ve en la figura.



El rotor se va colocando en diferentes posiciones, y se le deja rodar libremente.

Marcando los sucesivos puntos inferiores, se tiene una estimación de la situación del punto pesado.

Luego se van añadiendo masas compensatorias, hasta lograr un equilibrio indiferente.

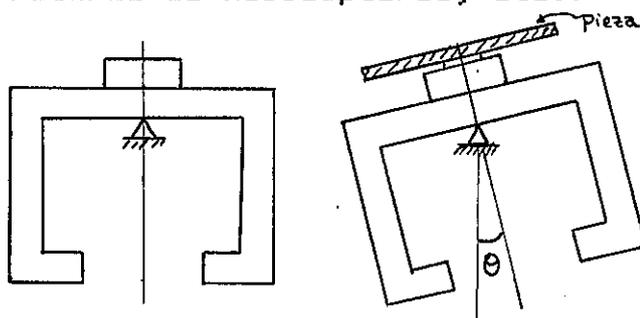
- Existen otras máquinas de equilibrado estático en las que no es necesario girar la pieza.

Consisten esencialmente en una balanza, como se ve en la figura, sobre la cual se sujeta, perfectamente centrada, la pieza a equilibrar.

La dirección de la inclinación mide la ubicación angular del desbalanceo, y el ángulo de inclinación es proporcional a la magnitud del mismo.

Una escala convenientemente graduada puede dar, con una sola lectura, el valor y posición del desequilibrio.

(Estas máquinas se emplean para el equilibrado de hélices, rotores de helicópteros, etc.)



- Finalmente existen máquinas de equilibrado estático que se basan en la medida de la amplitud y ángulo de fase, tal como se vio en el punto 3-1-2-2-1.

En estas máquinas, con sólo dos carreras del rotor se puede lograr un equilibrado de precisión.

5.3.- MAQUINAS PARA EQUILIBRADOS DINAMICOS

a.- Máquina de cuna pivotada:

(También conocida como balancin equilibrador)

- La máquina consta esencialmente de un bastidor o cuna sobre la que se coloca el rotor, accionado por un motor, como se ve en la figura.

Este bastidor se une al suelo por medio de un resorte y un amortiguador en cada extremo.

A su vez la cuna puede inmovilizarse (en sentido vertical y horizontal) por medio de unos pivotes unidos al suelo, (desplazables longitudinalmente, de manera que tanto el A como el B puedan ser colocados en los planos donde se desee efectuar el equilibrado del rotor). De esta forma, sujeta la cuna por el pivote B, ésta se moverá, junto con el rotor, como un sistema de 1 GDL, pivotando alrededor de B, con el amortiguamiento c_1 y rigidez k_1 , accionada por la fuerza desequilibrada (equivalente a la del rotor) supuesta en el plano A.

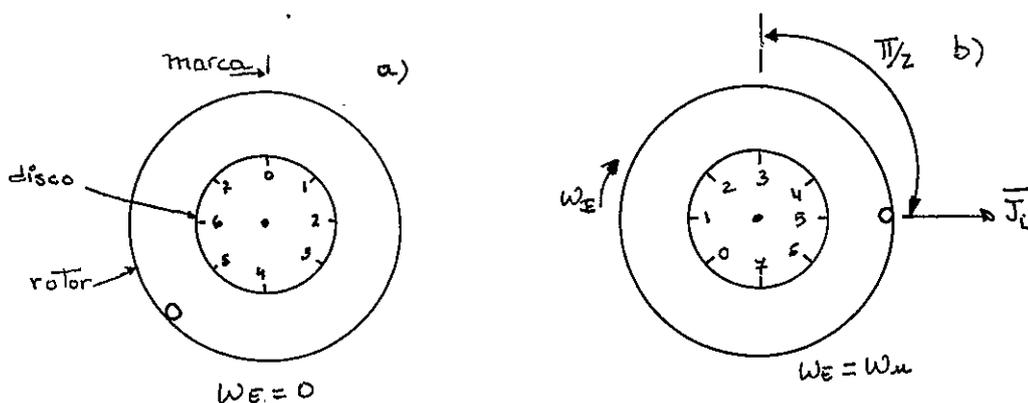
Lo mismo sucederá cuando se traba el pivote A.

Unos acelerómetros o medidores de desplazamiento situados en los dos extremos de la cuna miden los máximos desplazamientos (verticales).

En consecuencia, si en las condiciones de la figura (pivote B trabado) aceleramos el rotor con el motor de accionamiento con una velocidad ω_e superior a la crítica, y luego la vamos decendiendo lentamente, el acelerómetro A detectará la máxima amplitud de vibración cuando $\omega_e = \omega_n$. Como sabemos, tal amplitud es proporcional a la magnitud del desequilibrio en el plano A.

En ese instante, así mismo, el ángulo de desfase es $\pi/2$. En consecuencia en el disco graduado podrá leerse, a partir de una señal de referencia previamente establecida, la posición del "punto pesado".

En la figura se ha representado un vista frontal del rotor desequilibrado y del disco graduado, así como la marca de referencia fija al estator.



La figura de la izquierda (a) representa el rotor sin girar, así como la posición de su "punto pesado" (en la división 5. La división 0 del disco se ha enfrentado a la marca.

Cuando el rotor gire a la velocidad crítica, el desfase entre la fuerza de inercia \bar{J}_1 y el movimiento vertical de la masa vibrante (bastidor más rotor) es $\pi/2$.

En consecuencia, al iluminar el disco con el estroboscópio (en el momento en el que el acelerómetro detecta la máxima amplitud), el número enfrentado a la marca será el 3 (y no el 0, como se colocó inicialmente), ya que la masa desequilibrada (o la J_1) debe encontrarse a 90° de la vertical, en el sentido de w_z , como se ve en la figura (b).

- Evidentemente, la posición del punto pesado es desconocida, pero se encontrará simplemente contando 90° a partir del número enfrentado a la marca, y medidos en el sentido de w_z .

En cuanto al cálculo del valor del desequilibrio, (ya se ha dicho que es proporcional a la amplitud de la vibración) puede calibrarse la máquina inicialmente en magnitudes de desequilibrio (gr. otras), de modo que éste se pueda medir directamente.

- Lógicamente una vez medido el desequilibrio y corregido por el procedimiento descrito para el plano A, se repite el procedimiento para el plano B, fijando ahora el pivote A y liberando el B.

NOTA: Obsérvese la diferencia entre este procedimiento y el expuesto en el punto 3-1-2-2-1., de medida del ángulo de desfase:

En efecto, allí no se alcanzaba la velocidad crítica, mientras que aquí es obligatorio trabajar a esta velocidad.

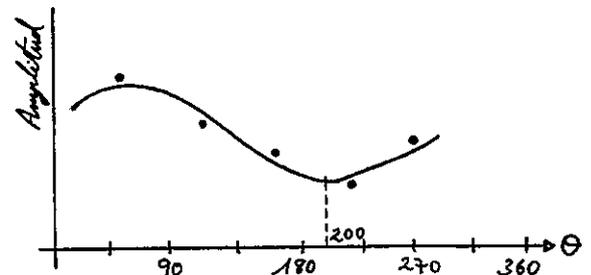
Prácticamente significa que el método de cuna pivotada sólo es aplicable a rotores pequeños, donde las amplitudes alcanzadas en la velocidad crítica no sean muy grandes.

NOTA: El procedimiento de cuna "pivotada" puede ejecutarse por tanteos sucesivos, sin necesidad de ninguna instrumentación electrónica.

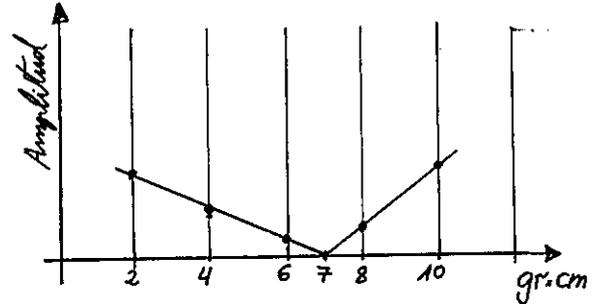
En efecto, pivotada la cuna en B, como se ve en la figura, se coloca un peso sucesivamente en distintas posiciones angulares del rotor (en el plano A).

Con esto se obtiene la curva de la figura que

nos muestre la posición más acertada del peso de prueba (que produce la mínima amplitud).



Localizada esa posición angular se va variando la magnitud del peso de prueba, hasta obtener una amplitud nula, como se ve en la figura.



Lo mismo se haría en el plano B, pivotando la masa en A.

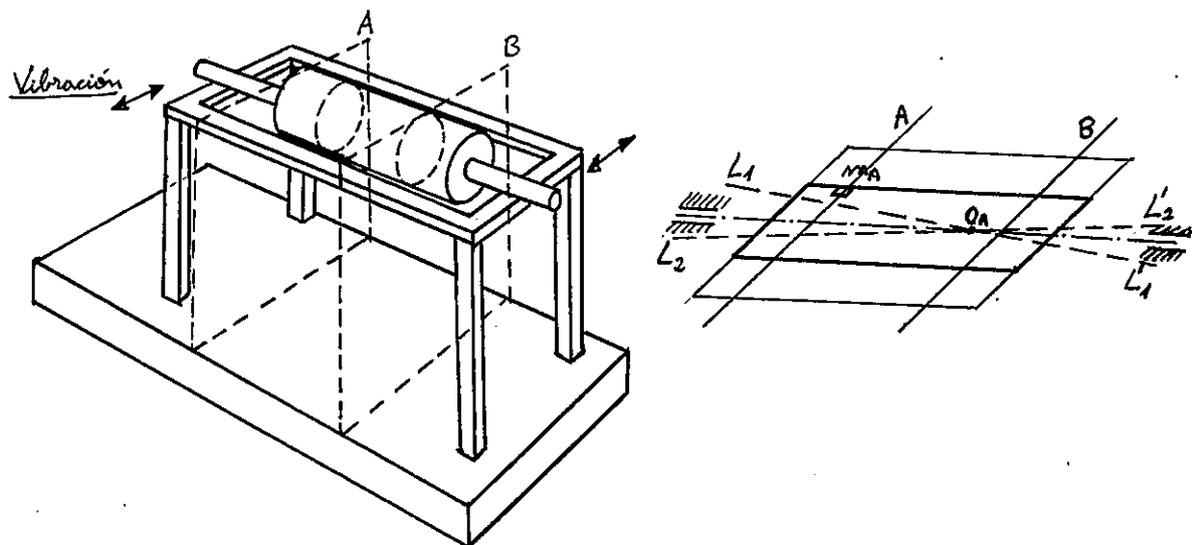
b.- Máquina de punto nodal:

(También llamada de balancín equilibrador libre)

- El método anterior de cuna pivotada resulta lento y costoso, cuando se trate de equilibrar piezas en gran número, ya que cada equilibrado completo requiere dos carreras del rotor, con los consiguientes cambios en los pivotes fijos de la cuna.

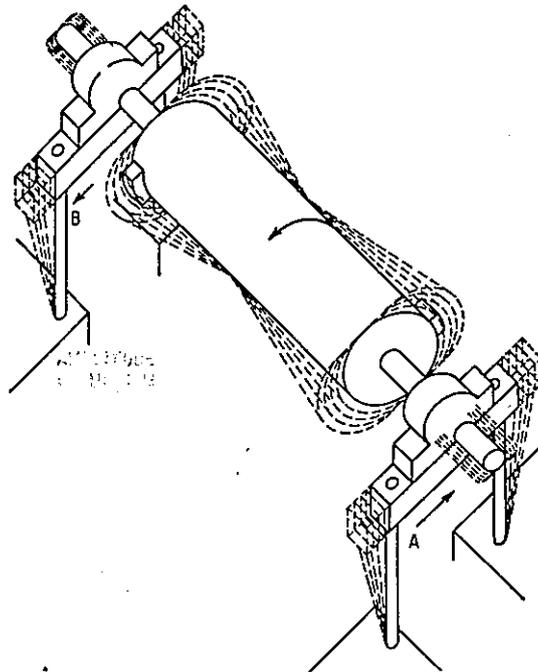
Por ello se ha recurrido al sistema de cuna libre, o máquina de punto nodal.

- La máquina consta de un balancín libre, sobre el cual se coloca el rotor, y que vibra solamente en el plano horizontal (la rigidez en los apoyos en el plano vertical es mucho más alta).



En la figura también se han representado los dos planos A y B donde se van a introducir las masas equilibradoras. En

esos dos planos las masas desequilibradoras equivalentes las llamaremos m_A y m_B , de magnitud y posición angular desconocidas.



- Si la única masa desequilibrada fuera la m_A , ésta introduciría una excitación sobre el balancín, que produciría la vibración de éste sobre el plano horizontal.

El rotor se movería entre dos posiciones extremas, pasando su eje alternativamente de la posición $L_1L'_1$ a la $L_2L'_2$.

El punto O_A sería el único punto que no vibra, es decir, será el nodo de la vibración.

(El nodo equivale al centro de suspensión de un péndulo físico, el rotor, cuyo centro de percusión es la intersección del plano A con el eje del rotor).

De la misma forma podría localizarse el nodo O_B , debido a la vibración producida por la sola masa desequilibrada m_B .

- Si con la sola masa equilibrada m_A colocamos un captador de vibraciones en O_A , éste dará una señal nula, o en otras palabras, no responde al desequilibrio en el plano A. ("Ignora" que este existe).

En consecuencia si suponemos la existencia simultánea de dos masas m_A y m_B , el captador O_A sólo responderá a la excitación producida por m_B , pero no a la m_A .

En la misma forma, un captador situado en O_B sólo responderá a la excitación producida por el desequilibrio m_A , pero no por el m_B .

- Este fenómeno es el que emplean las máquinas de punto nodal para lograr equilibrar una pieza en una sola carrera.

Ello requiere, evidentemente, la previa identificación de los nodos O_A y O_B , que es donde hay que colocar los acelerómetros (o captadores de desplazamiento) para conocer la magnitud de los desequilibrios en los planos elegidos A y B, de manera que ambas lecturas sean representativas de los correspondientes desequilibrios en cada plano.

- Evidentemente, si las posiciones de los planos correctores A y B no estuvieran prefijadas podrían prefijarse los puntos nodales (ubicación de los acelerómetros, por ejemplo en los apoyos) y determinar los correspondientes planos de corrección. Este sistema es el empleado en las máquinas modernas, pues no requiere cambios en el sistema de detección de vibraciones de la máquina. (Naturalmente, siempre que las masas correctoras puedan situarse en cualquier parte del rotor).

NOTA: Cuando los planos de corrección están obligatoriamente prefijados, la localización de los nodos de la vibración se efectúa en forma práctica.

En primer lugar se equilibra uno de los rotores de la serie por cualquier procedimiento. Luego se añade un desequilibrio en el plano A y se calcula Q_A . Después se quita tal desequilibrio en A y se introduce otro en B, calculando Q_B .

Conocidos Q_A y Q_B se sitúan los captadores y se produce al equilibrado de todos los rotores de la misma serie (que se supone muy similares).

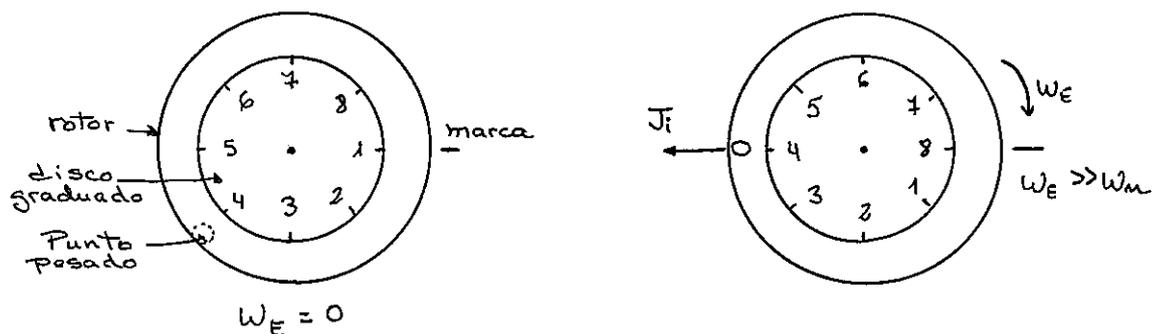
- El balancín de punto nodal se completa con un volante graduado y una luz estroboscópica para "ver" la posición angular del rotor, accionada cuando la amplitud de la vibración sea máxima.

También se dispone de un conmutador que selecciona uno u otro acelerómetro, para tomar sus lecturas y disparar el estroboscopio.

- El procedimiento de equilibrado es el siguiente:

En primer lugar se hace girar el rotor a una velocidad muy superior a la velocidad crítica del sistema rotor-balancín, para asegurar un ángulo de desfase entre fuerza desequilibradora y movimiento (en el plano horizontal) igual o próximo a 180° .

En segundo lugar se lee en el volante graduado la localización angular del desequilibrio, primero en el plano A y luego en el plano B.



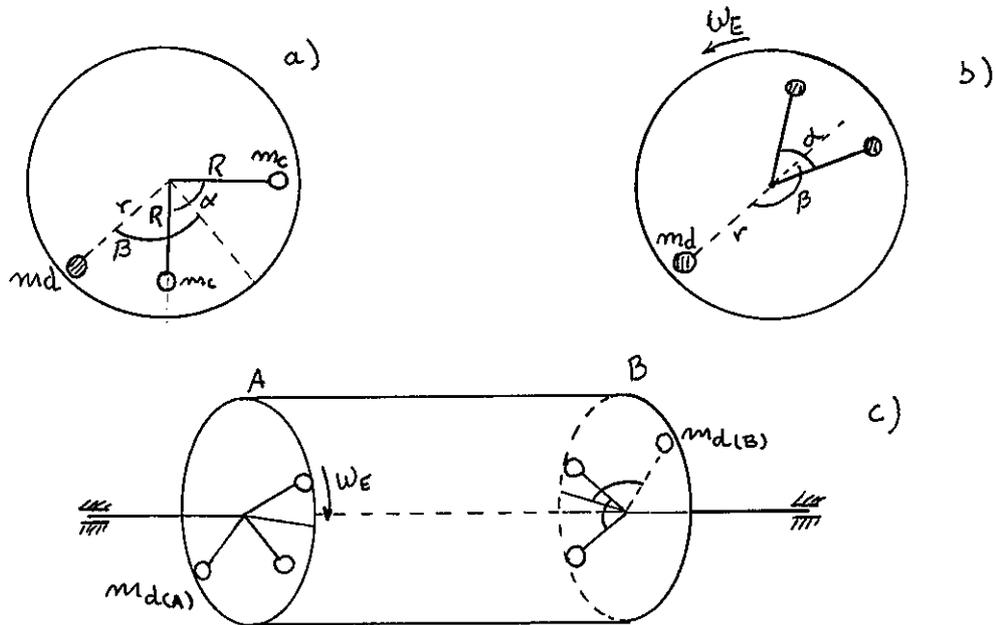
Las figuras muestran que cuando el estroboscopio centellee al ser máxima la amplitud de la vibración, el punto pesado se encontrará 180° pasada la marca, y en la misma dirección que W_E .

Mirando el rotor desde el lado de la marca, el punto pesado se encontrará en la generatriz opuesta. La masa equilibradora ha de colocarse entonces sobre la división que se enfrente a la marca cuando centellee el estroboscopio.

En tercer lugar, como la amplitud de la vibración es proporcional al desequilibrio existente, una adecuada graduación de la escala de amplitudes (con un tarado previo, partiendo de un desequilibrio conocido) permite determinar el valor de la masa equilibradora (para una distancia dada al eje de giro), en cada uno de los dos planos de equilibrado.

c.- Máquinas de compensación mecánica:

- Las figuras muestran claramente los fundamentos de las máquinas de compensación mecánica.



En la figura (a) se observa un plano del rotor (A) donde se va a efectuar el equilibrado.

Se supone que $m_{d(a)}$ es la masa desequilibrada equivalente en ese plano.

Si se colocan dos masas m_c , unidas al eje por el brazo R , y girando a la misma velocidad del rotor (ω_E), se observa claramente que el desequilibrio del conjunto aumenta.

Sin embargo, como se observa en la figura b, si variamos la posición del eje de las dos masa m_c , es decir, si variamos el ángulo β hasta hacer que sea 180° respecto a la posición

$m_d(\alpha)$, y si además variamos el ángulo α entre las dos masas m_c de modo que la fuerza de inercia conjunta sea igual y opuesta a la producida por $m_d(\alpha)$, el conjunto estará equilibrado.

Evidentemente, si introducimos un mecanismo similar en el plano de equilibrado B, y procedemos de igual forma, habremos equilibrado totalmente el rotor.

- Una máquina de equilibrado por compensación mecánica dispone de dos conjuntos de pares de masas m_c , cada una de las cuales se coloca en el correspondiente plano de corrección.

A su vez, disponen de un mecanismo que permite ir modificando el ángulo β , respecto de una posición de referencia (el mando que modifica el ángulo β se conoce como "control de ubicación") así como de otro mecanismo que permite ir variando el ángulo entre las dos masas compensadoras α (el mando que modifica este ángulo se conoce como "control de magnitud").

El conjunto de las dos masas compensadoras ha de girar a la misma velocidad del rotor, aunque es evidente que el rotor puede hacerse girar a cualquier velocidad, para proceder a su equilibrado.

6.1.- RECOMENDACIONES PARA EL EQUILIBRADO DE ROTORES

- Evidentemente para lograr el equilibrado correcto de un rotor no basta con conocer los aspectos teóricos del equilibrado, como puede ser el cálculo del desbalanceo existente. Existen multitud de aspectos prácticos que si no se tienen presentes es imposible conseguir un equilibrado correcto.

A continuación vamos a analizar algunos de estos aspectos, señalando las maneras de actuación en cada caso:

19.- Ante de proceder al equilibrado hay que estar seguros de que la vibración se debe a un desequilibrio y no a otras causas (desalineamiento, defectos de cojinetes, etc.), ya que en tal caso no sólo no lograríamos equilibrar al rotor, sino que probablemente empeoraríamos el nivel de las vibraciones.

29.- Debe inspeccionarse detenidamente el rotor para ver si está dañado (si ha recibido golpes), o si tiene algún tornillo perdido o suelto, o si tiene depósitos de suciedad, pues en esos casos el desequilibrio no es tal, y puede solucionarse fácilmente sin necesidad de proceder a un equilibrado.

39.- Ver en que dirección la amplitud de la vibración es mayor (horizontal o vertical, aún cuando no

necesariamente) y colocar los captadores de manera que midan la amplitud más elevada.

Si el equilibrado se efectúa en dos o más planos, deben colocarse todos los captadores en el mismo plano que contiene al eje del rotor. (aunque no es imprescindible).

49.- Antes de tomar las lecturas de amplitud y fase, dar tiempo al rotor para que se estabilice en su funcionamiento.

(Muchos grandes rotores, como por ejemplo en turbogeneradores, requieren un gran tiempo, ¡hasta tres días!, para que se estabilicen la amplitud y fase de sus vibraciones, debido a fenómenos de calentamientos, dilataciones, puestas a plena carga, etc.)

50.- Estar seguros que se puede añadir o quitar pesos en los planos de equilibrado seleccionados.

Esto depende un poco del tipo de peso de prueba que vaya a colocarse, y que pueden ser tan variados como arcilla moldeable, grapas de diferentes formas, láminas de metal soldadas, tornillos y tuercas, arandelas, abrazaderas, etc.

- 69.- Estar seguros de disponer de una marca de referencia y de un plano donde se puede medir el ángulo de fase, principalmente si se usa una luz estroboscópica).
- 79.- Utilizar siempre la misma velocidad de equilibrado en las diferentes carreras del rotor, procurando que éstas coincidan con la velocidad de régimen (recuérdese que si se toman velocidades diferentes, los ángulos de fase varían, y ya no sólo se deberán al efecto de la masa de prueba).
- 89.- No variar nunca la posición de los captadores para las diferentes etapas de equilibrado. Lo mejor sería la fijación permanente de los mismos.
- 99.- Si para la medida del ángulo de fase se emplea un filtro sintonizable (para disparar el estroboscopio, por ejemplo) procurar que esté sintonizando perfectamente al valor de la máxima amplitud de la vibración, pues en caso contrario se pueden introducir importantes desviaciones en la medida del ángulo de fase.
- 109.- Si se equilibra en más de un plano, observar los ángulos de fase desde el mismo extremo del rotor, para evitar ambigüedades en su medida.

Siempre ha de procurarse la máxima exactitud en la lectura del ángulo de fase. (Cambios de 3 a 4 grados son a veces suficientes para no poder equilibrar un rotor).

- 119.- Asegurarse, antes de colocar el peso de prueba, si el rotor trabaja por encima o por debajo de la velocidad crítica, para evitar que la masa de prueba colocada pueda originar fuertes vibraciones que causen daño en el mismo.

(Esto es fácil de ver al parar el rotor después de la primera carrera, o si éste ya estaba girando. Si a medida que desciende la velocidad se aprecia una disminución de la amplitud de la vibración, luego un aumento y después otra disminución, es señal de que el rotor estaba girando por encima de una velocidad crítica).

- 120.- Una vez el rotor detenido, analizar si existe alguna vibración "de fondo", producida por la vibración de máquinas vecinas.

Si tal vibración "de fondo" tuviera una frecuencia próxima a la de equilibrado podría perturbarla, debiendo procederse en este caso a su estimación previa (parando la máquina causante de la misma)

139.- Es importante elegir una magnitud adecuada para el peso de prueba. Si es muy pequeño, el cambio en la amplitud y fase de la vibración será inapreciable. Si es muy grande, puede resultar peligroso si se opera por encima de la velocidad crítica. Un criterio general es que el peso de prueba colocado produzca una variación del orden del 30% de la vibración inicial y alrededor de 30° en el cambio de fase.

Para conseguir estos valores puede tomarse un peso de prueba que produzca una fuerza rotatoria sobre cada cojinete del orden del 10% de la fuerza sobre el cojinete debida al peso del rotor.

Por ejemplo, un rotor que pese 2000 lbs y gire a una 3600 rpm, tendrá una resultante debida al peso en cada cojinete de 1000 lbs. En consecuencia, el peso de prueba debería ejercer una acción sobre cada apoyo de $0,1 \cdot 1000 = 100$ lbs.

Si P_p es el valor del peso de prueba en onzas, y R su distancia al eje de giro en pulgadas, tendremos:

$$F = 1,77 \cdot (\text{rpm}/1000)^2 \cdot P_p \cdot R$$

De donde se obtienen, en cada caso:

$$P_p \cdot R = \frac{F}{1,77} \cdot \left[\frac{1000}{\text{rpm}} \right]^2 = 4,36 \text{ onzas} \cdot \text{pulgadas}$$

Si el peso se colocase a un radio de 6 pulgadas, habría de colocarse un peso de prueba de 0,73 onzas.

- También se suele fijar el valor del peso de prueba, en función de la amplitud pico-pico de la vibración medida en la primera carrera.

Si el rotor gira por debajo de su velocidad crítica, y por debajo también de 1500 rpm, puede tomarse:

$$P_p = \frac{2,86 \cdot (P/100)}{(\text{rpm}/1000)^2 \cdot R}$$

(el valor de P_p calculado con esta última expresión, para rotores ligeros, es muy pequeño, por lo que puede multiplicarse por 2 o por 3 sin problemas).

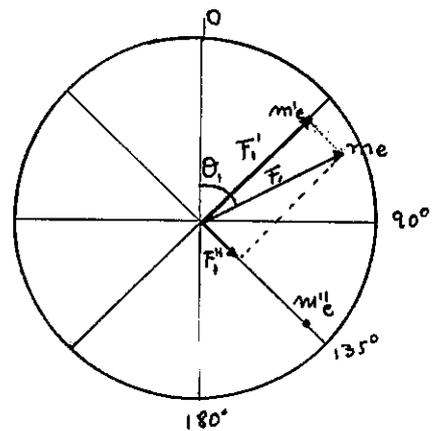
- Una expresión más empírica y más inexacta es la siguiente:

$$P_p = \frac{30 \cdot P}{R}$$

viniendo P_p en gramos, P en Kg. y R en milímetros.

- 149.- Hay que tener cuidado en sujetar bien la masa de prueba, para evitar que la fuerza centrífuga la lance fuera.
- 150.- Ha de procurarse situar la masa de prueba en una posición angular tal (respecto de la marca de referencia), que quede en dirección opuesta al desplazamiento de tal marca. (ver pag.) durante la primera carrera.
- 160.- Existen casos en que la posibilidad de colocar las masas equilibradoras está limitada a algunas posiciones angulares en los planos de equilibrado.

La figura representa el plano de equilibrado de un rotor en el que la masa correctora debe colocarse a θ°_1 , pero sólo es posible hacerlo, por razones constructivas, en ángulos a 45° .



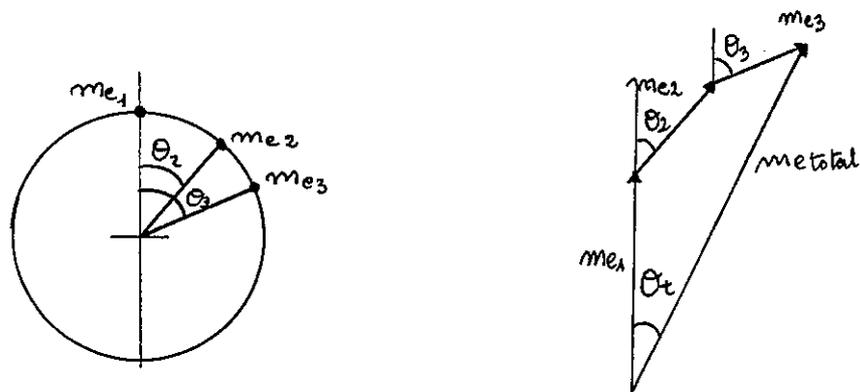
En este caso pueden colocarse dos pesos a 45° y 135° , por ejemplo (o a 45° y 90°), calculados a partir de los vectores F'_1 y F'_2 , por simples reglas de geometría elemental.

Nótese que las dos masas equilibradoras equivalentes m'_e y m''_e pueden colocarse con el mismo radio, o con radios diferentes (pudiendo ser en este caso ambas masas iguales).

179.- Cuando se equilibra un rotor en dos plano por medio del método de equilibrado en un solo plano, puede darse el caso de tener varias masas equilibradoras en un mismo plano de equilibrado (fruto del equilibrado de las sucesivas etapas).

En estos casos es conveniente sustituir el conjunto de tales masas que representaron los equilibrados parciales por una sola masa (que represente el estado de equilibrio final).

En la figura se muestra claramente como una simple suma vectorial da el valor final del desequilibrio (valor de m_{et} y θ_t).



189.- Existen casos en los que a pesar de tener presentes todas las observaciones expuestas y cumplir un correcto método de equilibrado, éste no se consigue.

En este caso, las causas, podrían ser:

- a) Suciedad, agua, etc., acumulada en el interior del rotor, y que cambian de posición en cada carrera de éste, con el consiguiente cambio en el desequilibrio original.
- b) Deslizamientos del rotor sobre su propio eje, debido a una sujeción incorrecta (apriete por interferencia inadecuada, por ejemplo), que hace que en cada carrera la posición del rotor respecto a una marca sobre su eje varíe, aparentando un cambio en el desequilibrio inicial.
- c) Excesiva holgura en los cojinetes, que puede convertir el sistema vibrante en no lineal.

Naturalmente, existen otras causas que impiden equilibrar un rotor, pero que no pueden considerarse desequilibrios del mismo (desalineamientos, excentricidades, pandeos, problemas eléctricos, etc.).

6.2.- TOLERANCIAS DEL EQUILIBRADO

- Hasta ahora se ha estado hablando de equilibrado y de los métodos para conseguirlo.

Parece que implícitamente se ha aceptado el hecho de que el equilibrado conducía a la eliminación del desequilibrio.

Sin embargo, la pregunta que puede hacerse es: ¿ Hasta que punto puede equilibrarse totalmente un rotor (o un mecanismo cualquiera) ? ¿ Hasta que punto es técnicamente posible y económicamente factible ?

Evidentemente, dado que la perfección nunca puede alcanzarse, es preciso definir unos "límites aceptables" para definir un "equilibrado correcto".

- Para un rotor equilibrado "in situ" el nivel de aceptación del equilibrado viene dado por el nivel de aceptación de la vibración que éste causa sobre los cojinetes en que se apoya (en general, en el nivel de vibración sobre el bastidor, para un mecanismo cualquiera).

Tales vibraciones vienen limitadas normalmente por los fabricantes y usuarios de las máquinas.

En caso de que no se disponga de estos datos pueden usarse las normativas existentes sobre tolerancia de las vibraciones entre las que destacan las curvas de RATHBONE,

y los ábacos de la Asociación de Ingenieros Alemanes V.A.I. (Verim Deutscher Ingenieure), las curvas IRO, etc.

NOTA: En todo lo que sigue supondremos que las vibraciones son causadas, exclusivamente, por el desequilibrio existente.

En el gráfico 1 se tienen las curvas de RATHBOONE que deben considerarse como las líneas medias de un área que se extiende a ambos lados de la misma, en $\pm 25\%$ de los valores de la amplitud de la vibración indicados.

Como puede observarse, estas curvas, trazadas para diversos tipos de máquinas, supone que sólo la velocidad de giro de la parte en rotación ha de ser considerada.

En el gráfico 2 puede observarse un ábaco de VDI que da los valores de velocidad de vibración (mm/s), para diferentes grupos de máquinas (K, M, G y T, faltando por definir las máquinas con mecanismos alternativos-motores montados sobre bancadas, D, y máquinas sobre soportes elásticos, S).

En máquinas del grupo G puede considerarse un buen nivel de vibración (y por consiguiente un buen equilibrado) valores de la velocidad de vibración de hasta 1,8 mm/s. Niveles hasta 4,5 mm/s pueden ser aceptables.

Sin embargo, velocidades hasta 11,2 mm/s son excesivas, y pueden dañar la máquina en un periodo más o menos corto. Con este nivel de vibraciones, el equilibrado es inaceptable.

Por encima de 12,5 mm/s la vibración es inadmisibile, y pueden destruir la máquina en forma inmediata.

Los gráficos 3, 4, 5 y 6 definen los umbrales aceptables, para diferentes velocidades de giro, en función de la amplitud de vibración medida en milésimas de milímetro, en los soportes del rotor, según estas normas VDI.

La figura 7 muestra un gráfico de límite de amplitud pico-pico de la vibración para diferentes velocidades de giro, dado por la empresa I.R.D.

La figura 8 representa otro gráfico de este tipo, también de I.R.D., pero en función de la aceleración pico en "g".

- Otro sistema que también se emplea para establecer el grado de equilibrado son las "Normas de calidad de equilibrado", desarrolladas fundamentalmente para rotores rígidos por la V.D.I.

Esta fija el desequilibrio en gr.·cm, onzas-pulgadas, etc., que puede existir en cada plano de equilibrado en función de la masa del rotor, revoluciones del mismo, tipo de máquina, etc.

La tabla 9 representa 6 grupos de tolerancia de equilibrado para rotores.

Esta tabla da el desequilibrio máximo admisible en gr·mm por Kg. de masa del rotor, para diferentes valores de rpm. Si se equilibra en dos planos ha de tomarse, para cada uno, la mitad del valor indicado en la tabla.

La figura 10 representa una gama de tolerancias de equilibrado de la VDI, expresada en onzas-pulgadas dividida por milésimas de libras de peso del rotor.

Cada franja representa los márgenes de tolerancia para una amplia gama de r.p.m.

EJEMPLO: En un rotor clasificado G 2,5, que pese 5000 libras y gire a 1800 r.p.m, su margen de tolerancia se encuentra entre 3,5 y 8,0 onz·pulg/lb·10³

La tolerancia máxima para este rotor será:

$$(5000/1000) \cdot 8,0 = 40 \text{ onz} \cdot \text{pulg}$$

Si el rotor se equilibra en dos planos, la tolerancia máxima admisible en cada uno de ellos será de 20 onz·pulg

- Si el rotor se equilibra en una máquina, lo normal es que el fabricante especifique los límites del equilibrado.

Si no es así, una medida prudente es tomar una fuerza producida por el desequilibrio igual o menor que el 10% de la fuerza en el soporte del rotor debida a su peso.

EJEMPLO: En el rotor del ejemplo anterior el 10% de la fuerza sobre cada cojinete (supuesto la carga centrada entre los apoyos es de 250 lb.

La fuerza debido al desequilibrio, en un plano, vendrá dada por:

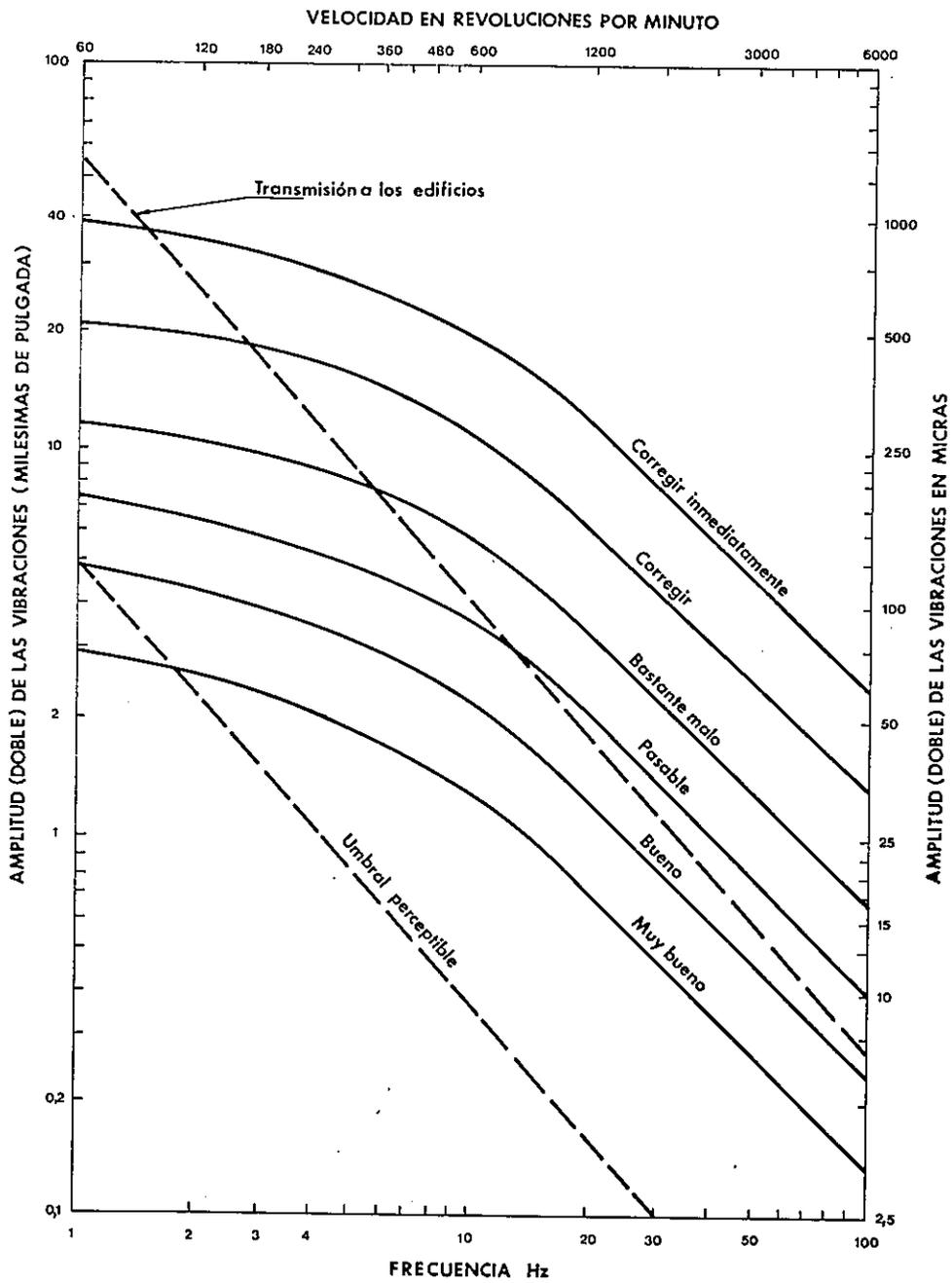
$$F = 1,77 \cdot (\text{rpm}/1000)^2 \cdot (\text{onz} \cdot \text{pulg})$$

$$250 = 1,77 \cdot (1800/1000) \cdot (\text{onz} \cdot \text{pulg})$$

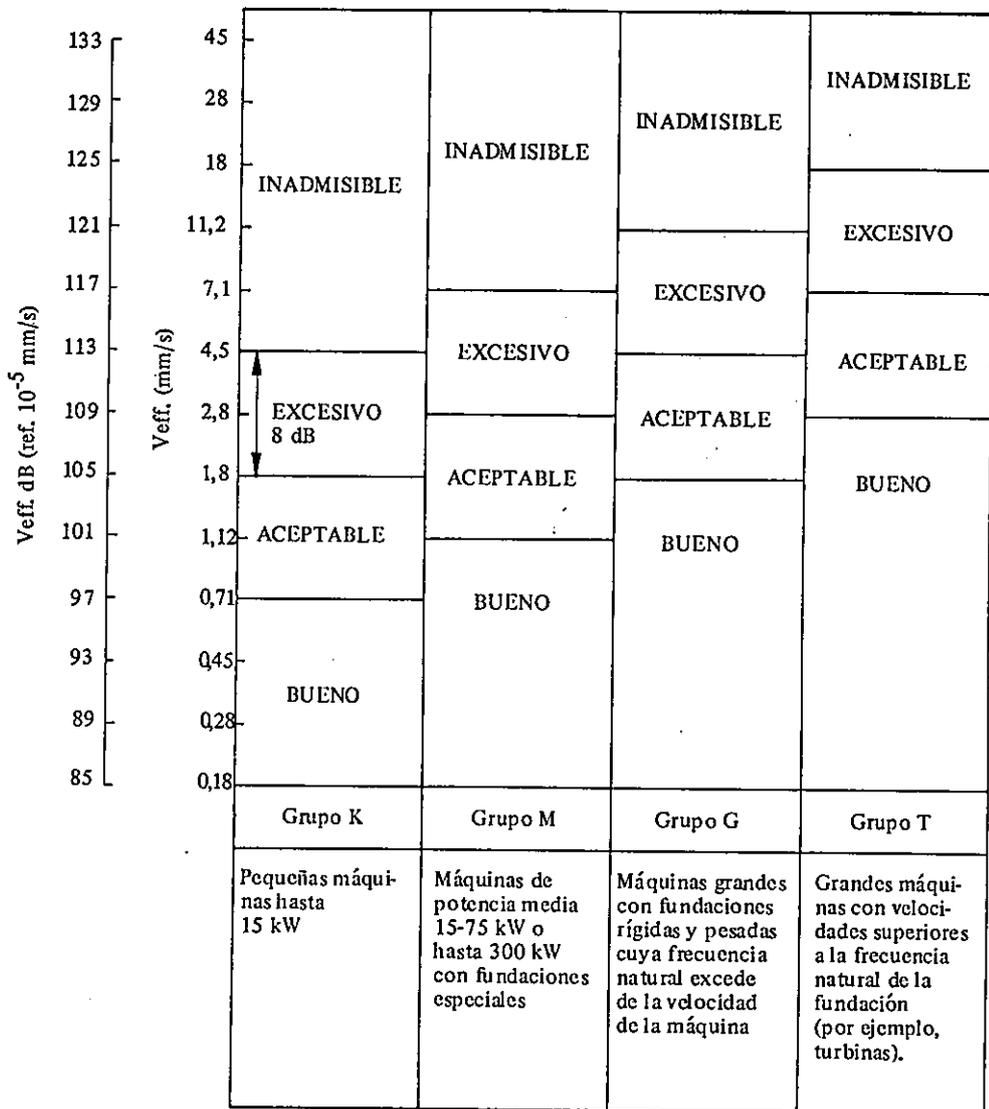
de donde se obtiene:

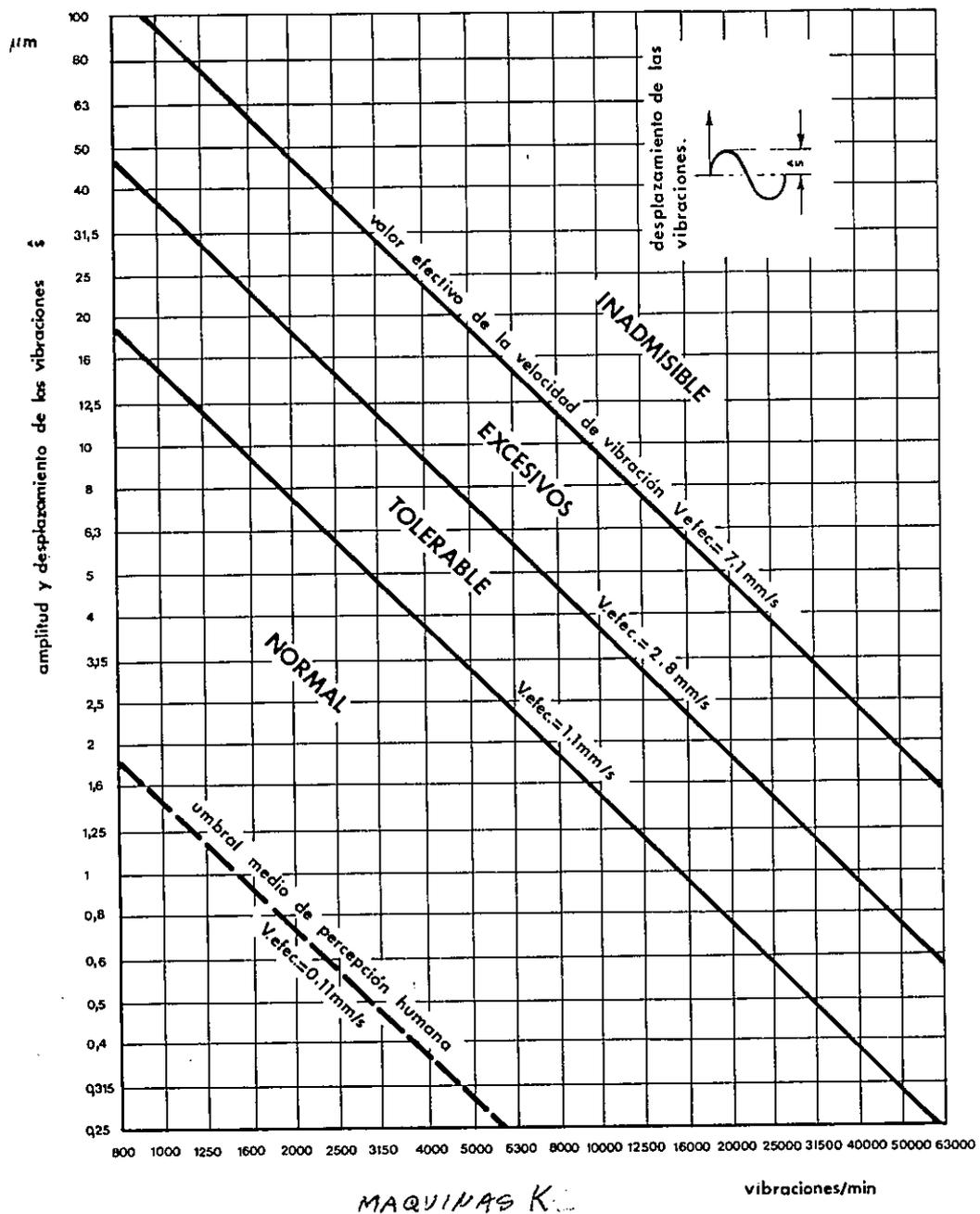
$$\text{onz} \cdot \text{pulg} = 43,6$$

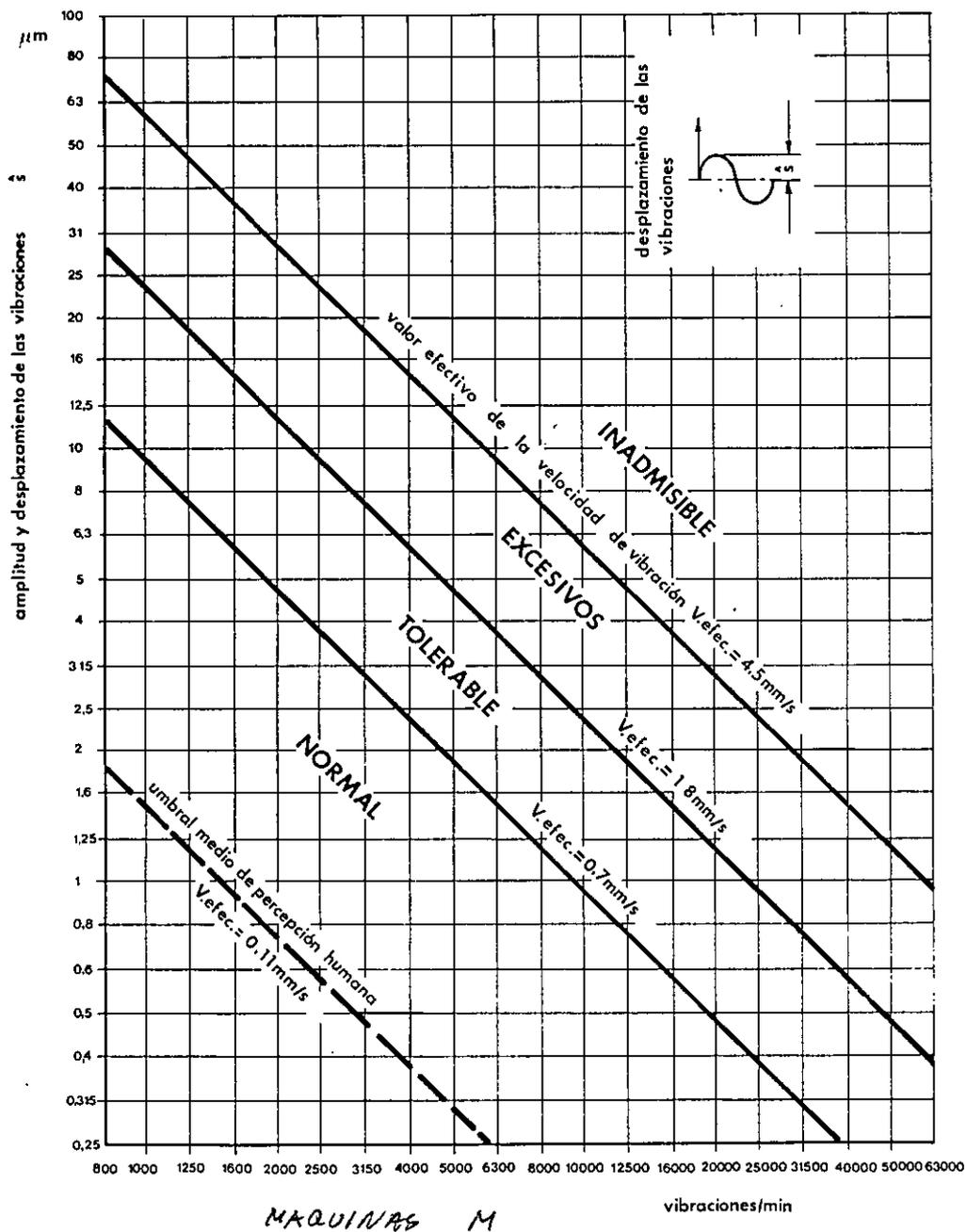
Por lo cual, 4,36 onz·pulg es el máximo desequilibrio permitido para cada plano



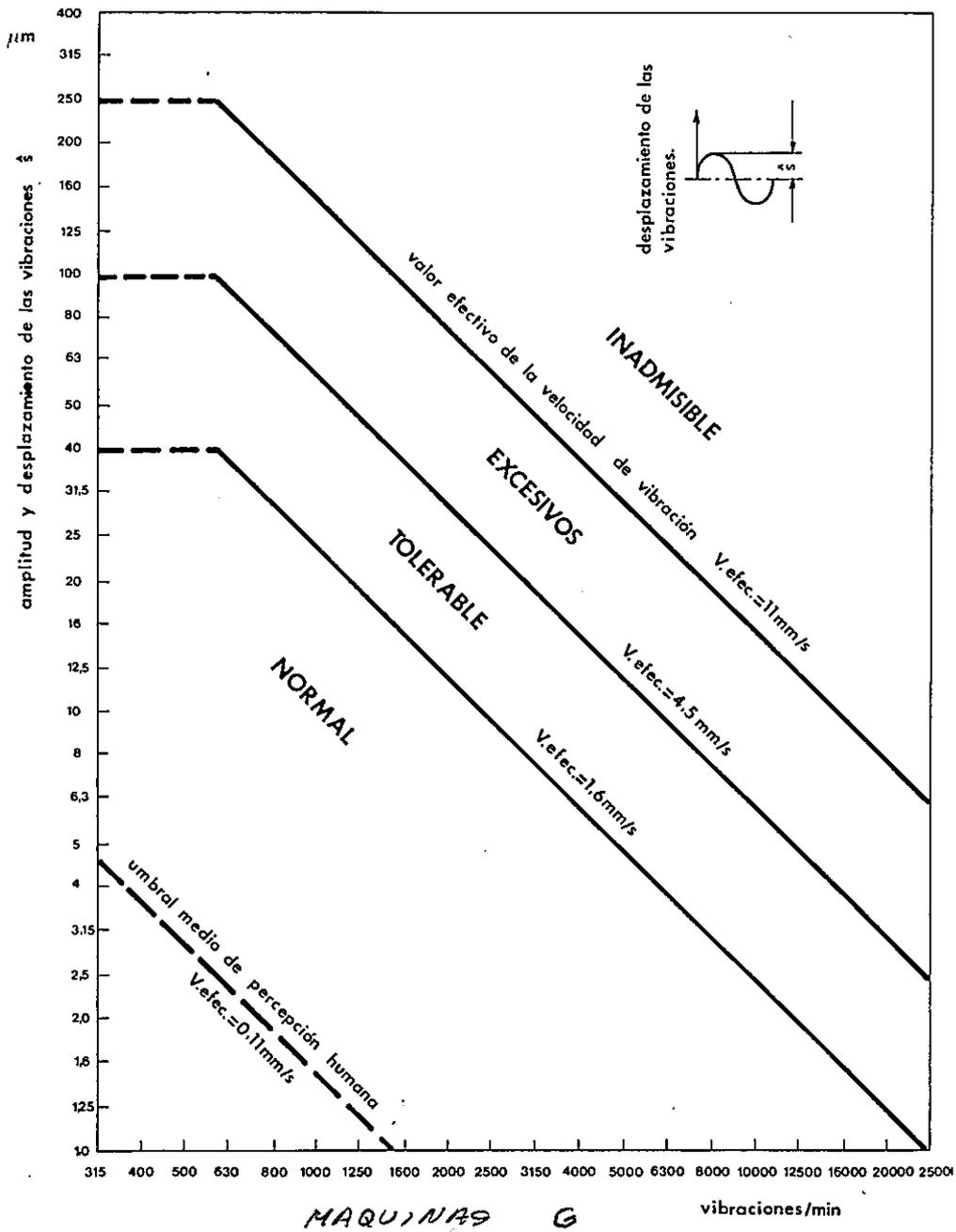
A



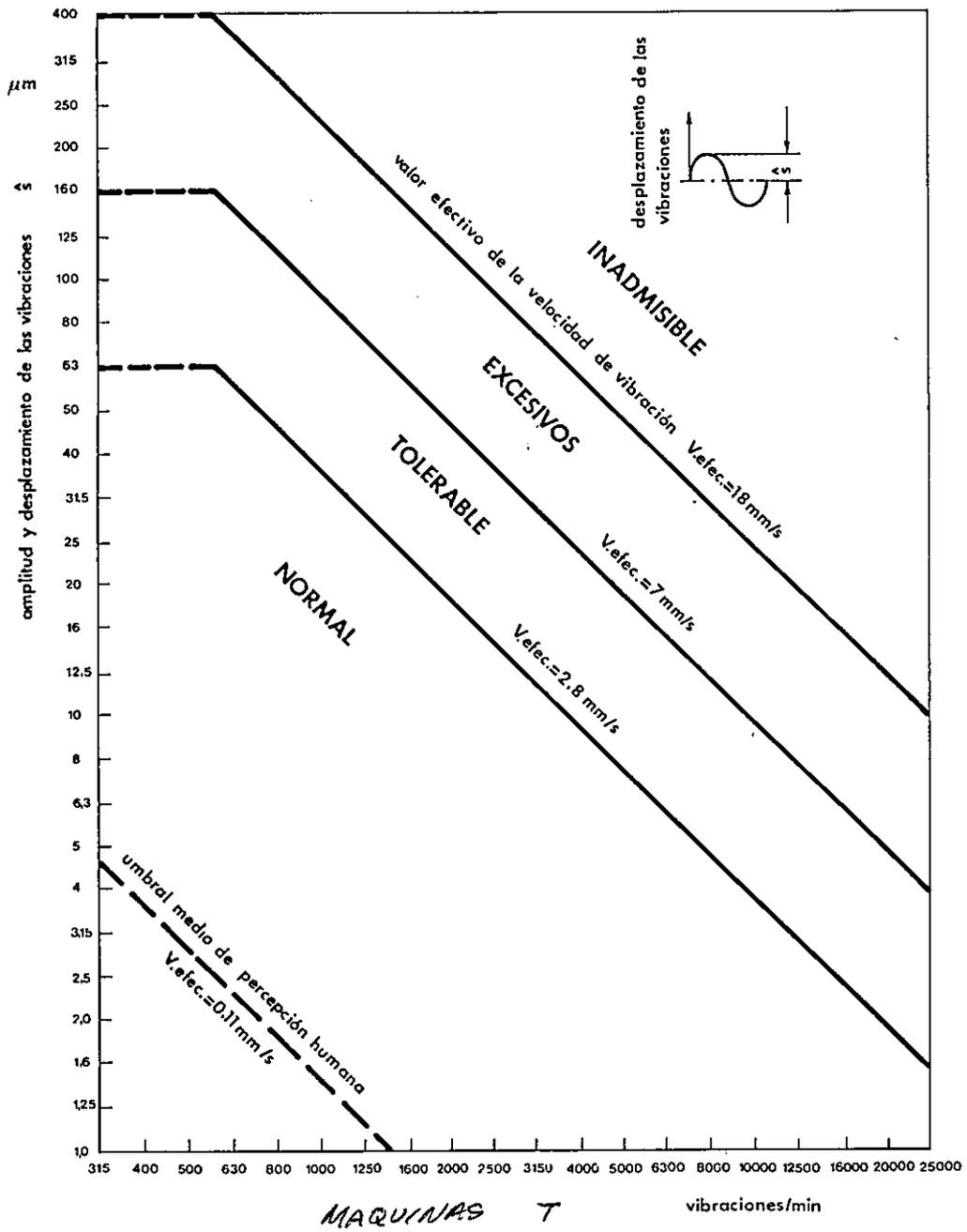




4



5



Frecuencias de vibracion (Ciclos por minuto)

