

## ESTUDIO DE LOS MECANISMOS DE LEVAS

### A) Estudio de los mecanismos genéricos

- 1.- Introducción
  - 1-1.- Constitución del mecanismo
  - 1-2.- Usos del mecanismo
  - 1-3.- Tipos existentes
- 2.- Estudio cinemático
  - 2-1.- Cálculo de velocidad y aceleración
- 3.- Estudio dinámico
  - 3-1.- Estudio de esfuerzos en las levas

### B) Diseño cinemático de levas

- 1.- Definiciones previas
- 2.- Curvas base: concepto
- 3.- Curvas base mas usuales: curva parabólica, curva armónica, curva cicloidal, curva polinomial
- 4.- Comparación entre las diferentes curvas base
- 5.- Trazado de curvas base complejas
- 6.- Trazado gráfico de levas simples
  - 6-1.- Leva traslación - seguidor traslación
  - 6-2.- Leva rotación - seguidor traslación
  - 6-3.- Leva traslación - seguidor rotación
  - 6-4.- Leva rotación - seguidor rotación
  - 6-5.- Limitaciones por el ángulo de presión
  - 6-6.- Empleo de seguidores planos y de rodillo
- 7.- Diseño analítico de levas simples
  - 7-1.- Leva de rotación, con seguidor de traslación plano
  - 7-2.- Leva de rotación, con seguidor de traslación, con rodillo
  - 7-3.- Leva de rotación, con seguidor de rotación plano
- 8.- Diseño gráfico de levas combinados

### 1-1.- CONSTITUCION DEL MECANISMO.-

Consta este mecanismo de tres miembros: dos de ellos forman un par superior, de contacto lineal o puntual (leva con su seguidor o varilla). Los otros dos pares son inferiores, de primer grado, de rotación, constituidos por los cojinetes de los ejes de la leva y varilla, o por las guías de la leva y varilla, en cuyo caso los pares inferiores serían prismáticos.

El contacto entre la leva y el seguidor (cierre del par) puede -- mantenerse por un cierre de forma o de fuerza, como veremos más adelante.

### 1-2.- USOS DEL MECANISMO.-

Los mecanismos de levas son extraordinariamente versátiles, permitiendo obtener a partir de sencillos movimientos de traslación o rotación en la leva, complicados movimientos en el seguidor. Las levas juegan un papel importante en el funcionamiento de muchas máquinas, especialmente las automáticas, imprentas, máquinas para la industrial textil, máquinas herramientas automáticas, etc. Las aplicaciones posibles de las levas dentro de su campo son -- prácticamente ilimitadas, presentándose en una gran variedad de formas, como veremos a continuación.

- En la consecución de movimientos complicados en el miembro de -- salida, partiendo de movimientos sencillos en el miembro de -- entrada, los mecanismos de levas ofrecen indudables ventajas, frente a los mecanismos planos de barras.

Tales ventajas pueden concretarse en:

- Facilidad de síntesis cinemática, tanto gráfica como analítica.
- Gran compacidad y sencillez del mecanismo obtenido.

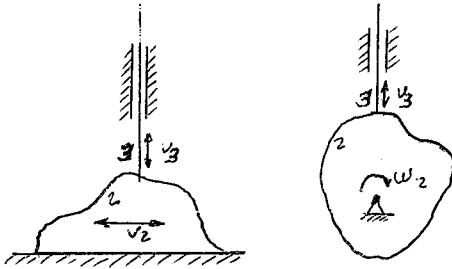
- Sin embargo, también se presentan algunos inconvenientes entre los que se pueden mencionar:
  - Gran desgaste, debido al tipo de contacto (lineal o puntual) y las elevadas presiones que se alcanzan.  
(Ello implica también importantes problemas de lubricación).
  - Dificultades de obtener el perfil exacto, a la hora de su fabricación.
  - Gran sensibilidad a los errores de trazado.
  - Problemas dinámicos a altas velocidades.

### 1-3.- TIPOS EXISTENTES

#### Formas de la leva y del seguidor:

##### a) Levas planas.-

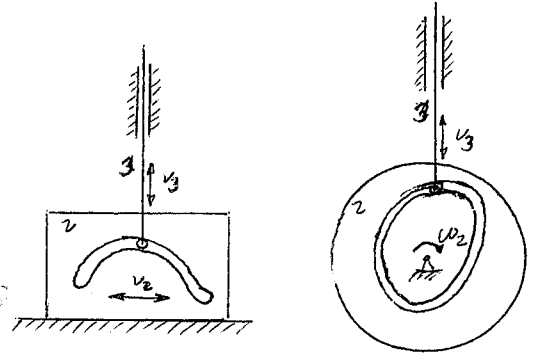
La leva puede ser un simple perfil curvo, que se desplaza rectilí-



nea y alternativamente, como se vé en la fig., o que gire alrededor de un eje fijo. En ambos casos, la varilla se apoya en él, mantenida por un cierre de fuerza.

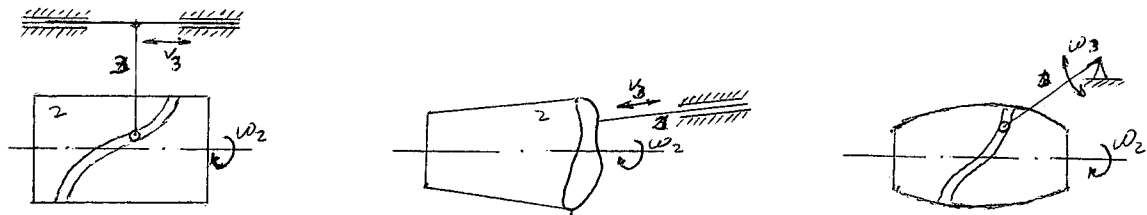
También puede la leva ser un perfil curvo tallado en una pieza, como se vé en la fig.

En este caso el cierre es de forma.



##### b) Levas espaciales:

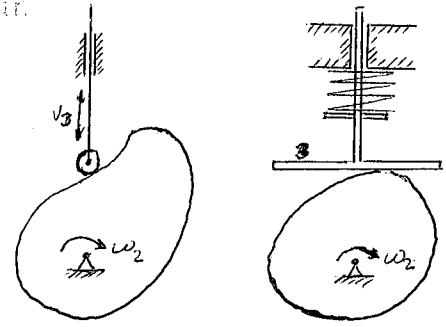
Pueden ser cilíndricas, cónicas o globicas, como se vé en la fig., pudiendo tener a su vez cierres de forma o de fuerzas.



En cuanto a la varilla puede adoptar formas variadas, tanto si se mueve rectilíneamente como si gira alrededor de un eje fijo.

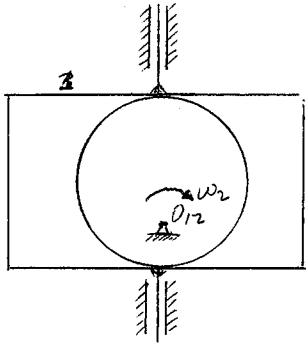
Cuando la velocidad de deslizamiento es muy grande, el contacto con

deslizamiento puede sustituirse por un contacto con rodadura, intercalando un rodillo como se vé en la fig.



A veces se termina la varilla en un disco plano, como se vé en la fig;

La varilla adopta a veces formas especiales como se vé en la escéntrica de la fig, en el que el cierre de forma está constituido por la propia varilla, y no por la leva.



trica de la fig, en el que el cierre de forma está constituido por la propia varilla, y no por la leva.

Clasificación:

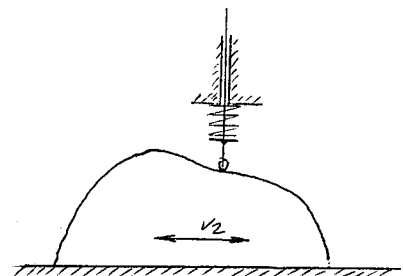
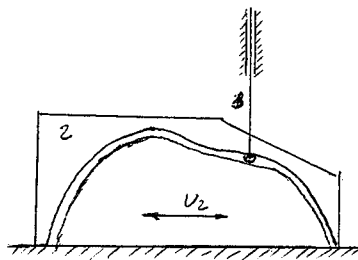
Finalmente vamos a ver las diferentes formas que puede adoptar el conjunto de los tres miembros y su cierre, para establecer una clasificación de las levas.

1º.- Leva plana de traslación con guia de traslación:

movimientos perpendiculares entre leva y varilla

cierre de forma

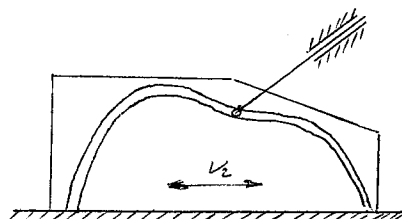
cierre de fuerza



Movimientos de leva y varilla no perpendiculares

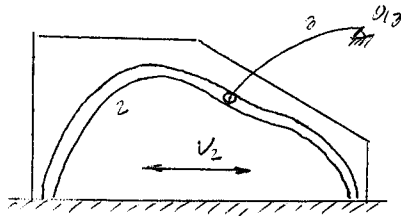
cierre de forma

cierre de fuerza

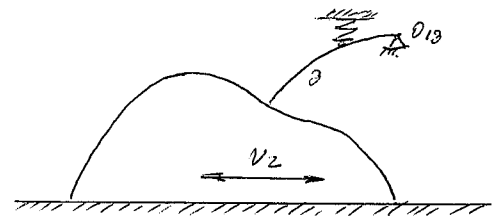


2º.- Leva plana de traslación con guía de rotación:

cierre de forma



cierre de fuerza



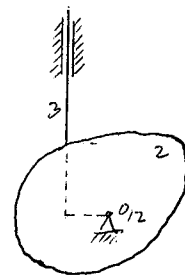
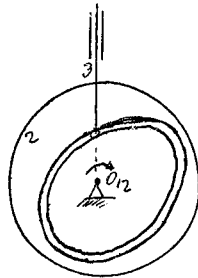
3º.- Leva plana de rotación con guía de traslación:

leva céntrica

leva excéntrica

cierre de forma

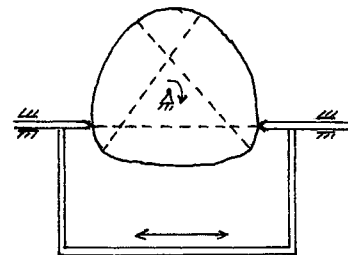
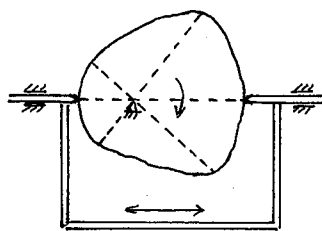
cierre de fuerza



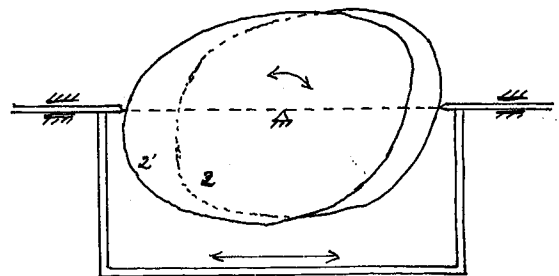
Otra forma de lograr un cierre de forma con estas levas es la utilización de levas de diámetro y cuerda constantes:

diámetro cte.

cuerda cte.

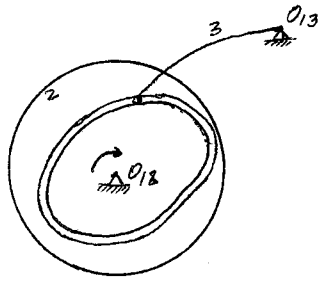


El mismo resultado puede alcanzarse con la doble leva de la fig.

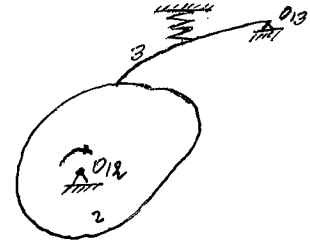


4º.- Leva plana de rotación con guia de rotación:

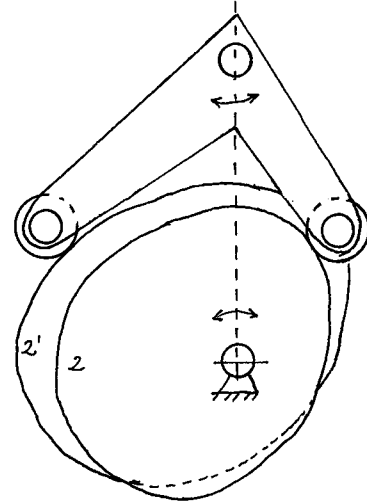
cierre de forma



cierre de fuerza

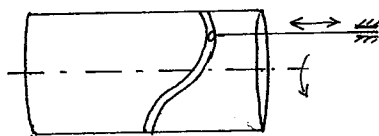


También se puede lograr lo mismo con la doble leva de la fig.

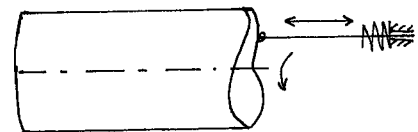


5º.- Leva cilíndrica con guia traslación:

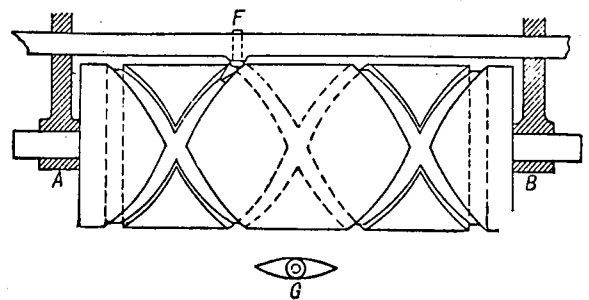
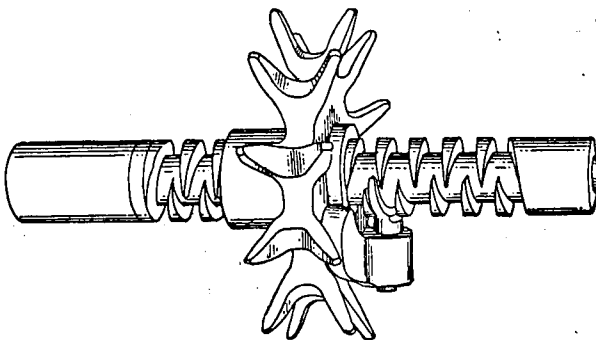
cierre de forma

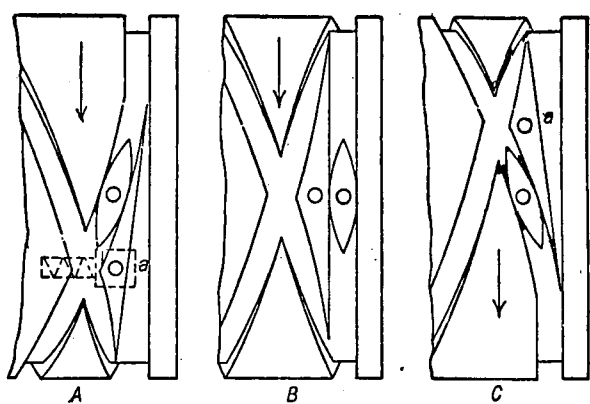


cierre de fuerza



Existen también levas cilíndricas de varias vueltas, como la de la fig.



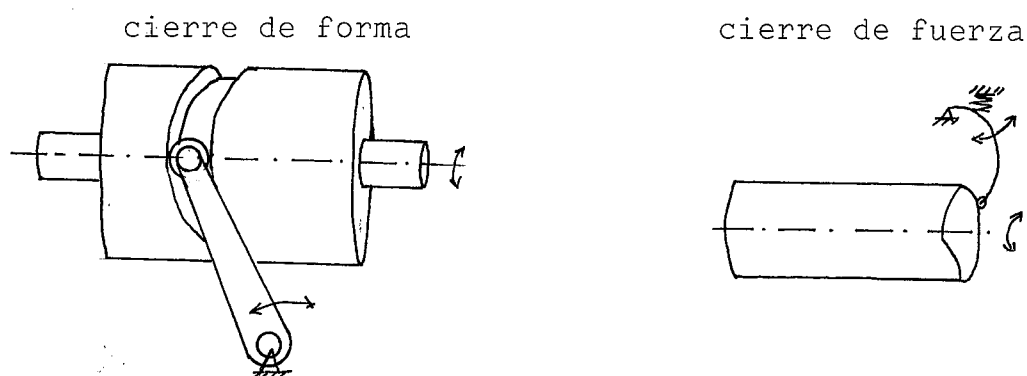


Obsérvese la forma de la aguja G que va introducida en la ranura, para conseguir - que la guía siga el camino correcto, sin - desviarse.

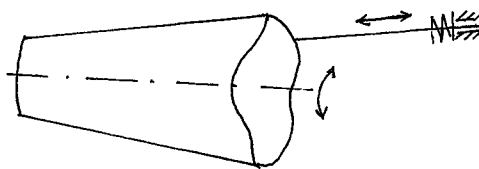
En las fig. A,B,C puede observarse que la - varilla se mantiene en reposo durante una - cierta fracción del giro de la leva. Como -

aplicación practica vemos el mecanismo empleado para guiar cables sobre un tambor.

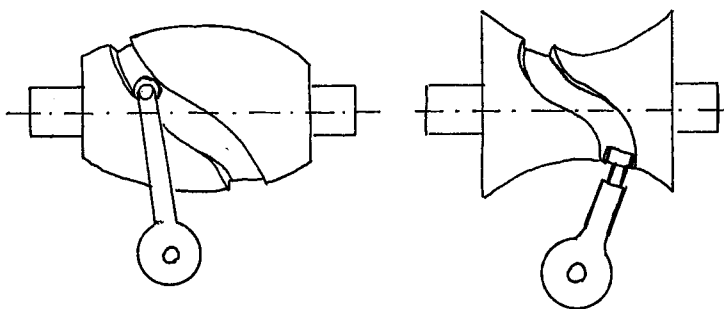
6º.- Leva cilíndrica con guía de rotación:



7º.- Leva cónica con guía rectilínea:



8º.- Leva globica:



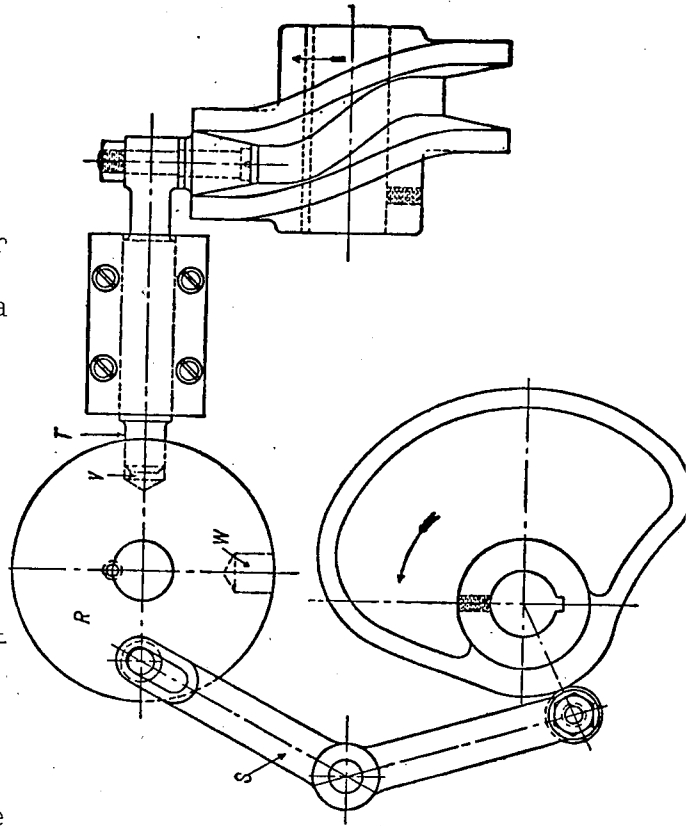


Combinación de levas.-

En muchas máquinas automáticas los movimientos de sus distintas piezas se relacionan entre si por medio de levas que hacen que cada pieza actúe en la forma y tiempo oportuno.

En la fig, la leva cilíndrica y la plana están conectadas al motor de modo que la 1ª da dos vueltas por cada una de la 2ª.

La leva plana mueve la palanca S que hace que el cilindro R se mueva a izquierda o derecha casi instantaneamente, quedando fijo en su posición todo el tiempo en que el arco del perfil de la leva plana es circular. La leva cilíndrica, mientras, mete y saca lentamente el punzón T en los agujeros V de la rueda R.



## 2-1.- CÁLCULO DE LAS VELOCIDADES Y ACELERACIONES

Aunque este problema lo podemos fácilmente resolver con los métodos vistos en la primera parte de esta obra, vamos a dar un resumen del cálculo que nos servirá de recordatorio.

### EJEMPLO1.-

-Datos: dimensiones y posición

vel. angular de la leva  $w_2$

- Incógnita:  $w_3$  y  $\alpha_3$  del seguidor.

- Solución:

1º.- Cálculo de la velocidad

$$|\vec{V}_{P(2)}| = w_2 \cdot O_{12}P$$

$$\vec{V}_{P(3)} = \vec{V}_{P(2)} + \vec{V}_{P(3-2)}$$

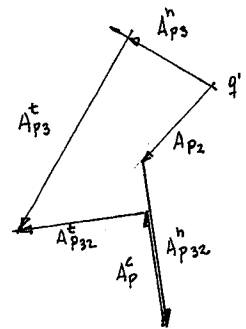
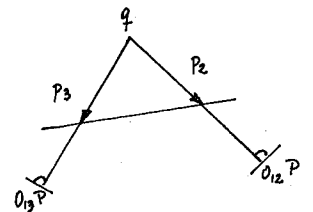
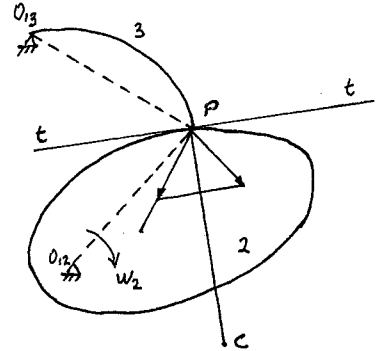
Conocida  $V_{P(3)}$ , se halla  $w_3 = V_{P(3)} / O_{13}P$

2º.- Cálculo de la aceleración

$$\vec{A}_{P(3)} = \vec{A}_{P(2)} + \vec{A}_{P(3-2)} + \vec{A}_{P(C)}$$

$$\vec{A}_{P(3)}^n + \vec{A}_{P(3)}^t = \vec{A}_{P(2)} + \vec{A}_{P(3-2)}^n + \vec{A}_{P(3-2)}^t + \vec{A}_{P(C)}$$

el valor de cada uno de estos términos es el siguiente:



	módulo	dirección	sentido
$\vec{A}_{P(3)}^n$	$w_3^2 \cdot O_{13}P$	paralela a $O_{13}P$	de P a $O_{13}$
$\vec{A}_{P(3)}^t$	??	perpendicular a $O_{13}P$	concordante con $A_{P(3)}^n$
$\vec{A}_{P(2)}$	conocida completamente como dato		
$\vec{A}_{P(3-2)}^n$	$(V_{P(3-2)})^2 / CP$	paralela a PC	de P a C
$\vec{A}_{P(3-2)}^t$	??	perpendicular a PC	concordante con $A_{P(3-2)}^n$
$\vec{A}_{P(C)}$	$2 \cdot w_2 \cdot V_{P(3-2)}$	perpendicular a tt	gira a $V_{P(3-2)}$ el sentido de $w_2$

conocida  $A_{P(3)}$  se halla  $\alpha_3$

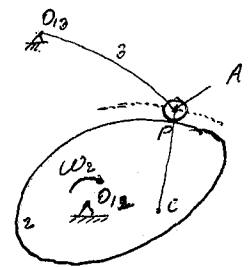
EJEMPLO2.-

El mismo problema anterior, pero ahora el seguidor tiene un rodillo

En este caso el problema se resuelve exactamente igual que el anterior,

solo que ahora la trayectoria relativa del del punto P sobre el miembro 2 no es

el perfil de la propia leva, sino una paralela a él. (de trazos de la fig).



Las ecuaciones seran:  $\vec{V}_{P(3)} = \vec{V}_{P(2)} + \vec{V}_{P(3-2)}$

$$\vec{A}_{P(3)} = \vec{A}_{P(2)} + \vec{A}_{P(3-2)} + \vec{A}_{P(C)}$$

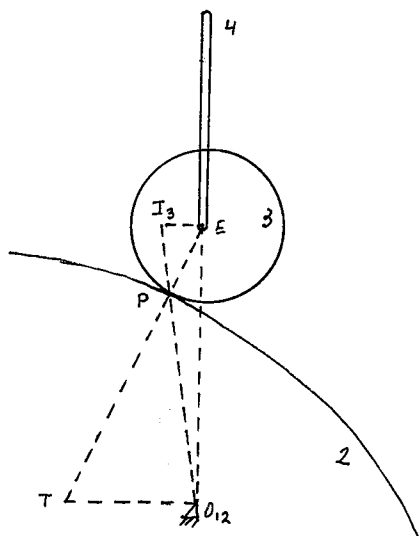
NOTA: ECUACION DE LA VELOCIDAD EN LEVAS

Si quisieramos calcular la gráfica de la velocidad y la aceleración del seguidor, podíamos calcular la gráfica espacio-tiempo y derivarla sucesivamente, como se vió en el apartado.

Pero según vimos en el apartado resulta mucho más -- práctico y exacto calcular la ecuación de la velocidad.

A continuación vamos a ver algunos ejemplos:

EJEMPLO 1.-



Sea la leva de rotación con guía de traslación de la fig.; Se desea determinar una ecuación que ligue el movimiento de la varilla (4) con el de la leva (2), midiéndolos unos parámetros sencillos en cada posición.

$$V_{P(2)} = w_2 \cdot \overline{O_{12}P}$$

Por haber rodadura pura  $\vec{V}_{P(2)} = \vec{V}_{P(3)}$

El c.i.r, del miembro 3 será  $I_3$ , puesto que la dirección de la velocidad de E también se conoce.

En el miembro 3,

$$\begin{array}{l} V_E = w_3 \cdot IE \\ V_P = w_3 \cdot IP \end{array} \quad \Bigg| \quad V_E = \frac{IE}{IP} \cdot V_P = \frac{IE}{IP} \cdot w_2 \cdot \overline{O_{12}P}$$

En la fig., los triángulos  $O_{12}TP$  y  $I_3EP$  son semejantes. En ellos:

$$IE/IP = \overline{O_{12}T} / \overline{O_{12}P}$$

Sustituyendo

$$V_E = \frac{\overline{O_{12}T}}{\overline{O_{12}P}} \cdot w_2 \cdot \overline{O_{12}P} = \overline{O_{12}T} \cdot w_2$$

Por tanto, midiendo los segmentos  $\overline{O_{12}T}$  para cada posición de la leva, y multiplicándolo por  $w_2$  tendremos fácilmente la gráfica de la velocidad de la varilla.

Diferenciándola tendremos la gráfica de la aceleración e integrándola, la gráfica de desplazamiento.

EJEMPLO 2.-

Vamos a calcular la ecuación de la velocidad en la leva de rotación guía de rotación de la fig.

En ella hemos trazado  $\overline{O_{12}T}$  paralela a  $\overline{AO_{14}}$ . Se tendrá:

$$V_{P(3)} = V_{P(2)} = w_2 \cdot \overline{O_{12}P}$$

En el miembro 3,

$$V_A = w_3 \cdot IA$$

$$V_P = w_3 \cdot IP$$

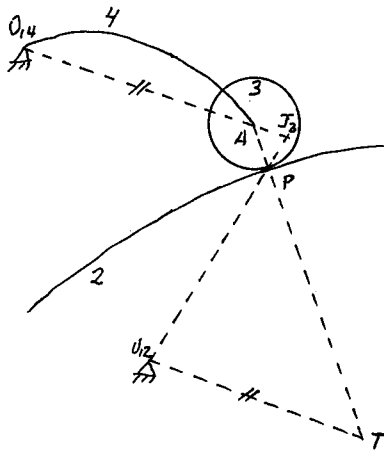
$$V_A = w_2 \cdot \overline{O_{12}P} \cdot \frac{IA}{IP}$$

Los triángulos AIP y  $O_{12}PI$  son semejantes. En ellos:

$$\frac{IA}{IP} = \frac{\overline{O_{12}T}}{\overline{O_{12}P}}$$

Sustituyendo  $V_A = w_2 \cdot \overline{O_{12}T}$

con lo que se puede trazar la gráfica midiendo los segmentos  $\overline{O_{12}T}$  en que la paralela a  $\overline{AO_{14}}$  corta a la prolongación de  $\overline{AP}$



### 3-1. ESTUDIO DE ESFUERZOS EN LAS LEVAS.-

#### a.- Esfuerzos estáticos

En el estudio de esfuerzos estáticos en las levas son de aplicación los conceptos ya vistos en el apartado , donde se estudió la transmisión de esfuerzos entre dos miembros en contacto con deslizamiento.

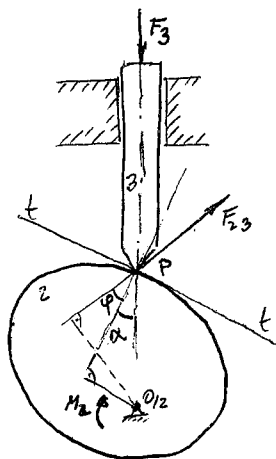
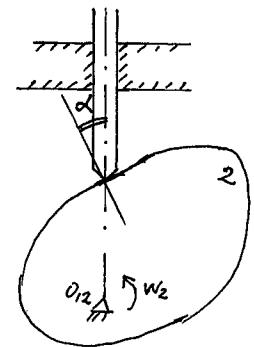
Sin embargo, en las levas de rotación con guía de traslación (y también en las levas de traslación con guía de traslación), en las que el seguidor se mueve entre unas guías, aparecen unas fuerzas de rozamiento entre la varilla y su guía que puede impedir el movimiento. Obsérvese en la fig. que si el ángulo  $\alpha$  que forma la normal a la tangente común

con la dirección del desplazamiento de la varilla (ángulo de presión) es demasiado grande, es lógico pensar

que la leva puede llegar a "agarrotarse" al no subir la varilla por ser muy

grandes las fuerzas de rozamiento que aparecen contra la guías.

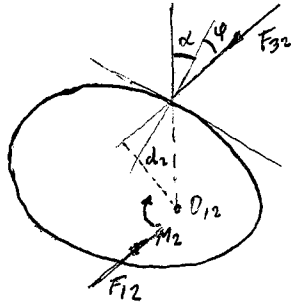
Vamos a estudiar a continuación este fenómeno:



Supongamos que aplicamos el par motor  $M_2$  sobre la leva 2.

El esfuerzo que puede vencerse en la varilla lo llamaremos  $F_3$ . Veamos cuánto vale  $F_3$  en función de  $M_2$ , para lo cual hemos de realizar el correspondiente estudio estático.

- Equilibrio de la leva:



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow F_{32} = F_{12}$$

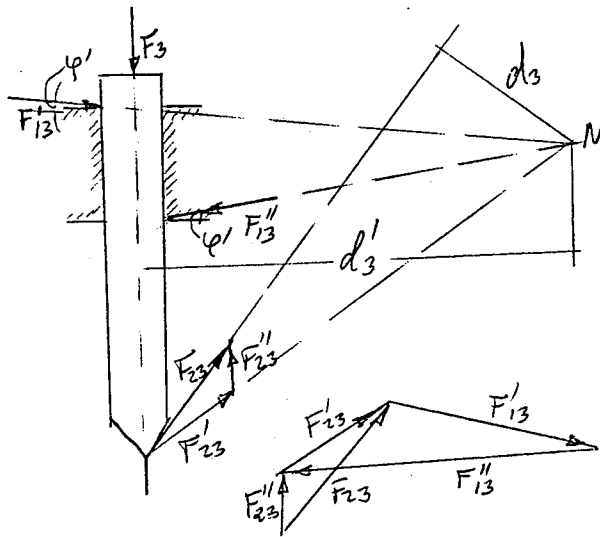
$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow F_{32} \cdot d_2 = M_2$$

$$F_{32} = M_2/d_2 = M_2/O_{12}P \cdot \text{sen}(\alpha + \varphi)$$

- Equilibrio de la varilla:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{23} + \vec{F}_3 + \vec{F}'_{13} + \vec{F}''_{13} = 0 \quad (1)$$

Siendo N el punto donde concurren las reacciones de la guía sobre la varilla ( $F'_{13}$  y  $F''_{13}$ ), y dado que la posición de N solo depende de las dimensiones de la varilla y del ángulo de rozamiento  $\varphi'$  entre



esta y la guía, que son magnitudes constantes, podemos descomponer  $F_{23}$  en una componente que pase por N y otra paralela a la varilla. Así se han hallado  $F'_{23}$  y  $F''_{23}$ .

Gráficamente, la ecuación (1) puede resolverse como se vé en la fig. pues se conocen las direcciones de todas las fuerzas.

La fuerza  $F_3$  que se puede vencer con el par  $M_2$  es  $F_3 = F''_{23}$

De la ecuación  $\sum \vec{M} = 0$  se deduce:

$$F_{23} \cdot d_3 = F_3 \cdot d'_3$$

$$F_3 = F_{23} \cdot d_3/d'_3$$

sustituyendo el valor antes hallado:

$$F_3 = \frac{M_2}{O_{12}P \cdot \text{sen}(\alpha + \varphi)} \cdot \frac{d_3}{d'_3}$$

Esta ecuación nos permite hallar  $F_3$  conocida  $M_2$ , midiendo los segmentos variables  $d_3$ ,  $\overline{O_{12}P}$  y  $\text{sen}(\alpha + \varphi)$ .

En esta ecuación también puede observarse que para un valor dado de  $M_2$ , y para una guía-varilla dada ( $d'_3 = \text{cte}$ ), los valores  $F_3$  varían con  $\alpha$ .

Para valores de  $\alpha$  pequeños,  $F_3$  podrá ser muy grande, aún cuando  $M_2$  sea pequeño. Para valores de  $\alpha$  grandes,  $F_3$  será pequeña. En efecto, a medida que aumenta el ángulo de presión  $\alpha$ , la distancia  $d_3$  disminuye.

El límite superior del ángulo resultará cuando  $d_3 = 0$  en cuyo momento  $F'_{23} = F_3$  se nula. No se puede transmitir ninguna fuerza, y se dice que hay autorretención.

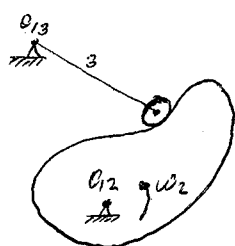
En la práctica nunca se sobrepasan valores de  $\alpha$  superiores a  $30^\circ$ .

NOTA: 1.- Obsérvese que si el cierre del par es de fuerza, (resorte), entonces  $F_3$  se compondrá de la fuerza para comprimir el resorte, más la fuerza útil en el extremo de la varilla.

2.- Si ponemos un rodillo en el extremo de la varilla, la expresión que nos da  $F_3$  quedará ( $\varphi = 0$ )

$$F_3 = \frac{M_2}{O_{12}P \cdot \text{sen} \alpha} \cdot \frac{d_3}{d'_3}$$

3.- En las levas con guía de rotación este problema de agarrotamiento no existe prácticamente



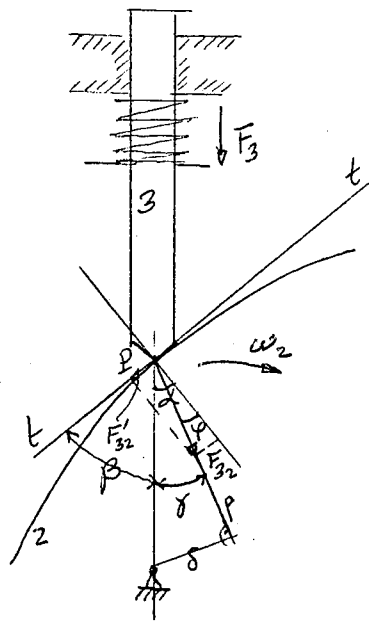
a no ser que se empleen perfiles como el de la fig, girando la leva como allí se ve.



Con levas de este tipo se consiguen grandes valores de  $F_3$  con pequeños momentos  $M_2$ .

NOTA:2.- LEVAS DE RETORNO A CERO.-

Cuando el perfil de una leva lo permita, puede la tensión,



del resorte que actúa sobre la varilla servir de esfuerzo motor y originar el movimiento de la leva. La tensión  $F_3$  del resorte determina sobre la leva la fuerza  $F_{32}$  que da lugar al par motor

$$\delta \cdot F_{32}.$$

Este par mueve la leva en el sentido de la flecha, es decir, de radios de la leva decrecientes.

Las condiciones de retorno son:

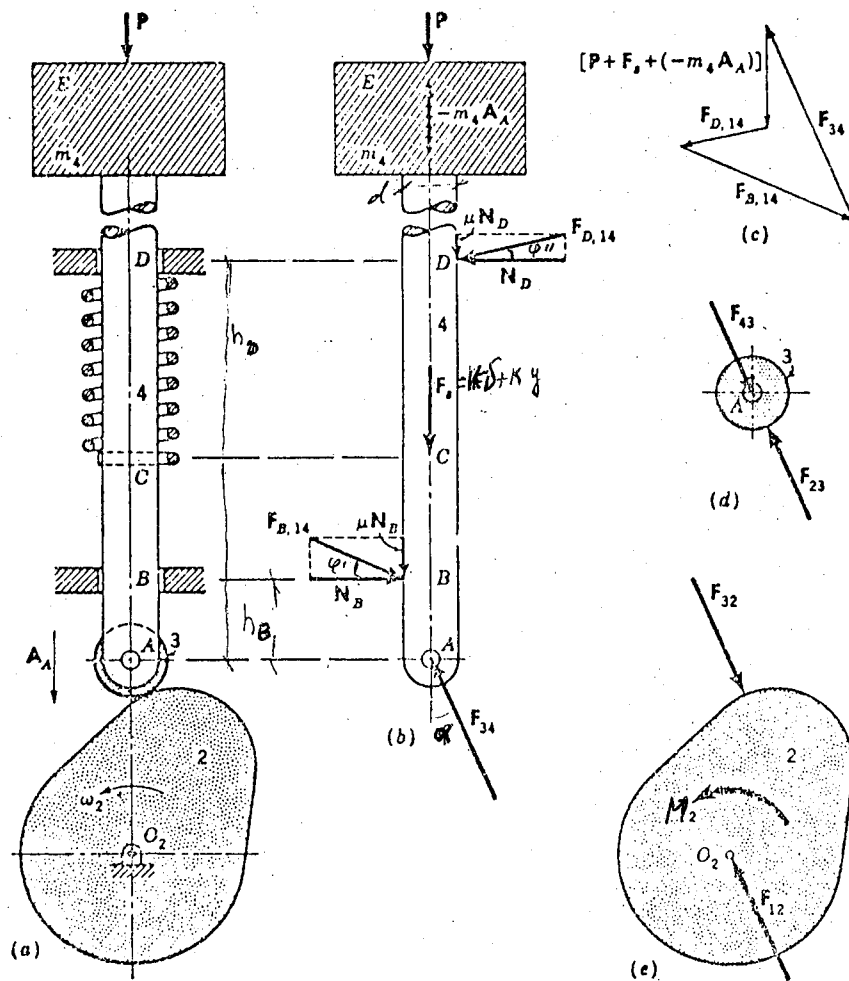
- El par motor generado por la presión del resorte ha de ser positivo en el sentido del giro, es decir,  $\gamma > 0$
- $F_3$  no debe ser en ningún momento tangente al perfil de la leva.
- La componente tangencial  $F'_{32}$  de la fuerza  $F_{32}$  ha de ser superior a la fuerza de rozamiento entre leva y varilla  $\text{tag } \kappa > \text{tag } \rho = \mu$

El momento motor valdrá:

$$M'_2 = F_{32} \cdot \delta = F_{32} \cdot \rho \cdot \text{sen } \gamma = F_{32} \cdot \rho \cdot \text{sen}(\kappa - \varphi)$$

b.- Esfuerzos totales en las levas

- Aunque en las levas de baja velocidad, las fuerzas de inercia pueden despreciarse, y un análisis estático es suficiente, en levas de gran velocidad se hace preciso introducir las fuerzas de inercia, las cuales, como es lógico, son función directa del movimiento del seguidor.
- En la figura se muestran los diagramas de cuerpo libre de los diferentes miembros que componen una leva de rotación, con seguidor de traslación y rodillo.



Las ecuaciones de equilibrio son similares a las anteriores, sin mas que introducir la fuerza de inercia .

$$\vec{J} = - m_4 \cdot \vec{A}_4$$

(En el instante representado se supone que las fuerzas tienen las direcciones que se ven en la fig.)

La  $\vec{J}$  variará de sentido al variar  $\vec{A}_4$ .

K es la constante elástica del resorte, de modo que si  $\delta$  es su precompresión, e y el desplazamiento del seguidor

$$\vec{J} = - M_4 \cdot \ddot{y} \quad (\text{fuerza de inercia})$$

$$\vec{F}_s = (y + \delta) \cdot K \quad (\text{fuerza del resorte})$$

Ecuación de equilibrio del seguidor:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{34} \cdot \text{sen } \alpha - N_B + N_D = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{34} \cos \alpha - \mu N_B - \mu N_D - P - m\ddot{y} - K(y + \delta) = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow N_B \cdot h_B + \mu N_D \cdot \frac{d}{2} - N_D \cdot h_D - \mu \cdot N_B \cdot \frac{d}{2} = 0$$

Ecuación de equilibrio del <sup>seguidor</sup> ~~la~~ Ecuación:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{32} = \vec{F}_{12}$$

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow F_{32} \cdot h_2 = M_2$$

Ecuación de equilibrio del rodillo:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{43} = \vec{F}_{23}$$

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow \text{están alineadas}$$

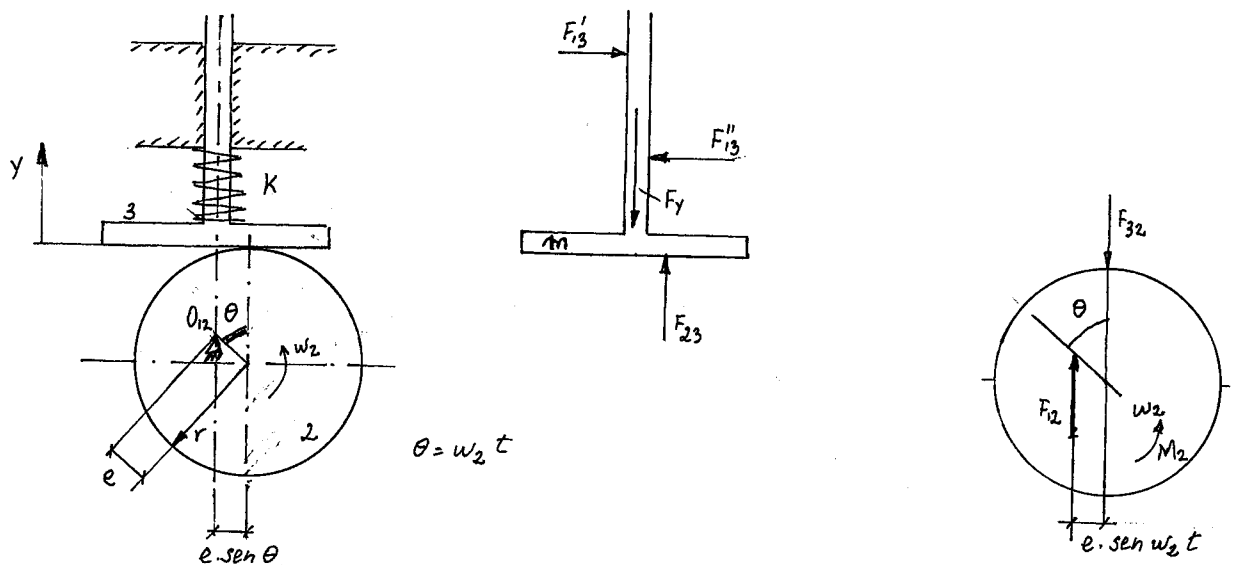
( Se supone que no hay rozamientos de rodadura ni de deslizamiento en el eje del rodillo; si los hubieran, habría que considerarlas también).

- Con todas esas ecuaciones se podrían determinar las fuerzas desconocidas  $P$ ,  $N_B$  y  $N_D$ , una vez determinada  $F_{23}$ ,  $\alpha$ ,  $K$ ,  $\delta$  y el movimiento del seguidor dado por  $y$ . (partiendo del conocimiento de  $M_2$ ).

Si se conoce  $P$ , podría hallarse  $M_2$ , siguiendo el procedimiento normal.

NOTA: Ha de observarse que las fuerzas de rozamiento  $\mu N_D$  y  $\mu N_B$  varían bruscamente de dirección cada vez que el movimiento del seguidor cambia de sentido.

- Para visualizar un poco el efecto de las fuerzas de inercia vamos a efectuar el estudio de un mecanismo de levas sencillo, como es la excéntrica con seguidor de traslación mostrada en la figura (despreciando el rozamiento)



En este tipo de leva, la ecuación del movimiento es:

$$y = e - e \cos \omega t$$

$$\dot{y} = e \omega \sin \omega t$$

$$\ddot{y} = e \omega^2 \cos \omega t$$

- Si  $\delta$  es la precompresión del resorte, del equilibrio del seguidor se obtiene:

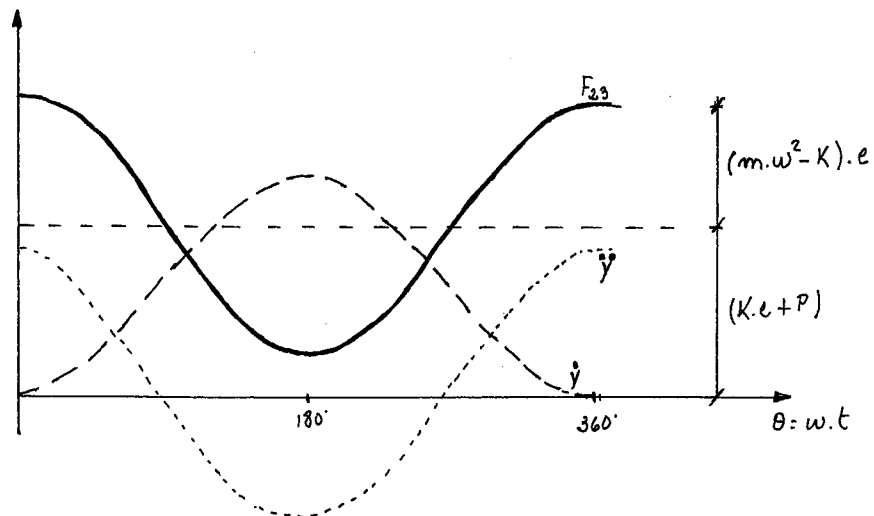
$$\sum F_v = 0 \Rightarrow F_{23} - K(\delta + y) - m\ddot{y} = 0$$

Sustituyendo los valores anteriores de  $y$  e  $\ddot{y}$ :

$$F_{23} = (K_e e + P) + (m\omega^2 - K) \cdot e \cdot \cos \omega t$$

siendo  $P = K \cdot \delta$  la fuerza del resorte debida a la precompresión. Esta ecuación muestra que la fuerza  $F_{23}$  consta, de un sumando de valor constante  $(K_e + P)$  y otro que varía cosenoidalmente, y además, con amplitud variable dependiendo de  $\omega^2$ .

Representando  $F_{23}$  gráficamente se observa:



El valor máximo de  $F_{23}$  se produce en  $\theta = 0^\circ$ .

El valor mínimo se produce en  $\theta = 180^\circ$ .

Pero estos valores máximos y mínimos dependen de  $\omega^2$ . En consecuencia, habrá una velocidad  $\omega$  en la cual  $F_{23}$  se hace cero, para  $\theta = 180^\circ$ . En este momento empiezan a aparecer despegues entre leva y seguidor, seguidos de impactos posteriores. (Se producen ruidos, vibraciones y posteriormente, si se mantiene mucho tiempo

esa velocidad, ~~la~~ otra mayor, rotura por fatiga).

- La velocidad a la que se produce la separación puede calcularse, haciendo  $F_{23} = 0$ , y  $\theta = 180^\circ$ .

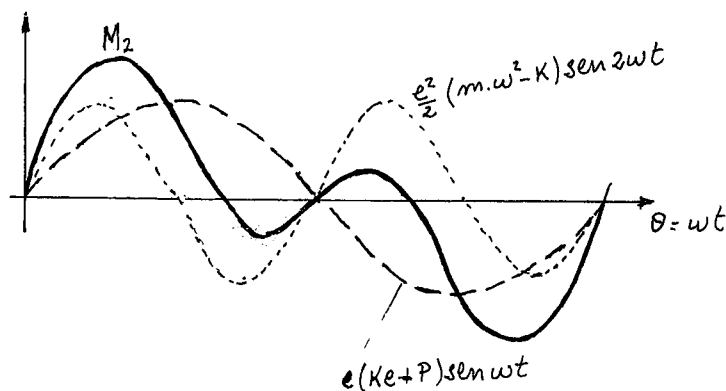
$$0 = (Ke + P) + (mw^2 - K)e \cdot (-1)$$

$$w = \sqrt{\frac{2Ke + P}{m \cdot e}}$$

Como se comprende fácilmente, la forma de aumentar este valor crítico puede ser aumentando  $K$  (resorte mas rígido), o, aumentando la precarga  $P$  (haciendo *que*  $\delta$  sea mayor), o disminuyendo la masa  $m$  del seguidor.

- Igualmente, también es fácil de ver que no ocurrirá el desprendimiento si se toma una precarga  $P > e(mw^2 - 2K)$ .
- Viendo el equilibrio de la leva se tiene:

$$\begin{aligned} M_2 &= F_{23} \cdot e \text{ sen } wt = \\ &= \left[ (K \cdot e + P) + (mw^2 - K) e \cos wt \right] \cdot e \text{ sen } wt = \\ &= e(Ke + P) \text{ sen } wt + \frac{e^2}{2}(mw^2 - K) \text{ sen } 2wt \end{aligned}$$



Como se vé,  $M_2$  tiene dos componentes: una de frecuencia doble de la otra, y ambas con variación senoidal.

Pero la primera tiene amplitud cte, mientras que la amplitud de la segunda varía con  $w^2$ .

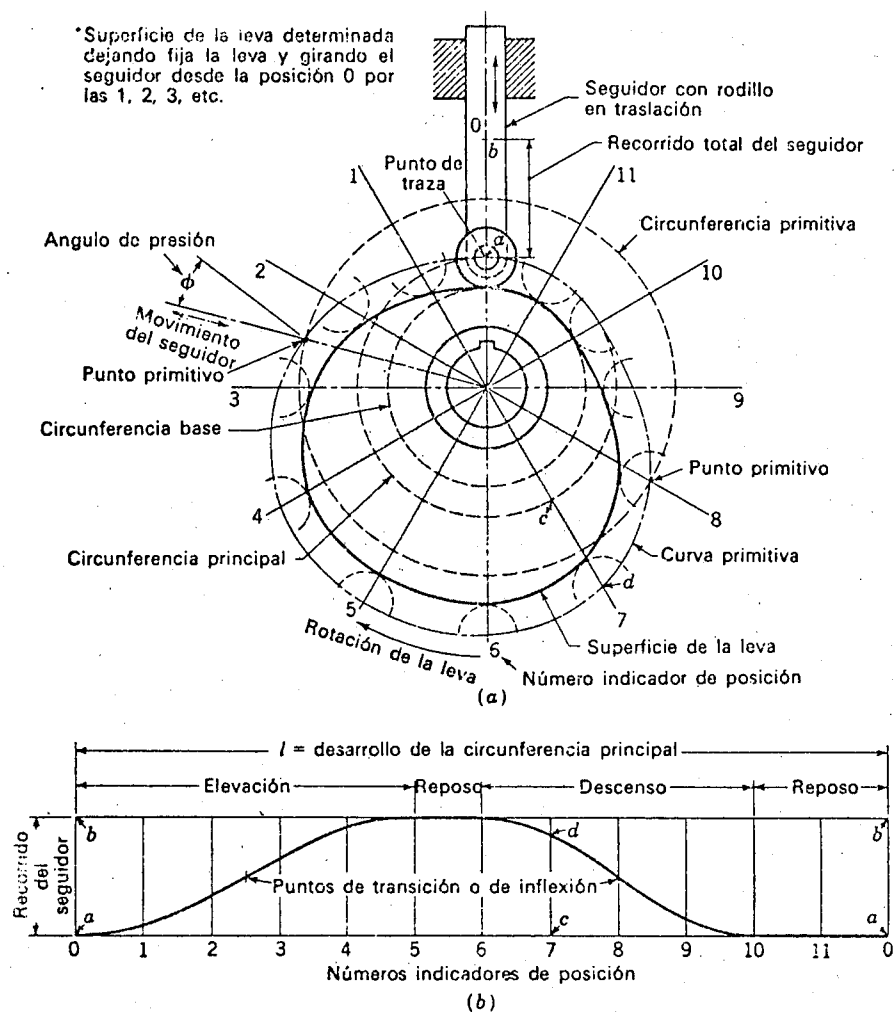
- Es fácil de observar como esta variación del par  $M_2$  es cíclica. En velocidad de régimen, el área por la parte superior es igual al área por la parte inferior.

(En algunos casos ello puede requerir el uso de volantes de inercia en los árboles de estas levas).

## 1.2 DISEÑO DE LEVAS. DEFINICIONES PREVIAS.-

- Antes de acometer los diferentes métodos de diseño cinemático de levas se precisa especificar algunos conceptos que van a ser empleados posteriormente.

Aunque algunos de ellos solo sean aplicables a la leva de rotación con seguidor de traslación, a la que, vamos a referirnos, la mayoría pueden hacerse extensivos a todos los demás casos.



- Superficie o perfil de la leva:  
Es, evidentemente, el contorno de ésta.
- Circunferencia base:  
Es la circunferencia de menor radio, con centro en el eje de la leva, tangente al perfil.
- Punto de traza:  
Es el punto teórico del seguidor en su posición 0.



Es el punto teórico del seguidor que tiene el movimiento deseado (corresponde al extremo de un teórico seguidor puntual).

- Curva primitiva:

Es la curva descrita sobre la leva por el punto de traza (puede coincidir, o no, con el perfil de la leva).

- Angulo de presión:

Es el ángulo formado por la dirección del movimiento del seguidor, en cada instante, con la normal a la curva primitiva en el punto de contacto.

(Este ángulo debe ser el menor posible, para conseguir buenas características de transmisión).

- Punto primitivo:

Es el punto de la curva primitiva donde se produce el máximo ángulo de presión.

- Circunferencia primitiva:

Es la que pasa por el punto primitivo, con centro en el centro de la leva.

- Circunferencia principal:

Es la menor circunferencia con centro en el eje de la leva, tangente a la curva primitiva.

- Diagrama de desplazamiento:

Es el que representa el movimiento del seguidor en función del movimiento de la leva.

## 2.- DISEÑO CINEMATICO DE LEVAS: CURVAS BASE.-

Lo que se desea lograr con una leva es transformar un movimiento de traslación (o rotación) conocido, en otro movimiento de traslación (o rotación) deseado.

Para ello se imprime a la leva el movimiento conocido, obteniéndose en la varilla el movimiento deseado.

- La base de partida para el diseño de una leva han de ser, por consiguiente, los diagramas cinemáticos del movimiento de la leva y de la varilla.

Estos diagramas cinemáticos pueden ser cualquiera de los tres que definen el movimiento, o sea, los diagramas de aceleraciones, velocidades o espacios. En cualquier caso hemos de disponer de los dos diagramas de desplazamientos, bien porque se conozcan directamente, bien por integración de los anteriores.

Los diagramas de espacios podrían quedar clasificados:

$$\text{- Movimiento de la leva: } \left\{ \begin{array}{l} s_1 = \varphi(t) \\ \alpha_1 = \varphi'(t) \end{array} \right.$$

$$\text{- Movimiento de la varilla: } \left\{ \begin{array}{l} s_v = f(t) \\ \alpha_v = f'(t) \end{array} \right.$$

Para hallar el perfil de la leva que con el movimiento dado produce en la varilla el movimiento pedido, hemos de hallar lo que llamaremos "curva base", que es aquella que representa los desplazamientos de la varilla en función de los desplazamientos de la leva.

- Analíticamente podría hallarse la ecuación de la curva base eliminando el tiempo  $t$  entre cualquiera dos de las ecuaciones anteriores, según el tipo de leva y seguidor que dispongamos, con lo que se pueden obtener las 4 tipos de curvas base, correspondientes a los 4 tipos de levas planas:

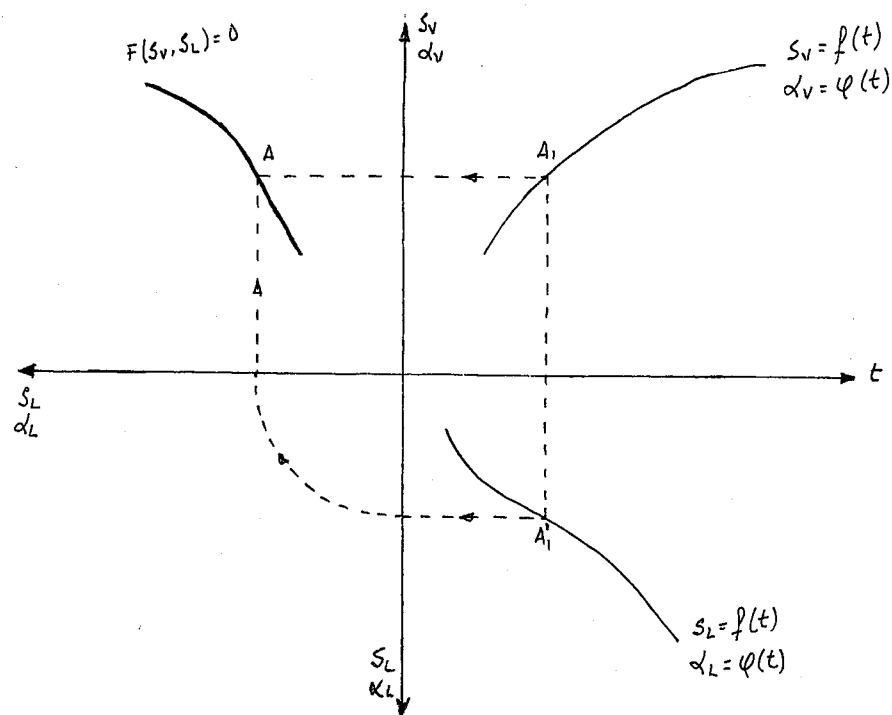
$$F(S_V, S_L) = 0 \text{ leva traslación-seguidor traslación}$$

$$F(S_V, \alpha_L) = 0 \text{ leva traslación - seguidor rotación}$$

$$F(\alpha_V, S_L) = 0 \text{ leva rotación - seguidor traslación}$$

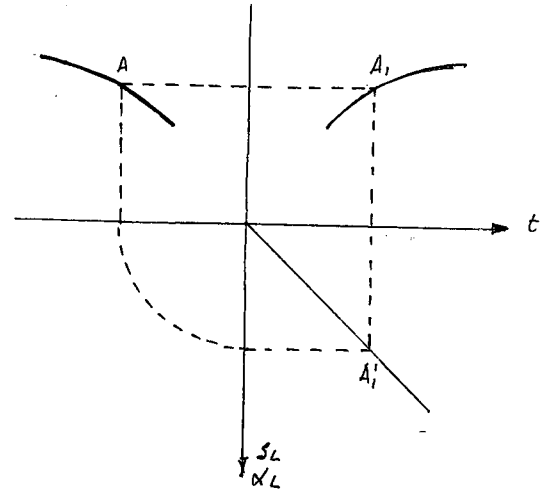
$$F(\alpha_V, \alpha_L) = 0 \text{ leva rotación - seguidor rotación}$$

- Para hallar gráficamente la curva base, dispondremos en el 1er y 4º cuadrantes los diagramas de movimiento de seguidor y leva, respectivamente (el eje de tiempos será común), y luego eliminaremos  $t$  como se vé en la fig. (abatiendo el eje  $\alpha_L$  o  $S_L$ , sobre él eje  $t$ )



En el caso de que la leva se mueva con velocidad constante, el diagrama de su movimiento será una línea recta, y por consiguiente, la curva base será idéntica, o semejante (según que -

la inclinación de la recta sea de  $45^\circ$ , lo cual a su vez depende de las escalas de  $t$  y  $S_L, \alpha_L$ ) al diagrama de desplazamiento del seguidor.



- Como es lógico, partiendo de la curva base pueden calcularse sus derivadas (si esta está expresada analíticamente, y es una función continua), las cuales tienen unos significados físicos precisos.

Así, concretándonos al caso de la leva de rotación con seguidor de traslación:

$$y = y(\theta)$$

$$y' = \frac{dy}{d\theta}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{d\theta^2}$$

$y'$  da idea de la pendiente de la curva base, y ello está íntimamente relacionado, como veremos en su momento, con el ángulo de presión. En el trazado de levas, este valor ha de ser limitado.

$y''$  está relacionada con el radio de curvatura de la leva. En el diseño de levas, este valor también ha de ser controlado, para evitar que ésta se haga puntiaguda, en algún punto.

- Las relaciones entre estas derivadas y los valores de la velocidad y aceleración del seguidor son inmediatas

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = y' \cdot w_L$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'' \cdot w_L^2 + y' \cdot \alpha_L$$

Si  $w_L = \text{cte}$  ;

$$\dot{y} = y' \cdot w_L$$

$$\ddot{y} = y'' \cdot w_L^2$$

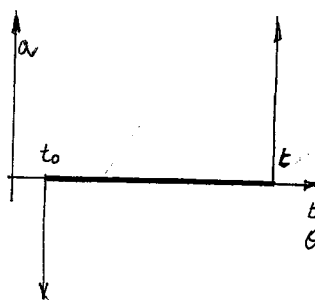
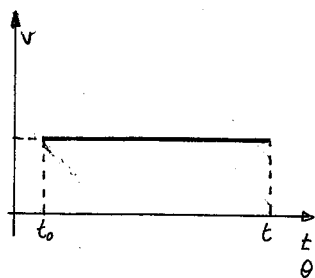
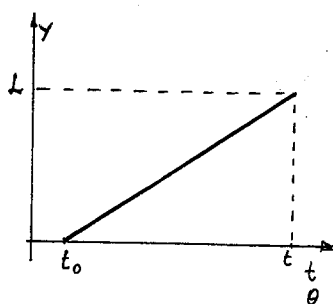
De estas relaciones se desprende que las derivadas de la curva base  $y'$  e  $y''$  representan, a otra escala (determinada por los valores constantes  $w_L$  y  $w_L^2$ ), la velocidad y aceleración, respectivamente, del seguidor.

### 3.- CURVAS BASE MAS USUALES.-

- En el proyecto de levas raramente se encuentra definida, la curva base por una función del tipo  $y = y(\theta)$  (u otra cualquiera).

En general el proyectista lo que pretende es que el seguidor ocupe, en instantes determinados, posiciones concretas. El movimiento del seguidor, entre cada dos de esas posiciones, es un aspecto a definir y que normalmente va ligado a las condiciones de funcionamiento del mecanismo, y, principalmente, a su velocidad.

- Refiriéndonos de nuevo a la leva de rotación con seguidor de traslación, supongamos que el movimiento del seguidor, entre  $t = t_0$  y  $t = t$ , donde ha de ocupar las posiciones  $y = 0$  y  $y = L$ , se pretende que sea uniforme ( $v = cte$ ).



- En este caso el diagrama de desplazamiento será una línea recta, de cierta pendiente.
- El diagrama de velocidad será una línea horizontal de  $V = cte$ , en el intervalo establecido.
- El diagrama de aceleración será nulo, excepto en  $t_0$  y  $t$ , donde adquirirá valores infinitos, por pequeña que sea la velocidad  $V$ .

- Si el movimiento de la leva es uniforme ( $w_L = \text{cte}$ ), puede tomarse, como eje de *abcisas*, indistintamente,  $t$  o  $\theta$ , *sin* mas que tener en cuenta el factor de escala.

Pues bien, precisamente ese salto infinito en el valor de la aceleración es el que impide el trazado de una leva que haya de llevar al seguidor de  $y = 0$  a  $y = L$ , en los tiempos  $t = t_0$  a  $t = t$ , por medio de una velocidad constante. En efecto, el producto de la masa del seguidor, por la aceleración del mismo será la fuerza de inercia que actuará sobre este, la cual, según esto, alcanzará valores infinitos.

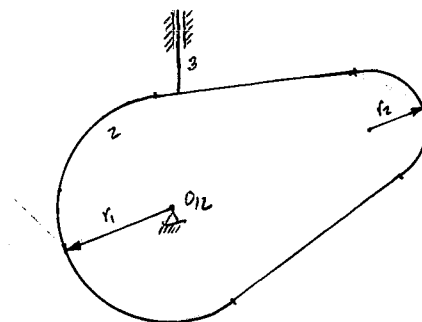
Ello provocará enormes tensiones en el contacto leva-seguidor, así como desprendimientos y choques de este contra la leva, (en la carrera de descenso).

- En resumen, en el trazado de curvas base, la unión entre dos puntos podrá hacerse con muchos tipos de curvas, pero siempre teniendo presentes los valores resultantes de la aceleración, y aún de la sobreaceleración primera. A veces, para levas de baja velocidad pueden admitirse variaciones bruscas en la velocidad del seguidor, pero en levas de alta velocidad ello sería de todo punto inadmisibile.

Desde luego, no hay una regla concreta para determinar cuando una leva es de alta o baja velocidad, y por tanto, cuando hay que poner en consideración, a la hora de su trazado, el tipo de curva a emplear para unir dos puntos. (Además -- de que el valor de la fuerza de inercia no solo depende de la aceleración, sino también de la masa del seguidor, de -- la rigidez del resorte, etc, etc).

Por otro lado, también hay que tener presente, muchas veces consideraciones de tipo constructivo. Es evidente que una leva construida a base de tramos rectos y circulares esta -

al alcance de cualquier pequeño taller, (Como es el caso de la leva de la fig), y no así otras levas de perfiles más complicadas, tales como el cicloidal y otros.



- En la práctica, los tramos de curvas base que han de unir -- dos puntos dados se efectúan en base a curvas del tipo:
  - a.- Curva parabólica
  - b.- Curva armónica
  - c.- Curva cicloidal
  - d.- Curvas polinomiales

A continuación vamos a efectuar un rápido estudio de estos tipos de curvas, analizando sus derivadas, tanto en forma gráfica como analítica.

a.- Curva parabólica:

Tiene por ecuación:

$$y = c_1 \theta^2 + c_2 \theta + c_3$$

$$y' = 2c_1 \theta + c_2$$

$$y'' = 2c_1$$

- Gráficamente, puede trazarse del modo siguiente:

Datos:

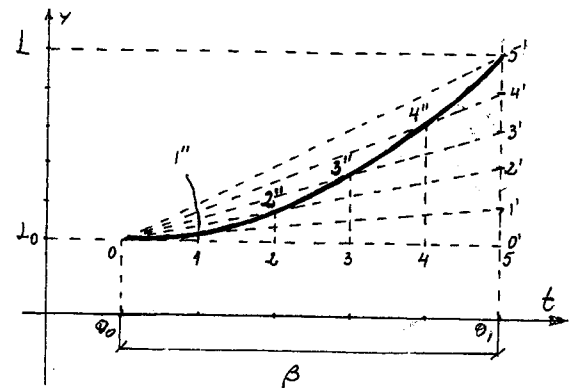
$$\text{Intervalo de tiempo } (t_0 - t_1), (\theta_0 - \theta_1) = \beta$$

$$\text{Movimiento del seguidor } \omega_0 - L$$



Solución:

- 1º.- Se divide  $(\theta_1 - \theta_0)$  en un número arbitrario de partes iguales
- 2º.- Se divide  $L_0 - L$  en el mismo número de partes iguales
- 3º.- Se trazan desde 0 los radios  $01'$ ,  $02'$ ,  $03'$ ,  $04'$ .



- 4º.- Se levantan por 1, 2, 3, y 4 las verticales  $11''$ ,  $22''$ , ..., hasta que corten a los radios respectivos, obteniéndose así los puntos  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ,  $4''$ , ..., es decir, la rama de la parábola.

Analíticamente, el mismo trazo de parábola anterior, dibujado gráficamente, quedaría definido por

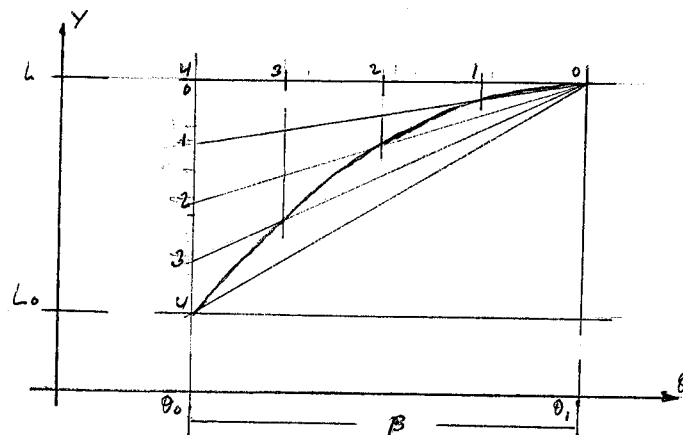
$$\begin{array}{l} \theta = \theta_0 = 0 \longrightarrow y = 0 ; y' = 0 \\ \theta = \beta \longrightarrow y = L \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$y = L \cdot \frac{\theta^2}{\beta^2} \quad ; \quad L = c_1 \cdot \theta_1^2 \Rightarrow c_1 = \frac{L}{\theta_1^2}$$

$$y' = 2L \cdot \frac{\theta}{\beta^2}$$

$$y'' = \frac{2L}{\beta^2}$$

- Si se quisiera dibujar un tramo de concavidad opuesta, se procedería como se vé en la fig. en forma similar a la de antes:



Análíticamente, tendríamos:

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \rightarrow y = 0 \quad ; \\ \theta = \beta \rightarrow Y = L \quad ; y' = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c_3 = 0 \\ L = c_1 \beta^2 + c_2 \beta \\ 0 = 2c_1 \beta + c_2 \end{array} \quad (1)$$

de las ecuaciones(I) se obtiene:

$$c_1 = -\frac{L}{\beta^2} \quad ; \quad c_2 = \frac{2L}{\beta}$$

Con lo que la ecuación es:

$$y = -\frac{L}{\beta^2} \cdot \theta^2 + \frac{2L}{\beta} \cdot \theta$$

$$y' = -\frac{2L}{\beta^2} \theta + \frac{2L}{\beta}$$

#### b.- Curva armónica:

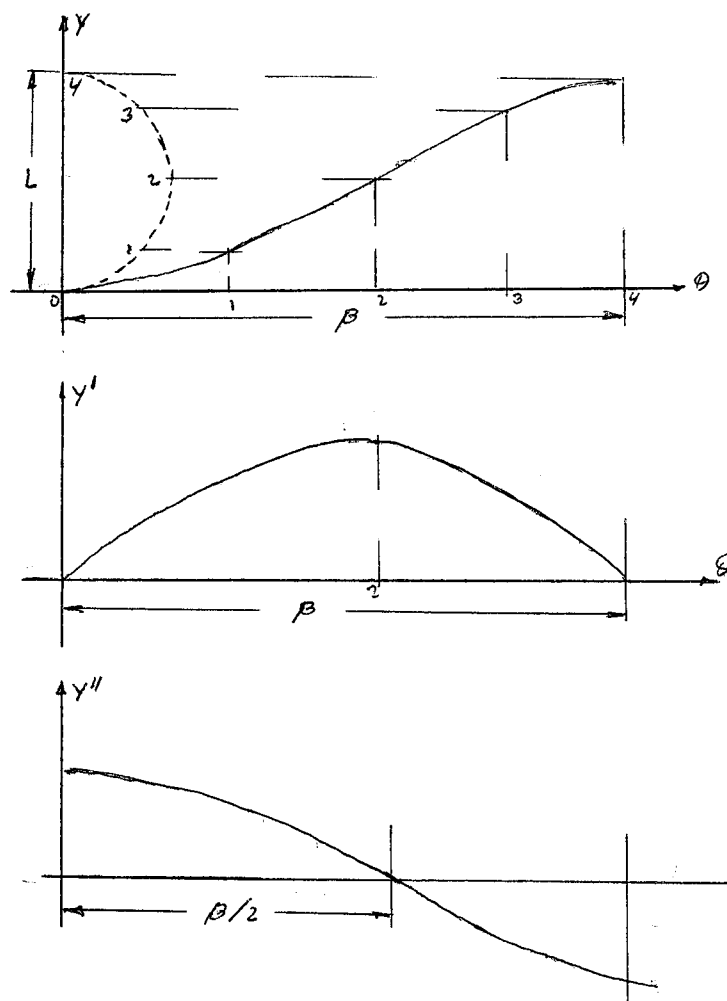
- Para una subida del seguidor L y un giro de la leva  $\beta$ , la ecuación de este movimiento vale:

$$y = \frac{L}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi \theta}{\beta} \right)$$

$$y' = \frac{\pi \cdot L}{2\beta} \operatorname{sen} \frac{\pi \theta}{\beta}$$

$$y'' = \frac{\pi^2 \cdot L}{2\beta^2} \cos \frac{\pi \theta}{\beta}$$

- Gráficamente se traza partiendo de un semicírculo de diámetro L. Este semicírculo y la abscisa  $\beta$  se dividen en el mismo número de partes iguales, procediendo como se vé en la figura.



- Igual que se ha trazado el diagrama para una subida completa puede trazarse el diagrama de bajada completa, o el de media subida y media bajada.

Todas estas posibilidades quedan reflejadas en la tabla siguiente:

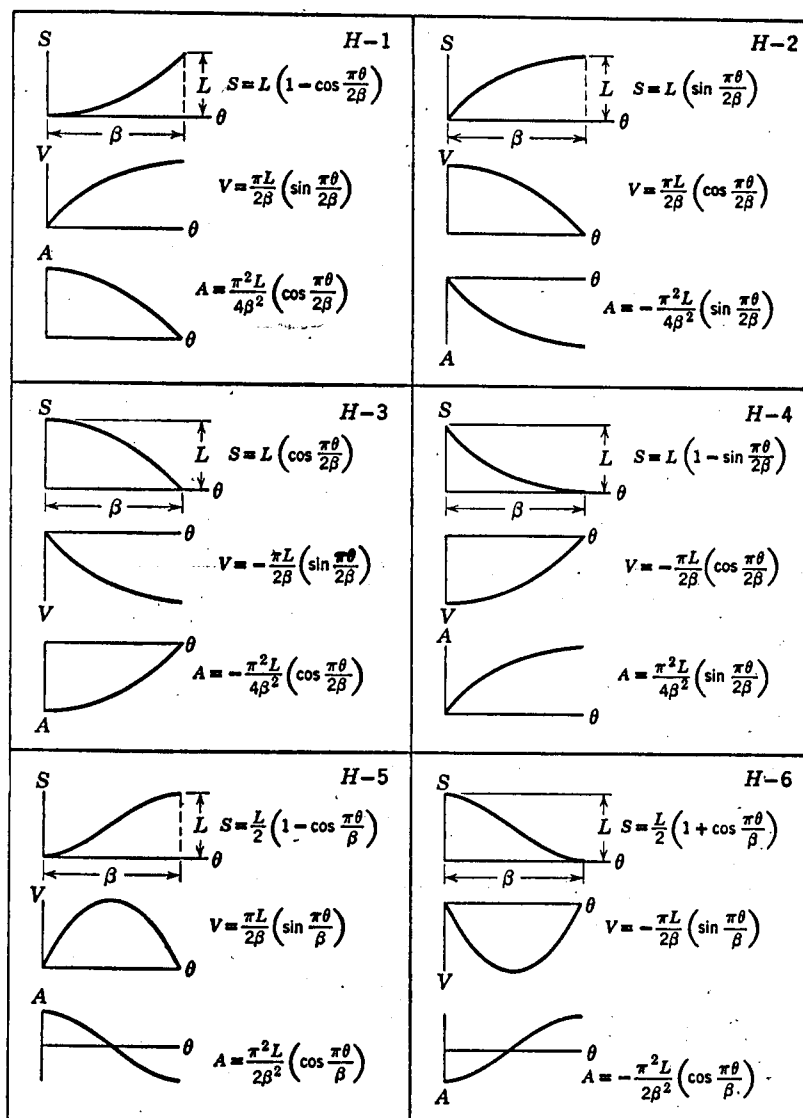


Figura 3.14 Características de movimiento armónico.  $S$  = desplazamiento, pulgadas;  $V$  = velocidad, pulgadas por grado;  $A$  = aceleración, pulgadas por grado<sup>2</sup>. (De M. Kloomok y R. V. Muffley, "Plate Can Design-with Emphasis on Dynamic Effects" *Prod. Eng.* febrero, 1955.)

c.- Curva base cicloidal:

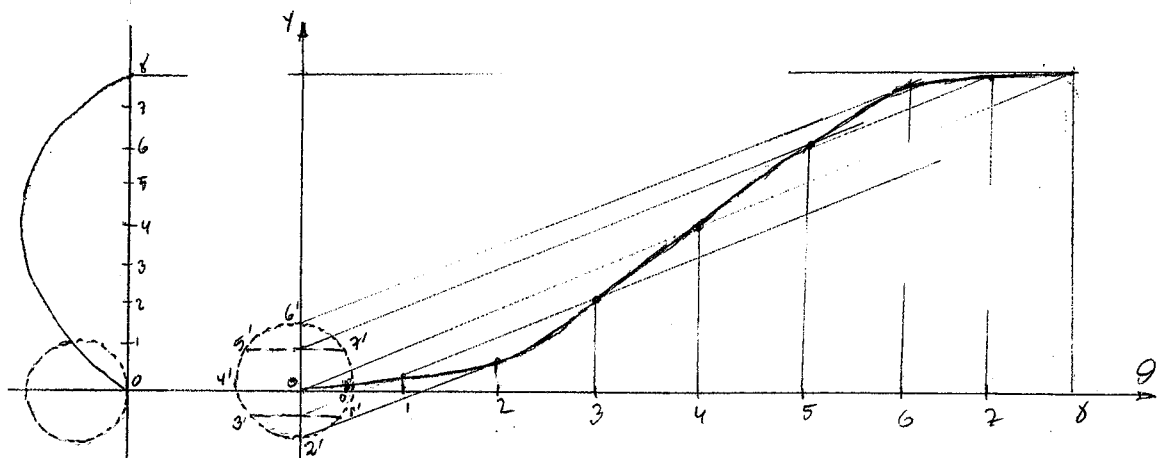
- Para una subida del seguidor  $L$ , y un giro de la leva,  $\beta$ , la ecuación de este movimiento vale:

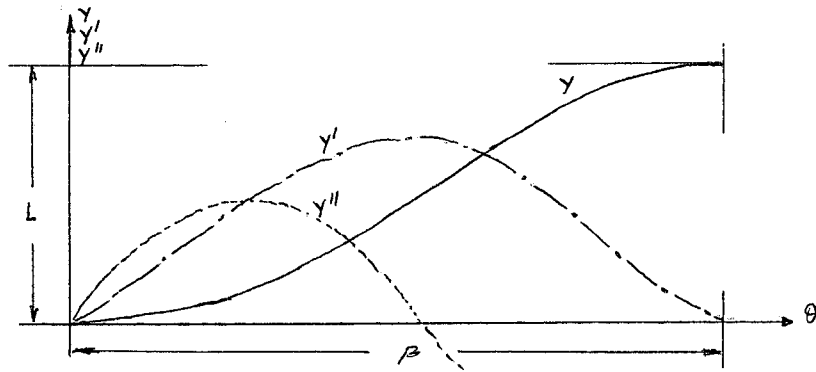
$$y = L \left( \frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$$

$$y' = \frac{L}{\beta} \left( 1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$$

$$y'' = \frac{2\pi L}{\beta^2} \sin \frac{2\pi\theta}{\beta}$$

- Gráficamente puede hallarse como muestra la fig.,
  - 1º.- Un círculo de radio  $L/2K$  efectuará una revolución al pasar de 0 a L. Un punto de él (el que coincide con el origen de coordenadas) describirá la cicloide -- que se vé en la figura.
  - 2º.- Se divide  $\beta$  en un número arbitrario de partes iguales, y lo mismo la cicloide.
  - 3º.- Por una construcción similar a la del movimiento armónico, se hallan los puntos de la curva cicloidalas.
- También puede hallarse, en fôrma mas simple, del modo siguiente:
  - 1º.- Con centro en el origen se traza el círculo de radio  $L/2K$ .
  - 2º.- Se divide el círculo en el mismo número de partes iguales en que se dividió  $\beta$ , poniendo el cero en el eje horizontal, y numerándolas como se vé en la figura.
  - 3º.- Las divisiones sobre la circunferencia se proyectan todas en su diámetro vertical
  - 4º.- Las marcas en el diámetro vertical se proyectan en líneas paralelas a OA, hasta la línea correspondiente del eje  $\theta$ .





- Igual que se ha trazado este diagrama para una subida completa podrian trazarse el de bajada completa, o el de media subida, y media bajada. Todos ellos quedan reflejados en la -- tabla adjunta:

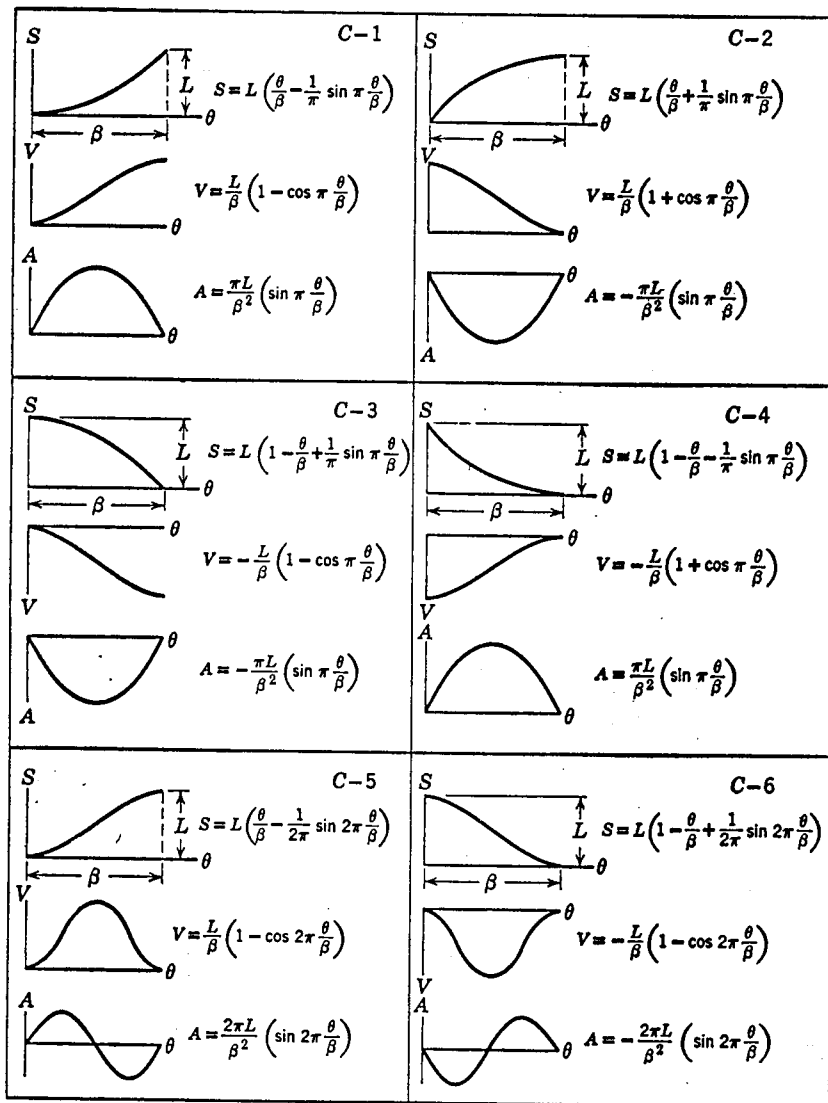


Figura 3.13 Características del movimiento cicloide. S = desplazamiento, pulgadas, V= velocidad, pulgadas por grado; A = aceleración, pulgadas por grado<sup>2</sup>. (De M. Kloomok y R. V. Muffley, "Plate Cam Design-with Emphasis on Cam Effects", *Prod. Eng.*, febrero, 1955.)

d.- Curva base polinomial:

- Son las que tienen por ecuación:

$$y = c_0 + c_1\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + c_2\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + c_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + \dots \quad (I)$$

donde  $\beta$  es el ángulo de giro de la leva (por consiguiente,  $\left(\frac{\theta}{\beta}\right)$  varía entre 0 y 1).

Las constantes  $c_0, c_1, c_2, c_4 \dots$  se calculan en función de las condiciones en la frontera.

- Por ejemplo, si las condiciones en la frontera fueran:

$$\begin{array}{l} \theta = 0 \\ \theta = \beta \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y = 0 ; y' = 0 ; y'' = 0 \\ y = L ; y' = 0 ; y'' = 0 \end{array} \right.$$

Al haber 6 condiciones, escribiríamos (I) con 6 constantes:

$$y = c_0 + c_1\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + c_2\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + c_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + c_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 + c_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5$$

$$y' = \frac{1}{\beta} \left[ c_1 + 2c_2\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 3c_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 4c_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + 5c_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 \right]$$

$$y'' = \frac{1}{\beta^2} \left[ 2c_2 + 6c_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 12c_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 20c_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 \right]$$

Al sustituir las condiciones frontera obtendríamos las 6 -- ecuaciones siguientes:

$$0 = c_0$$

$$L = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$$

$$0 = c_1$$

$$0 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5$$

$$0 = 2c_2$$

$$0 = 2c_2 + 6c_3 + 12c_4 + 20c_5$$

Resolviéndolo se obtiene:

$$c_0 = 0 \quad ; \quad c_1 = 0 \quad ; \quad c_2 = 0$$

$$c_3 = 10L \quad ; \quad c_4 = -15L \quad ; \quad c_5 = 6L$$

Sustituyendo en (I) se obtiene:

$$y = L \left[ 10 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^3 - 15 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^4 + 6 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^5 \right]$$

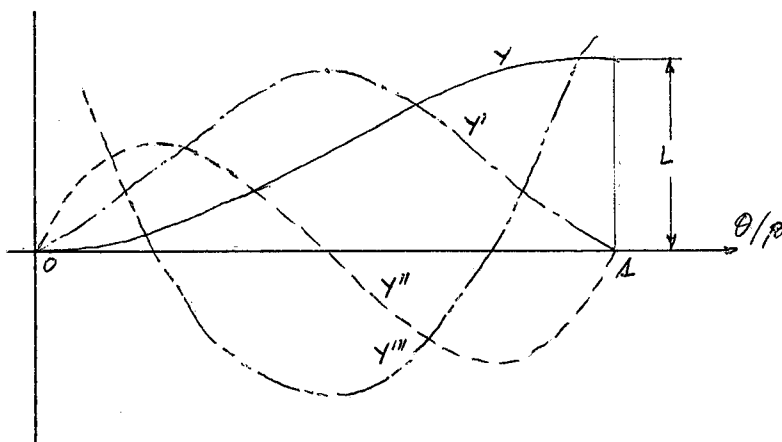
que reciben el nombre de polinomial 3-4-5.

Sus derivadas son:

$$y' = \frac{L}{\beta} \left[ 30 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 60 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^3 + 30 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right]$$

$$y'' = \frac{L}{\beta^2} \left[ 60 \left( \frac{\theta}{\beta} \right) - 180 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 120 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right]$$

Las gráficas son las siguientes:



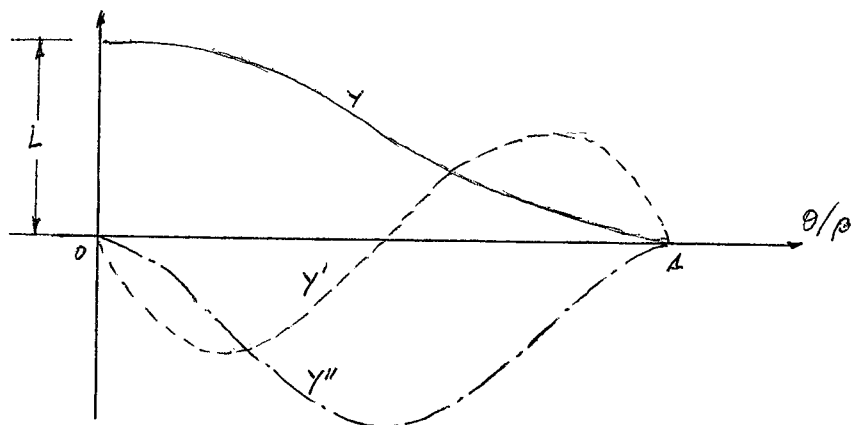
- La misma polinomial 3-4-5, pero de retorno completo, sería:

$$y = L \left[ 1 - 10 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^3 + 15 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 6 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right]$$

$$y' = - \frac{L}{\beta} \left[ 30 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 60 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^3 + 30 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right]$$

$$y'' = - \frac{L}{\beta^2} \left[ 60 \left( \frac{\theta}{\beta} \right) - 180 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 120 \left( \frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right]$$





En la tabla anexa se muestran algunas otras curvas polinomiales.

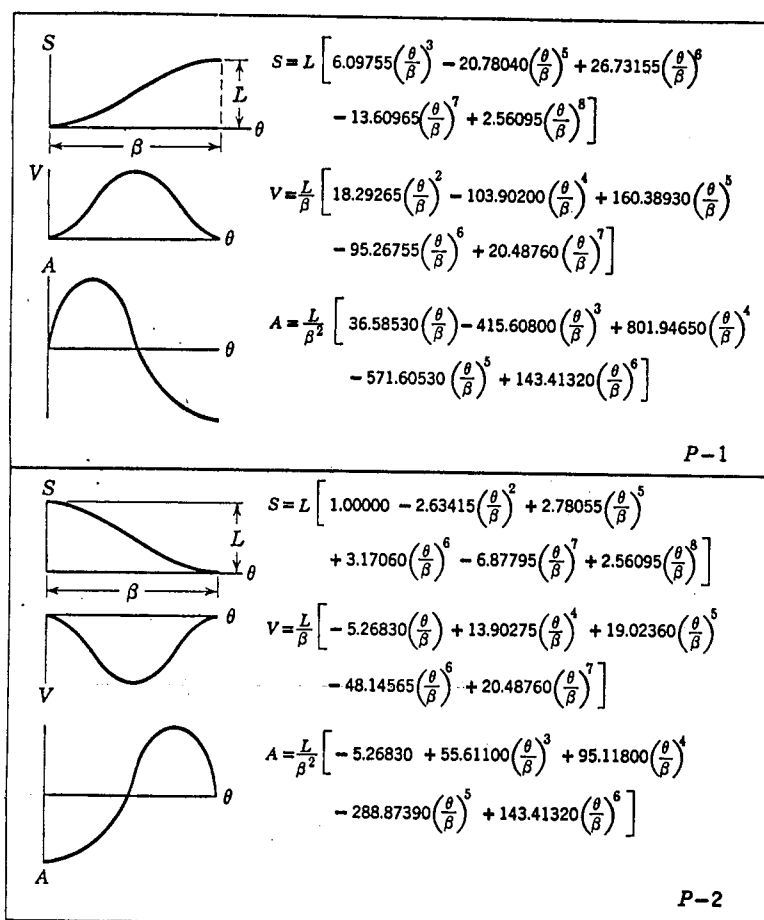
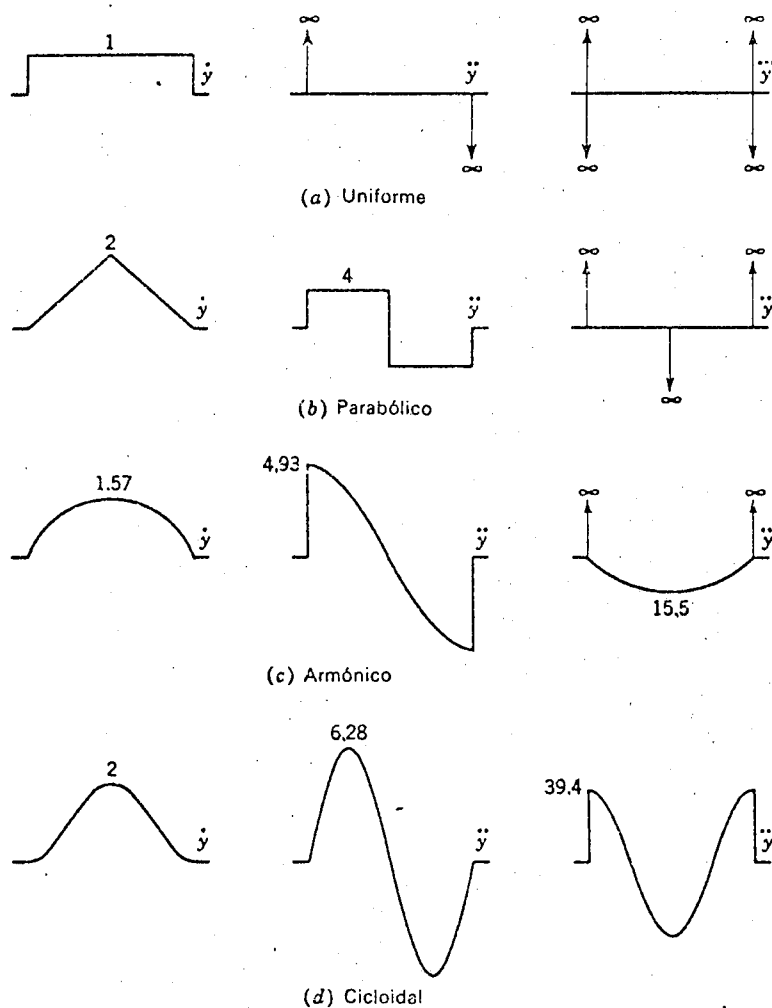


Figura 3.15 Características del movimiento de polinomio de octavo grado. S=desplazamiento, pulgadas; V=velocidad, pulgadas por grado; A=aceleración, pulgadas por grado<sup>2</sup>. (De M. Klopmok y R. V. Muffley, "Plate Cam Design-with Emphasis on Dynamic Effects," *Prod. Eng.*, febrero, 1955.)

#### 4.- COMPARACIÓN ENTRE LAS DIFERENTES CURVAS BASE.-

- Dada la importancia que en las levas de alta velocidad pueden adquirir los valores de las fuerzas de inercia (un cambio brusco en la aceleración primera, por ejemplo, equivale a la aplicación de una fuerza en forma de función escalon, con todo lo que ello implica), es muy importante tener una idea comparativa de los valores de la velocidad, aceleración y sobreaceleración producidos por las distintas curvas base, para así poder escoger la más adecuada.



La figura muestra los valores relativos de  $y'$ ,  $y''$  e  $y'''$ , referidos a  $y' = 1$  en el movimiento uniforme.

En todos ellos, además:  $\beta = L = y' = 1$ .

Como se observa fácilmente, el movimiento uniforme, sin extremos suavizados, está prácticamente descartado, por ser  $y''$  e  $y'''$  infinitas.

Así mismo, un movimiento parabólico, de subida completa, con el primer tramo con velocidad creciente y el segundo decreciente, también debe descartarse debido al salto brusco de la aceleración, que produce una  $y'''$  infinita.

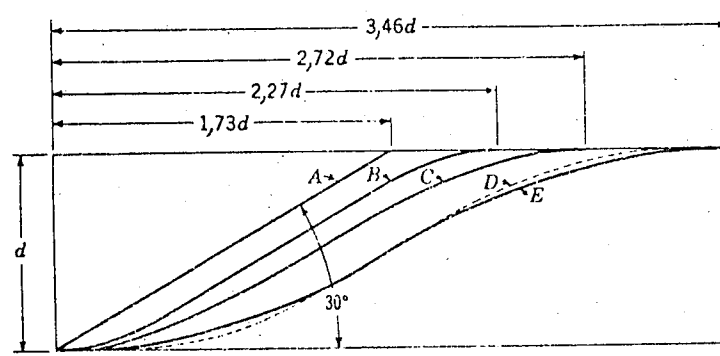
El movimiento armónico produce las menores velocidades y aceleraciones, pero tiene un salto infinito en la sobreaceleración.

Finalmente, el movimiento cicloidal, aún cuando produce mayores aceleraciones, sin embargo la sobreaceleración primera - tiene valores finitos, por lo que de los 4 movimientos presentados, parece el más apto para levas de gran velocidad.

- Otro aspecto que debe ser comparado se refiere al valor obtenido para el ángulo de presión, en cada caso.

Así, para levas con la misma circunferencia base, el ángulo de presión dependerá del tipo de curva base.

En la figura se muestra una comparación entre los diferentes perfiles, para conseguir en todos ellos un ángulo de presión máximo de  $30^\circ$ .



A = Movimiento uniforme

B = Movimiento uniforme modificado

C = Movimiento cicloidal

D = Movimiento parabólico

(Para una misma subida  $d$ , y un mantenimiento constante de los  $30^\circ$  de presión, los arcos de circunferencia primitiva necesarios para ello son diferentes).

### 5.- TRAZADO DE CURVAS BASE COMPLEJAS.-

- Definidos así los diferentes tramos de curvas base, para unir dos puntos (definidos por la elevación  $L$  y el ángulo  $\beta$ ), queda ahora exponer una serie de consideraciones sobre el trazado completo de las curvas base, uniendo entre si varios de estos tramos.

En general, el problema que se plantea es el determinar la curva base mas apropiada para cada tramo, así como los valores de  $L_i$  y  $\beta_i$  específicos de cada uno, para que se cumplan las siguientes condiciones:

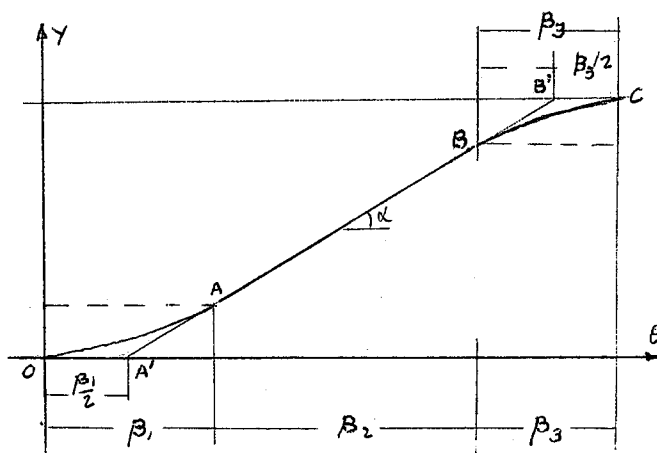
- 1ª.- Que se satisfagan las necesidades de movimiento.
- 2ª.- Que los diagramas de desplazamiento, velocidad y aceleración sean continuos, a través de las fronteras de los segmentos.
- 3ª.- Las magnitudes máximas de los picos de velocidad y aceleración deberán mantenerse tan bajos como sea posible.

En todo este contexto se debe recordar:

- a.- La cicloide produce aceleración nula en ambos extremos: en consecuencia se puede acoplar a reposos, en ambos extremos.
- b.- La curva armónica proporciona la mas baja aceleración pico y el mas pequeño ángulo de presión (pendiente  $y'$ ). En consecuencia resulta muy útil cuando se puede igualar la aceleración al inicio y al final de los tramos adyacentes.
- c.- Algunas polinomiales tienen curvas de aceleración no simétricas, y ello las hace útiles en muchos casos.

- Entrando ya en la unión de diferentes tramos, es interesante analizar el trazado de tramos rectos, en los casos en que haya de unirse a otros tramos curvos:

El caso mas general corresponde a la unión de una retención con un tramo recto e inclinado (velocidad constante y aceleración nula). Suponiendo que la inclinación de la recta es conocida, el problema estriba en definir el intervalo de la transición ( $\beta$  o  $L$ ), o mejor, la intersección curva-recta, ya que el tramo de curva base a emplear puede elegirse entre varias opciones: movimiento parabólico, cicloidal de medio tramo (c-1), etc. (En general, en estos casos suele recurrirse al movimiento parabólico). En las figuras se muestran los dos casos que pueden presentarse, correspondientes a una especificación del intervalo angular de transición, o del intervalo de desplazamiento del seguidor de transición.



Datos:  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_3$

Incognita: tramo OA y BC

Solución:

- 1º con centro en A' se traza  $\beta_1/2$  y se obtiene O.
- 2º entre O y A, como se ve en la fig, se traza un arco de parábola (gráfica o analíticamente)
- 3º lo mismo se hace con  $\beta_3$  (tramo de parábola invertido).

Datos:  $\alpha$ ,  $L_1$ ,  $L_3$

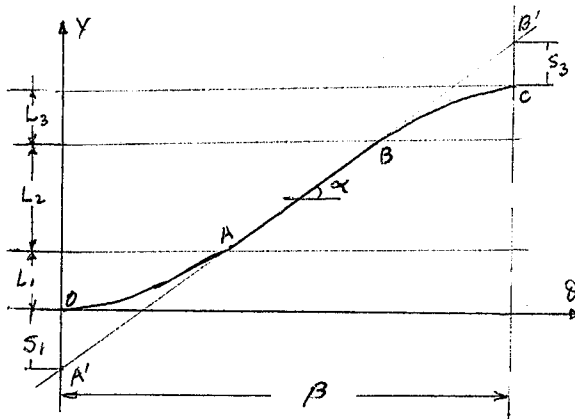
Incógnita: tramo OA y BC

Solución:

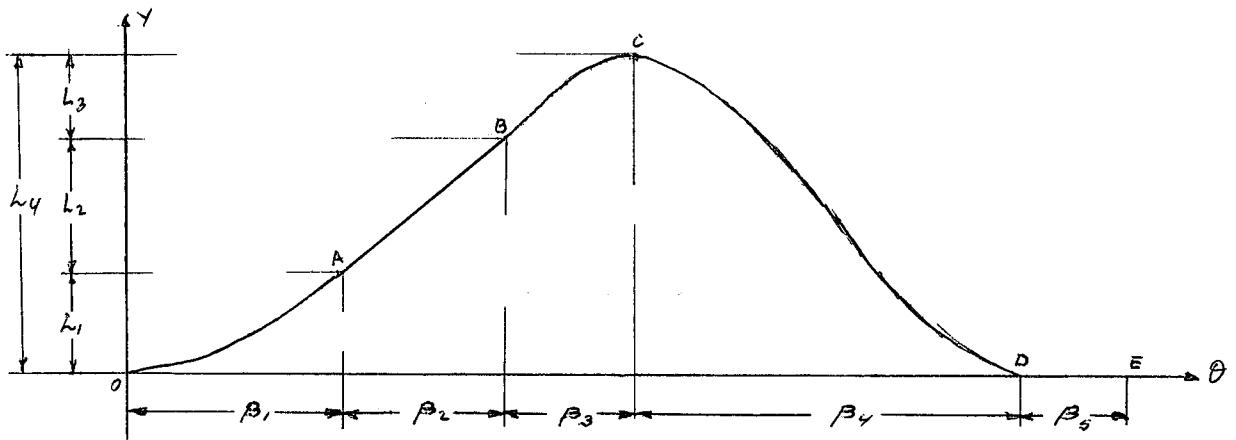
1º a partir de A', y se eleva  $L_1$  y se obtiene O.

2º entre O y A se traza un arco de parábola (gráfica o analíticamente)

3º lo mismo se hace con  $L_3$ . (Tramo de parábola invertido).



- En el caso de trazado de una curva base compleja, como la mostrada en la fig, el procedimiento a seguir sería:



1º.- Especificar todos los datos:

- velocidad ( $w_L$ ) de la leva
- velocidad del seguidor en el tramo recto
- altura máxima del seguidor ( $L_4$ )
- tiempo (o ángulo  $\beta_5$ ) de la parada del seguidor (DE)
- tiempo (o tramo  $\beta_2$ ) de mantenimiento de la velocidad constante de subida.
- Etc, etc.

2º.- Traducir todos los datos a ángulos  $\beta$  y longitudes  $L$ .

- Por ejemplo, si  $V_{AB} = 200$  cm/s, y  $w_L = 100$  rd/s,

$$y' = \frac{\dot{y}}{w_L} = \frac{200 \text{ cm/s}}{100 \text{ rd/s}} = 2 \text{ cm/rd.}$$

- Si la subida con velocidad  $V_{(AB)}$  se mantiene durante **3** cm, corresponde a una rotación de la leva de:

$$y' = \frac{L_2}{\beta_2} \Rightarrow \beta_2 = \frac{L_2}{y'} = \frac{3}{2} \text{ rd} = 86 \text{ grados}$$

- Si la leva se ha de mantener en reposo por 2 seg (tramo D DE) corresponde a una rotación

$$\beta_5 = 2 \text{ seg} \cdot 100 \frac{\text{rd}}{\text{s}} = 200 \text{ rd} = 114 \text{ grados}$$

- 3º.- Con todos los datos anteriores se hace un primer esquema de la curva base.
- 4º.- A continuación se comparan los diferentes tramos de esta curva base con los tramos standard ya conocidos, y se seleccionan los mas adecuados (o lo que es igual, se seleccionan un conjunto de ecuaciones correspondiente cada una a un tramo).
- Por ejemplo, el tramo DA puede resolverse con una curva parabólica, o con una cicloidal(C-1). Supongamos que se escoje esta última:

$$y = L_1 \left( \frac{\theta}{\beta_1} \right) - \frac{1}{\pi} \text{ sen } \frac{\pi \theta}{\beta_1}$$

$$y' = \frac{L_1}{\beta_1} \left( 1 - \cos \frac{\pi \theta}{\beta_1} \right)$$

- Para el tramo BC puede tomarse la curva armónica (H-2)

$$y = L_3 \text{ sen } \frac{\pi \theta}{\beta_3}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{\pi L_3}{2 \cdot \beta_3} \cos \frac{\pi \theta}{\beta_3}$$



$$y'' = - \frac{\pi^2 L_3}{4 \beta_3^2} \operatorname{sen} \frac{\pi \theta}{\beta_3}$$

- Para el tramo CD puede elegirse una curva polinomial  
2-5-6-18(P-2)

$$y = L_4 \left[ 1 - 2,63415 \left( \frac{\theta}{\beta_4} \right)^2 + 2,78055 \left( \frac{\theta}{\beta_4} \right)^5 + \right. \\ \left. + 3,1706 \left( \frac{\theta}{\beta_5} \right)^6 - 6,87795 \left( \frac{\theta}{\beta_5} \right)^7 + 2,56095 \left( \frac{\theta}{\beta_5} \right)^8 \right]$$

$$y' = \dots\dots\dots$$

$$y'' = \dots\dots\dots$$

5º.- Se hallan los parámetros desconocidos de las ecuaciones del movimiento, tales como(en el ejemplo que vamos siguiendo)

$$L_1, L_3, \beta_1, \beta_3, \beta_4$$

Para ello se igualan los valores de las curvas "derivada" en cada frontera.

- Por ejemplo, en el punto A:

y en la rama OA

$$\theta = \beta_1 \quad y' = \frac{L_1}{\beta_1} \left( 1 - \cos \frac{\pi \theta}{\beta_1} \right)$$

$$y'_A = \frac{L_1}{\beta_1} (1 - \cos \pi) = \frac{2L_1}{\beta_1}$$

En la recta AB

$$y \text{ en el punto A: } y'_A = \frac{L_2}{\beta_2}$$

Iguualando ambas:

$$\frac{2L_1}{\beta_1} = \frac{L_2}{\beta_2} \Rightarrow \frac{2L_1}{\beta_1} = \frac{3}{2} \Rightarrow L_1 = \frac{3}{4} \beta_1 \quad (1)$$

- En el punto B

$$\text{rama BC} \rightarrow y' = \frac{\kappa L_3}{2 \beta_3} \cos \frac{\kappa \vartheta}{\beta_3}$$

$$\text{en el punto B, } \vartheta = 0 \rightarrow y' = \frac{\kappa L_3}{2 \beta_3}$$

$$\text{rama AB ; } y' = \frac{L_2}{\beta_2}$$

$$\text{en el punto B} \rightarrow y' = \frac{L_2}{\beta_2}$$

Iguualando ambas:

$$\frac{L_2}{\beta_2} = \frac{3}{2} = \frac{\kappa L_3}{2 \beta_3} \Rightarrow L_3 = \frac{3}{\kappa} \beta_3 \quad (2)$$

- Lo mismo se haría en el punto C y en el D.

Así obtendremos una serie de ecuaciones que ligan los diferentes parámetros desconocidos.

- Las dos últimas ecuaciones que pueden escribirse derivadas de consideraciones geométricas serían:

$$L_1 + L_2 + L_3 = L_4$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 2\kappa \text{ rd.}$$

- Resolviendo el sistema de ecuaciones obtendríamos todos los valores  $L, L_3, \beta_1, \beta_3, \beta_4$

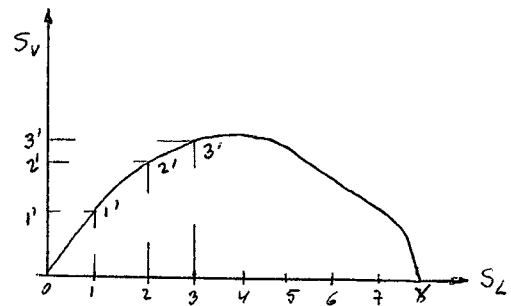
6-1.- TRAZADO DE LA LEVA DE TRASLACION CON SEGUIDOR DE TRASLACION.-

a) Movimiento de la leva y de la varilla perpendiculares.-

Dato: Curva base  $F(s_V, s_L) = 0$

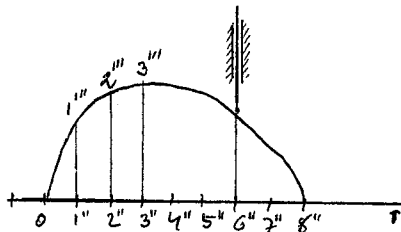
Incog: Perfil de la leva

Solución:



1º.- Se divide  $s_L$  en un número arbitrario de partes iguales. Así se obtiene -- también una división de  $s_V$ .

2º.- Se toman sobre una recta cualquiera "r" segmentos iguales a los obtenidos en la división  $s_L$ ; se obtienen  $1'', 2'', 3'', \dots$



3º.- A partir de los puntos anteriores se llevan segmentos iguales a  $1'', 2'', \dots$ , obteniéndose los puntos  $1''', 2''', \dots$ , que son los del perfil de la leva. (Observese que es exactamente igual a la curva base).

b) Movimiento de la leva y de la varilla no perpendiculares.-

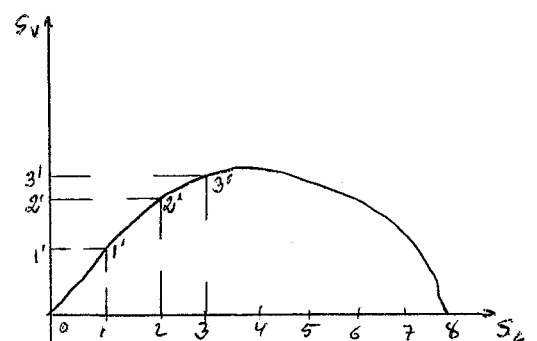
Dato: curva base  $F(s_V, s_L) = 0$

Incog: perfil de la leva

Solución:

1º.- Se divide  $s_L$  en un número arbitrario de partes, lo que implica una división de  $s_V$ .

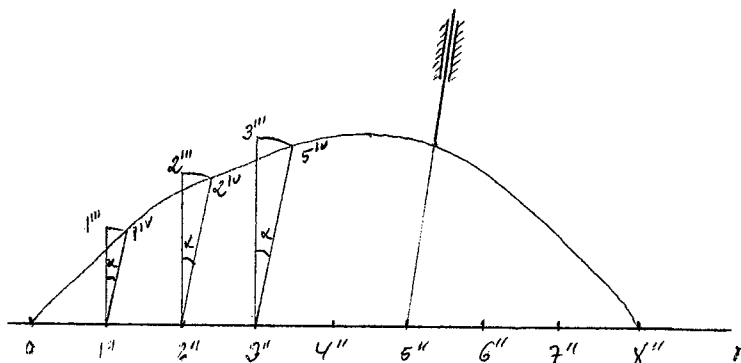
2º.- Se toman sobre "r" segmentos iguales a los de  $s_L$ . A partir



de los puntos  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ , ...

se llevan los segmentos  $1''1'''$ ,  
 $2''2'''$ , ..., pero no sobre la per-  
pendicular a  $r$  sino inclinados  
por  $\alpha'$  de la varilla.

3º.- Se obtienen así los puntos  $1''''$ ,  
 $2''''$ , ..., del perfil de la leva.



6-2.-TRAZADO DE LA LEVA DE ROTACION CON SEGUIDOR DE TRASLACION.-

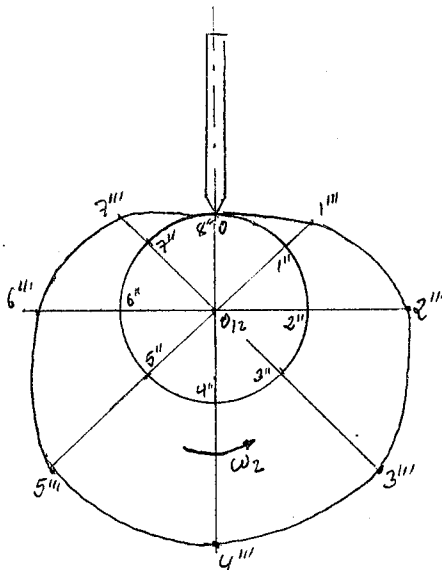
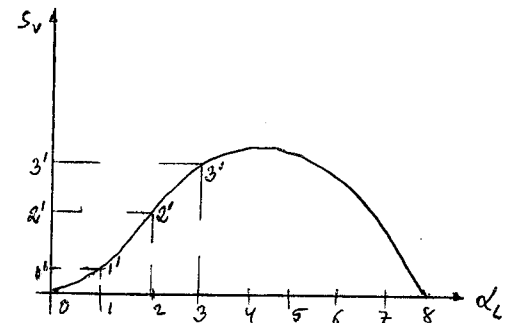
a) Leva céntrica.-

Dato: Curva base  $F(\alpha_1, s_v) = 0$

distancia OA (radio del círculo base)

Incog: perfil de la leva

Solución:



1º.- Se dividen los  $360^\circ$  de  $\alpha_1$  en un número arbitrario de partes iguales. Con esto queda dividida  $s_v$ .

2º.- Trazamos el círculo base con un radio igual al radio mínimo de la leva, y lo dividimos en el mismo número de partes que  $\alpha_1$ .

3º.- Sobre los respectivos radios llevamos  $1''1''' = 11', 2''2''' = 22', \dots$

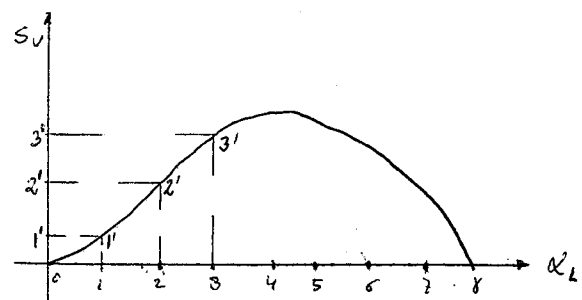
y obtenemos así el perfil de la leva.

(Obsérvese que las divisiones de la curva Base se han efectuado en sentido contrario al movimiento de la leva).

b) Leva excéntrica.-

Datos: curva base

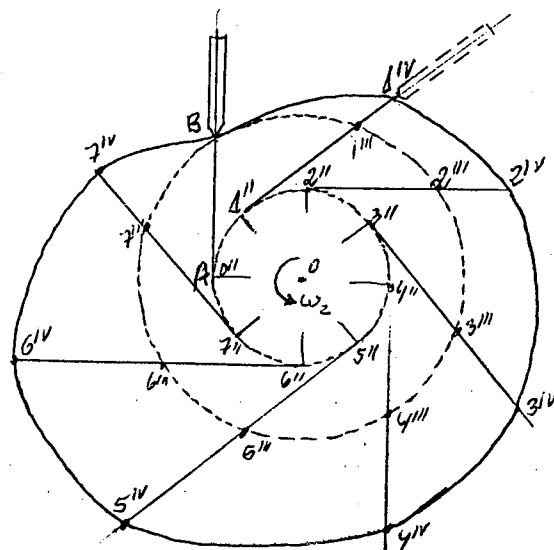
distancia OA y AB



Incog: perfil de la leva

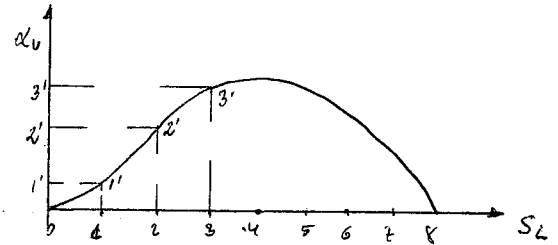
Solución:

- 1º.- Se divide  $\alpha_1$  lo que implica una división de  $S_V$ .
- 2º.- Se trazan los círculos de radios OA y OB. El de radio OA se divide en el mismo número de partes que  $\alpha_L$ , a partir del punto A.
- 3º.- Se trazan las tangentes al círculo OA a partir de los puntos  $1'''$ ,  $2''$ , ...
- 4º.- Se llevan las distancias  $1'''$ ,  $1''$ ,  $2'''$ ,  $2''$ , iguales a  $11'$ ,  $22'$ ,  $33'$ , ... y se obtiene el perfil de la leva.



6-3.- TRAZADO DE LA LEVA DE TRASLACION CON SEGUIDOR DE ROTACION

Datos: curva base  $F(S_L, \alpha_V)=0$   
 distancia H  
 radio de 3.



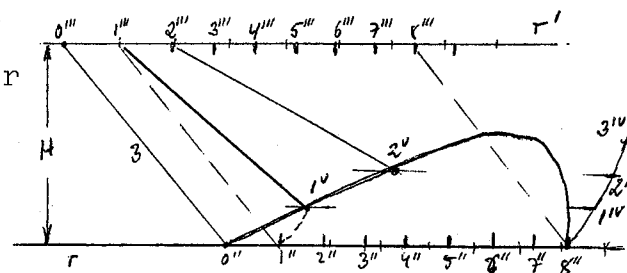
Incógnita: perfil de la leva

1ª Solución:

1º: Dividimos  $s_1$  con lo que queda dividida  $\alpha_V$ .

2º: Trazamos las paralelas r y r', a la distancia H.

3º: Con centro en un punto cualquiera  $O''$  y radio 3 hallamos  $O'''$ . A partir de  $O''$  y  $O'''$  dividimos r y r' en el mismo número de partes que  $s_1$ . Se obtienen así  $1'', 2'', \dots$  y  $1''', 2''', \dots$



4º: Con centro en  $8'''$  y radio 3, trazamos el arco h.

Sobre este arco tomamos

$\widehat{8'' 1''} = 1' 1''; \widehat{8'' 2''} = 2' 2''$ , obteniéndose  $1', 2', 3', \dots$

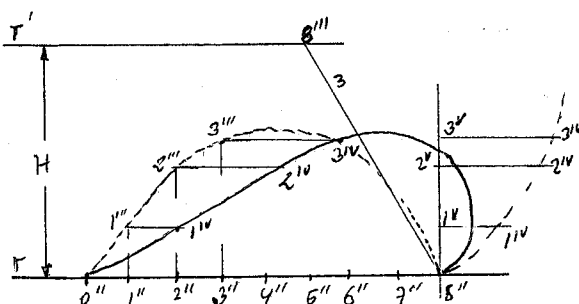
5º. Las horizontales por  $1', 2', 3', \dots$ , y los arcos de radio 3 con centro respectivamente en  $1''', 2''', 3''', \dots$  nos dan los puntos  $1^V, 2^V, 3^V, \dots$  del perfil de la leva.

2ª Solución:

1ª: Dividimos  $s_1 \Rightarrow$  dividir  $\alpha_V$ .

2º: Trazamos r y r' a la distancia H.

3ª: Con centro en el punto arbitrario  $8'''$  y radio 3, hallamos  $8''$ . Dividimos r en las mismas partes y de igual tamaño que  $s_1$  y hallamos  $1'', 2'', \dots$



- 4º.- Desde  $8'''$  y con radio 3, trazamos el arco h. Sobre este arco se marcan los ángulos girados por la varilla  $8''1' = 01'$  ;  $8''2 = 02'$  ; etc.
- 5º.- Desde la perpendicular a r por  $8''$  se miden los corrimientos horizontales  $1'1$  ;  $2'2$  ; etc.
- 6º.- Sobre las perpendiculares a r por  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$   $1 = 8''1$  ;  $2 = 8''2$  ; etc.
- 7º.- Desde los puntos  $1'''$ ,  $2'''$ ,  $3'''$  etc, se llevan los corrimientos horizontales (paralelos a r)  $1'''1 = 1'1$  ;  $2'''2 = 2'2$  ; etc, obteniéndose así los puntos 1 ; 2 , 3 , etc del perfil de la leva.

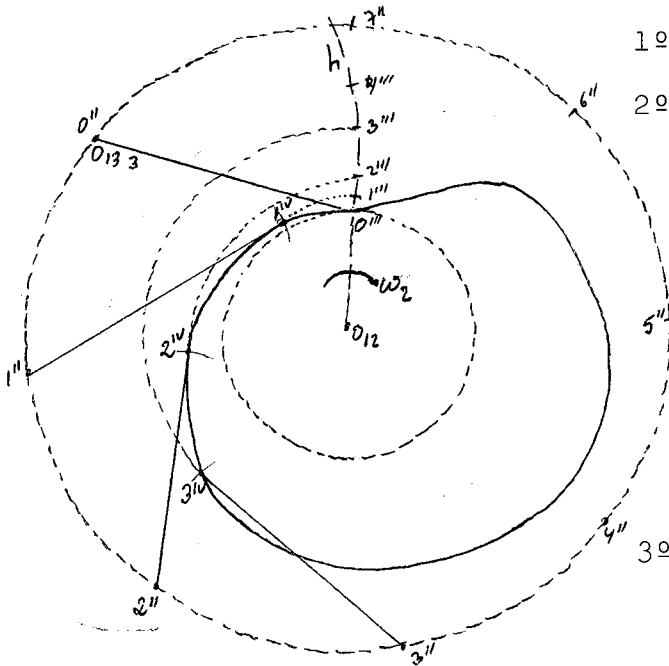
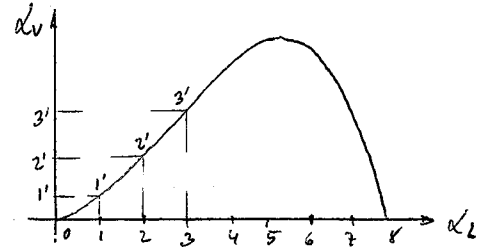


6-4.- TRAZADO DE LA LEVA DE ROTACION CON SEGUIDOR DE ROTACION

Datos: Curva base  $F(\alpha_L, \alpha_V) = 0$   
 distancia  $O_{12}O_{13}$   
 radio de 3.

Incógnita: perfil de la leva

1ª Solución:



1º: Dividimos  $\alpha_L \Rightarrow$  dividir  $\alpha_V$ .

2º: Con centro en  $O_{12}$  y radio  $O_{12}O_{13}$  trazamos una circunferencia. Con el radio mínimo de la leva trazamos otra circunferencia  $O_{12}O'''$ . Con centro en un punto cualquiera de la circunferencia base y radio 3, obtenemos sobre la circunferencia exterior el punto  $O''$ .

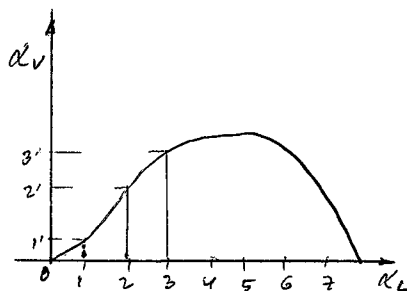
3º: A partir de  $O''$  dividimos la circunferencia en el mismo nº de partes que  $\alpha_L$ .

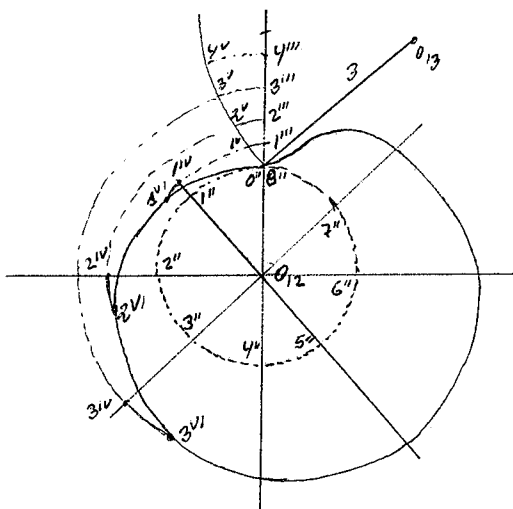
4º: Con centro en  $O''$  y radio 3 trazamos el arco  $h$ . Sobre el trazamos  $O'''1''' = O1'$ ;  $O'''2''' = O2'$ , ...

5º: Con centro en  $O_{12}$  y radios  $O_{12}1'''$ ,  $O_{12}2'''$ , ... trazamos unos arcos que se cortaran con los arcos de radio 3 y centros respectivos en  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  en los puntos  $1''''$ ,  $2''''$ ,  $3''''$ , ... del perfil buscado.

2ª Solución:

1ª: Dividimos  $\alpha_L \Rightarrow$  dividir  $\alpha_V$ ; Trazamos la circunferencia base de radio arbitrario, pero menor que  $O_{12}O_{13}$ , que se divide en el mismo nº de partes que  $\alpha_L$ :  $0''$ ;  $1''$ ;  $2''$ ;  $3''$ , etc.





2º: Sobre la vertical  $O_{12}O''$  llevamos

$$O''1''' = O''1''; O''2''' = O''2''; \dots$$

3º: Con centro en  $O_{12}$  y radios  $O_{12}1'''$ ;  $O_{12}2'''$ , .. trazamos arcos cuya intersección

con  $O_{12}1''$ ;  $O_{12}2''$ ; .. nos dan los puntos  $1''''$ ,  $2''''$ , ... que serían de la leva si la guía fuera rectilínea.

4º: A partir de  $O''$  y radio 3, situamos  $O_{13}$  sobre la circunferencia de radio  $O_{12}O_{13}$ . Con centro en  $O_{13}$  y radio 3, trazamos el arco h.

5º: Dividimos h trazando  $O''1^V = O''1''''$ ;  $O''2^V = O''2''''$ ; ..

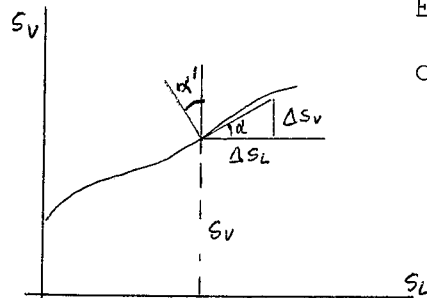
6º: Sobre los arcos con centro en  $O_{12}$  llevamos a partir de  $1''''$ ;  $2''''$ ; .. arcos  $1''''1^V = 1''''1^V$ ;  $2''''2^V = 2''''2^V$ ;  $3''''3^V = 3''''3^V$ , .., con lo que se obtiene el perfil buscado.

NOTA: Obsérvese que el procedimiento seguido equivale a dejar quieta la leva e ir moviendo la varilla a su alrededor, haciéndole girar, en cada posición, el ángulo indicado por  $\alpha_V^O$ .

Al igual que en los casos anteriores, las divisiones de la circunferencia exterior se han efectuado en sentido contrario al del giro de la leva, de forma que al girar esta en su sentido normal, se encuentre sucesivamente las posiciones 1, 2, 3...

6-5.- LIMITACIONES AL DISEÑO CINEMATICO POR EL ANGULO DE PRESION

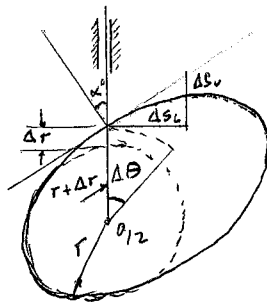
Una vez diseñada cinematicamente una leva, ha de comprobarse que no presenta autorretenciones ni puntos duros, es decir, que hemos de estudiar el ángulo de presión(que como máximo ha de valer 30°).



El ángulo de presión en una leva se deduce fácilmente de la curva base. En la fig.

$$\text{tag } \alpha' = \frac{\Delta s_v / K_{sv}}{\Delta s_L / K_{sL}}$$

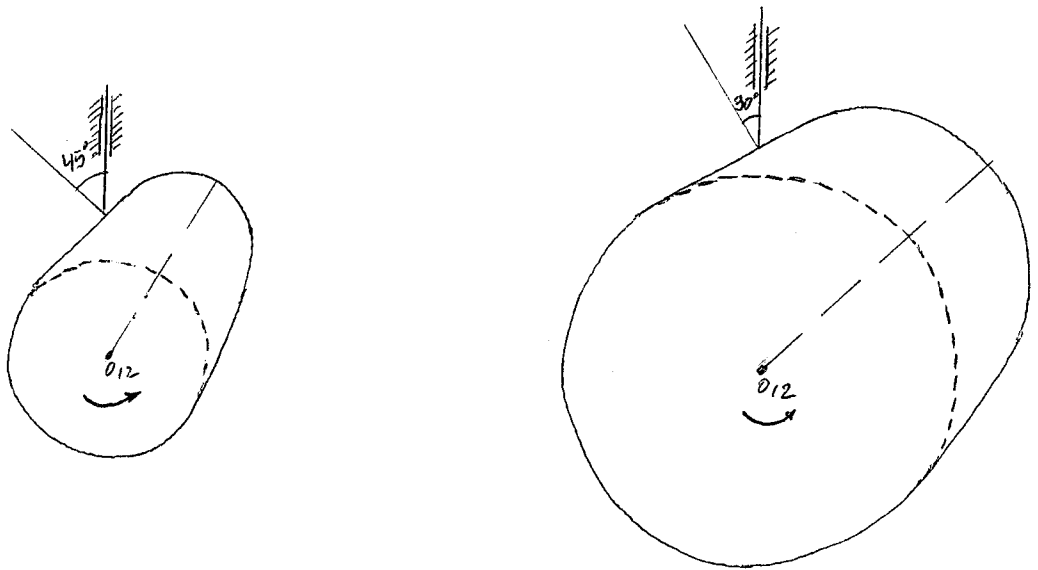
El ángulo de presión es el mismo sobre la curva base que sobre la propia leva, como puede verse en la figura.



$$\text{tag } \alpha' = \frac{\Delta s_v}{\Delta s_L} = \frac{\Delta s_v}{(r + \Delta r) \Delta \theta}$$

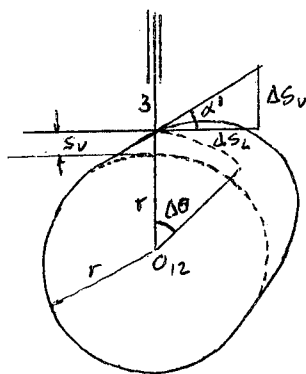
En las levas de rotación con guía de traslación, el ángulo de presión puede disminuirse aumentando el radio del círculo base de la leva, es decir, aumentando el tamaño de la leva.

En las figs. se han dibujado dos levas que imprimen el mismo movimiento a la varilla, y con la misma carrera para esta; sin embargo, en la leva mayor, el ángulo de presión es menor.



Desde luego, la leva puede ser de cualquier tamaño, estando limitada solamente por razones económicas y de espacio; sin embargo, al ejecutar un proyecto de leva interesara generalmente que esta tenga el menor tamaño posible, para lo cual hemos de hallar el círculo base mínimo.

Para obtener una expresión del radio mínimo del círculo base de una leva, fijemonos en la fig:



Al aumentar el radio del círculo base

$$\operatorname{tag} \alpha' = \frac{\Delta s_v}{(r + s_v) \Delta \theta} = \frac{\Delta s_v / \Delta \theta}{r + s_v}$$

para el valor máximo de  $\alpha'$  de  $30^\circ$ ,

$\operatorname{tag} \alpha = 0,577$  y queda la expresión:

$$0,577 = \frac{\Delta s_v^{\max} / \Delta \theta}{r_{\min} + s_v}$$

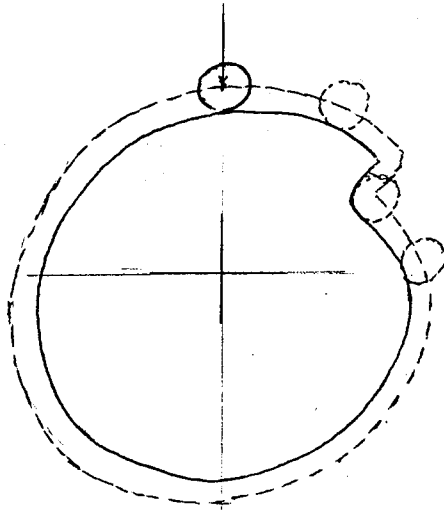
De esta expresión se puede deducir gráficamente el radio mínimo del círculo base. En efecto,  $\Delta s_v^{\max} / \Delta \theta$  se mide en el punto de máxima inclinación de la curva base, punto al que corresponde la ordenada (ascensión de la varilla)  $s_v$ .

El radio del círculo base será entonces

$$r_{\min} = \frac{(\Delta s_v^{\max} / \Delta \theta)}{0,577} - s_v$$

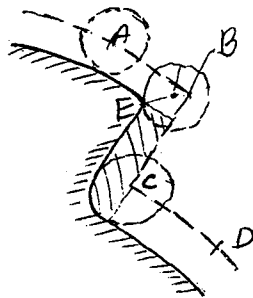
## 6-6.- EMPLEO DE SEGUIDORES PLANOS Y DE RODILLOS

### a) Seguidor de rodillo.-



Empleando seguidores de rodillo disminuye el rozamiento y el desgaste de la leva, al disminuir la concentración de esfuerzos producida por el seguidor puntual. Esto permite mayores cargas sobre el seguidor, pero la sensibilidad de la leva disminuye.

Para el trazado de una leva con seguidor de rodillo se efectúa primero una construcción como si fuera con seguidor puntual, tomando como extremo de la varilla el centro del rodillo. Así se ha obtenido la leva de trazos de la fig. Luego, con centro sobre esta línea y radio el del rodillo se trazan unos arcos, cuya envolvente nos da el perfil de la leva.



Obsérvese que para que se produzca el salto brusco BC, según el perfil teórico, hemos de quitar la zona rayada de la superficie de la leva. Esto hace que el rodillo bascule en el punto E, impidiendo que su centro alcance el punto B.

Si queremos que el rodillo alcance el punto B previsto en el diagrama cinemático, hemos de retrasar el punto E, con lo cual el movimiento de caída no se efectuará en el instante deseado, (correspondiente a BC en el perfil teórico).

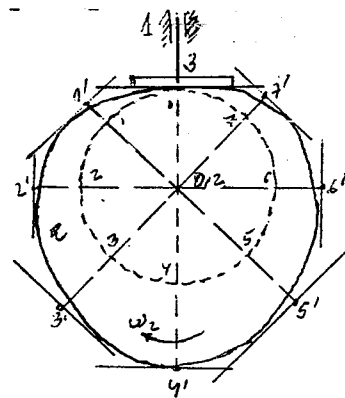
En cualquier caso, el rodillo no podrá seguir el movimiento deseado, y hemos de ir a la solución menos mala de las dos.

b) Seguidor plano.

En muchos mecanismos de levas, para lograr un funcionamiento mas suave del seguidor se recurre a dotar a este de un pié plano, aunque hemos de hacer notar que esto no es siempre posible, como se comprenderá más adelante.

1º.- Seguidor de traslación:

Para construir el perfil de la leva con un seguidor de este tipo se cálcula primero el perfil teórico de la leva como si el seguidor fuera puntual.



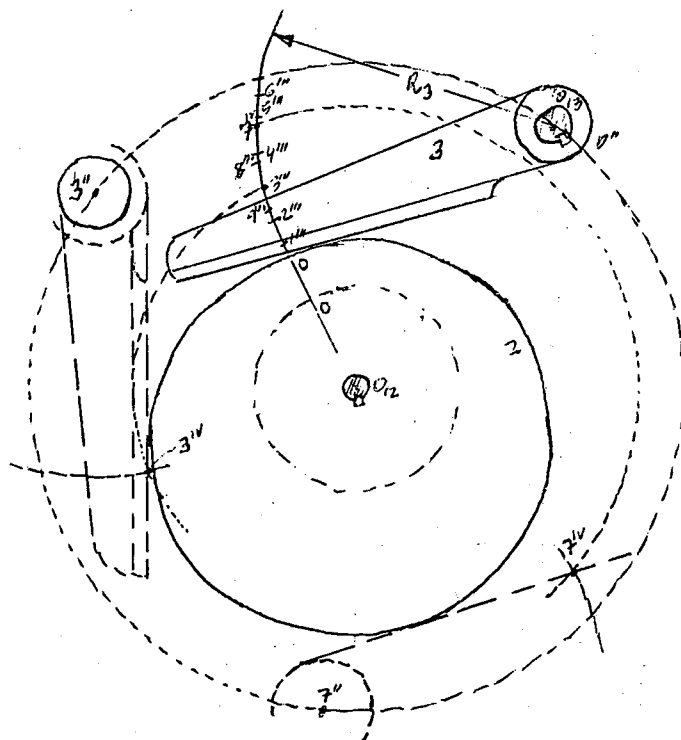
Luego, por los puntos 1', 2', 3', ... se trazan las perpendiculares a los radios respectivos (o el ángulo indicado entre desplazamiento del seguidor y pie plano).

La envolvente a todas estas líneas representativas del pie del seguidor sera el perfil que habrá de tener la leva proyectada.

2º.- Seguidor de rotación:

Para trazar el perfil de la leva, se empieza primero por trazar su perfil teórico, como si el seguidor fuera puntual.

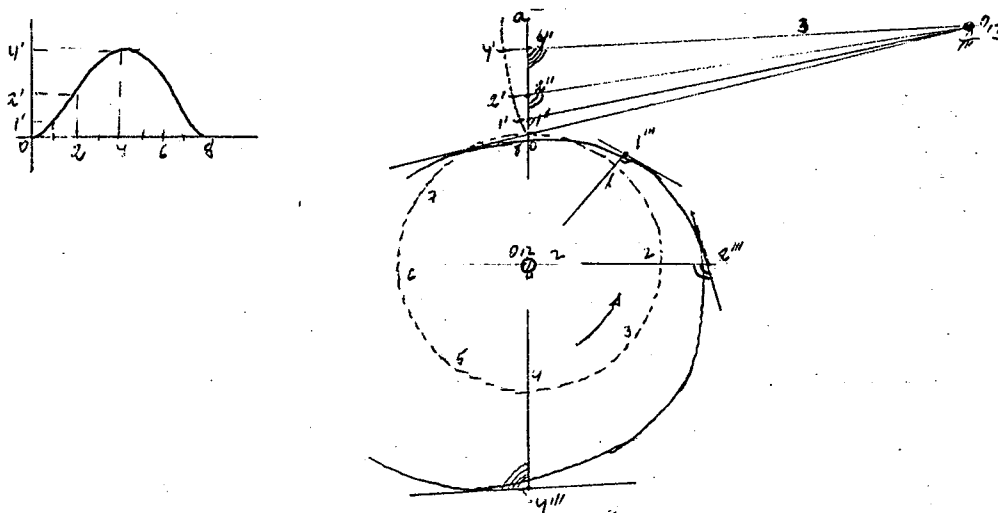
Luego, desde los puntos 1, 2, se hace pasar el borde inferior del seguidor (para lo cual es necesario dibujar este a escala) con su centro en los correspondientes 1'', 2'', 3'', ..., como se ve en la fig. La envolvente trazada al seguidor, en sus diferentes posiciones, nos da el perfil de la leva.



NOTA: Hemos de observar que el trazado de levas con seguidor de caras planas se encuentra limitado, principalmente por su tamaño mínimo, ya que por debajo de un cierto tamaño de la leva no es posible dibujar el perfil de esta tangente a todas las posiciones halladas.

Lo mismo se puede decir de ciertas curvas base, imposibles de lograr con seguidores de este tipo.

NOTA: Existe otro procedimiento, quizá más simple, para trazar perfiles de levas con seguidor plano de rotación. Este procedimiento se ilustra en la figura.



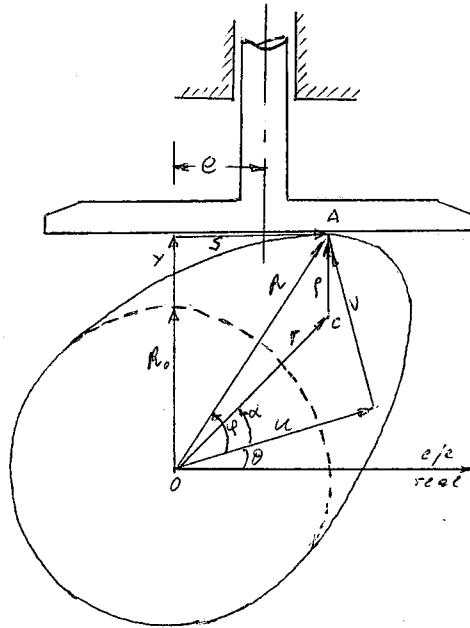
Dados los puntos  $O_{12}$  y  $O_{13}$  y la curva base del seguidor, tenemos sobre el papel las diferentes posiciones que este ha de adoptar para cada división efectuada.

Para construir la leva basta con llevar sobre la correspon-

diente división de su circunferencia base distancias  $O_{12}1''$ ,  $O_{12}2''$ , ..., y a partir de estos puntos  $1'''$ ,  $2'''$ ,  $3'''$ , ..., trazar unas rectas que formen con estos radios ángulos iguales a los que forman  $O_{12}a$  con el seguidor plano.



7-1.- DISEÑO ANALITICO DE LA LEVA DE ROTACION, CON SEGUIDOR DE TRASLACION, DE CARA PLANA.-



$R_0$ =radio circulo base

A=punto de contacto leva-seguidor

C=centro de curvatura de la leva en el punto de contacto.

$\rho$ =radio de curvatura de la leva en el punto de contacto.

$e$ =excentricidad

$u, v$ =coordenadas del punto de contacto del perfil de la leva, según unos ejes fijos a esta.

Observando la fig, se puede escribir:

$$\bar{u} + \bar{v} = \bar{R}_0 + \bar{y} + \bar{S}$$

$$u \cdot e^{i\theta} + v \cdot e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = (R_0 + y) e^{i\frac{\pi}{2}} + S \cdot e^{i(0^\circ)}$$

Dividiendo por  $e^{i\theta}$

$$u + i v = i(R_0 + y)e^{-i\theta} + S e^{-i\theta}$$

En forma trigonométrica, y separando parte real y parte imaginaria:

$$u = (R_0 + y) \operatorname{sen} \theta + y' \cdot \cos \theta$$

$$v = (R_0 + y) \cos \theta - y' \cdot \operatorname{sen} \theta$$

Ecuaciones que nos darán el perfil de la leva, punto a punto, conocido el radio  $R_0$  y la curva base  $y = f(\theta)$

NOTA: Estas Ecuaciones se pueden usar para generar una tabla de datos en coordenadas cartesianas, a partir de las cuales se puede maquinar la leva en una máquina de control numérico.

- En el trazado de una leva de este tipo puede ocurrir que la leva se haga puntiaguda en algún punto, lo que originaría presiones superficiales leva-seguidor excesivamente altas.

Interesa, por tanto, conocer el valor del radio de curvatura, de la leva así trazada, en cada punto.

Para ello, si nos fijamos en la fig, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \bar{r} + \bar{\rho} &= \bar{R}_o + \bar{y} + \bar{s} \\ r e^{i(\theta+\alpha)} + \rho e^{i\frac{\pi}{2}} &= (R_o + y)e^{i\frac{\pi}{2}} + s.e^{i(0)} \\ r e^{i(\theta+\alpha)} + i\rho &= i(R_o + y) + s \end{aligned} \quad (1)$$

Separando parte real y parte imaginaria:

$$r \cos(\theta+\alpha) = s \quad (2)$$

$$r \sin(\theta+\alpha) + \rho = R_o + y \quad (3)$$

Como el centro de curvatura C es estacionario sobre la superficie de la leva,  $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} = \frac{d\alpha}{d\theta} = 0$

Derivando (1) respecto de  $\theta$

$$i r e^{i(\theta+\alpha)} = i.y' + \frac{ds}{d\theta} \quad (4)$$

Separando parte real y parte imaginaria

$$- r \sin(\theta+\alpha) = \frac{ds}{d\theta} \quad (5)$$

$$r \cos(\theta+\alpha) = y' \quad (6)$$

Eliminando  $\cos(\theta+\alpha)$  entre (2) y (6), queda:

$$s = y' \quad (7)$$

derivando (7) respecto de  $\theta$

$$\frac{ds}{d\theta} = y'' \quad (8)$$

Eliminando  $\sin(\theta+\kappa)$  entre (3) y (5), queda:

$$\rho = R_0 + y + \frac{ds}{d\theta} \quad (9)$$

Sustituyendo (8), queda:

$$\rho = R_0 + y + y'' \quad (10)$$

que como se ve permite hallar el radio de curvatura de la leva sin conocer el perfil de esta (tan solo partiendo del conocimiento de la curva base) (En realidad, había que hacerlo para cada tramo de curva base).

En esta expresión (10) aún se precisa conocer el valor de  $R_0$ , valor que influye en el ángulo de presión.

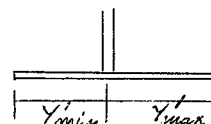
En la práctica de diseño, lo que se hace es establecer un valor mínimo de  $\rho$  ( $\rho_{\min}$ ) (compatible con la máxima presión superficial leva-seguidor admisible), y de ahí calcular  $R_0$ .

$$R_0 > \rho_{\min} - y - y''_{\min}$$

Nótese que al ser  $R_0$  e  $y$  siempre positivos,  $\rho_{\min}$  ocurrirá donde donde  $y''$  sea mínimo, y por ello hemos escrito  $y''_{\min}$  en la ecuación anterior.

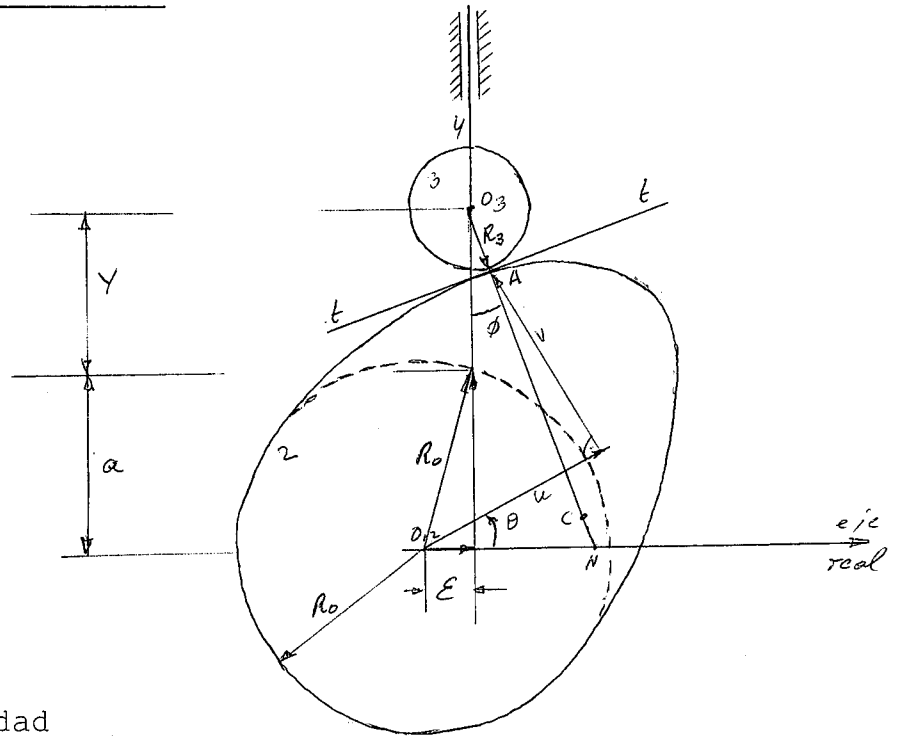
- Otro dato que también interesa definir en este tipo de leva es la longitud de la cara plana, o sea, el máximo y el mínimo valor de  $S$ .

de la Ec(7),  $S = y'$



Por tanto la longitud de la cara deberá ser  $S > y'_{\max} - y'_{\min}$

7-2.- DISEÑO ANALITICO DE UNA LEVA DE ROTACION, CON SEGUIDOR DE TRASLACION, CON RODILLO



$\mathcal{E}$  = excentricidad

$R_3$  = radio del rodillo

$R_0$  = radio de la circunferencia base

$t$   $t$  = tangente a la leva en el punto de contacto A.

C = centro de curvatura de la leva en el punto de contacto.

$\phi$  = ángulo de presión

$u, v$  = coordenadas del punto de contacto del perfil de la leva.

- En la figura es fácil ver que:

$$\bar{u} + \bar{v} = \bar{\mathcal{E}} + \bar{a} + \bar{y} + \bar{R}_3 \quad (1)$$

$$u e^{i\theta} + v e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = \mathcal{E} + (a + y) e^{i\frac{\pi}{2}} + R_3 e^{i(\frac{3\pi}{2} + \phi)}$$

Dividiendo por  $e^{i\theta}$  :

$$u + iv = \mathcal{E} \cdot e^{-i\theta} + i(a + y)e^{i\theta} + R_3 e^{i(\frac{3\pi}{2} + \phi - \theta)}$$

Poniendolo en forma trigonométrica:

$$u + iv = \varepsilon (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) + i(a + y)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) + R_3 \left[ \operatorname{sen}(\theta - \phi) - i \cos(\theta - \phi) \right] \quad (2)$$

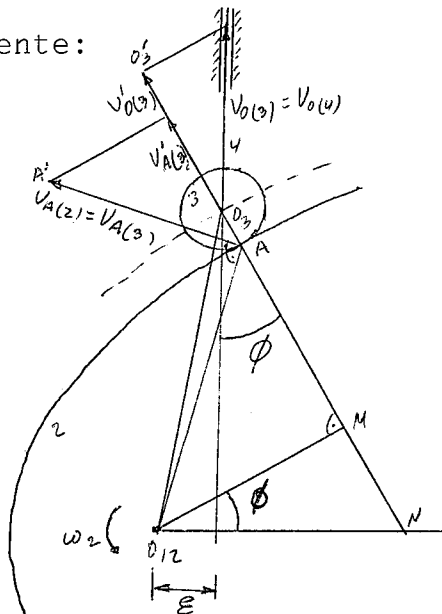
Igualando partes real e imaginaria, queda:

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon \cos \theta + (a + y) \operatorname{sen} \theta + R_3 \operatorname{sen}(\theta - \phi) \\ v &= \varepsilon \operatorname{sen} \theta + (a + y) \cos \theta - R_3 \cos(\theta - \phi) \end{aligned} \quad (3)$$

Ecuaciones que nos daran el perfil de la leva, conocido el valor de  $a$  y de  $\phi$  (puesto que los demas valores son conocidos de antemano), asi como la curva base  $y = f(\theta)$

(Obsérvese que  $a = \sqrt{R_o^2 - \varepsilon^2}$ )

- El ángulo de presión  $\phi$  debe ser lo mas pequeño posible, para evitar los puntos duros. Su valor puede hallarse del modo siguiente:



Por ser rodadura pura:  $\overline{V_A(2)} \equiv \overline{V_A(3)}$

En el miembro 3:  $\overline{V_{O(3)}} = \overline{V_{P(3)}} + \overline{V_{(O-P)(3)}}$

En la dirección  $O_3A$ , se ha de cumplir

$$\overline{V'_A(3)} = \overline{V'_{O(3)}} \quad (\overline{AA'} = \overline{O_3O'_3})$$

La velocidad del seguidor será:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = V_{O(4)} \equiv V_{O(3)}$$

$$V'_{O(3)} = V_{O(3)} \cdot \cos \phi = V_{O(4)} \cdot \cos \phi$$

$$V'_A(3) = V'_{O(3)} = V_{O(4)} \cdot \cos \phi \quad (4)$$

Por otro lado, el punto M de la leva 2 tiene un vector velocidad con la misma componente, en dirección AM, que  $V_A$ , es decir:  $\overline{V_{A(3)}} \equiv \overline{V_{A(2)}} = \overline{V_M}$  (por haberse elegido M en la perpendicular  $O_{12}M$  a la normal de la leva en A, es decir, estar M alineado con  $O_3$  y A, el vector  $\overline{V_M}$  tiene esta misma dirección).

Como  $V_M = \omega_2 \cdot O_{12}M$

y además

$$O_{12}M = O_{12}N \cdot \cos \phi$$

queda al sustituir en (4)

$$\dot{y} \cdot \cos \phi = \omega_2 \cdot O_{12}N \cdot \cos \phi$$

$$\dot{y} = \omega_2 \cdot O_{12}N \quad (5)$$

Como  $\dot{y}/\omega_2 = y'$ , queda entonces:

$$y' = O_{12}N \quad (6)$$

Expresión que también puede escribirse

$$y' = \epsilon + (a + y) \cdot \tan \phi$$

siendo  $a = \sqrt{R_0^2 - \epsilon^2}$

queda al sustituir:

$$y' = \epsilon + (\sqrt{R_0^2 - \epsilon^2} + y) \tan \phi$$

de donde

$$\phi = \arctan \frac{y' - \epsilon}{\sqrt{R_0^2 - \epsilon^2} + y} \quad (7)$$

Como se vé,  $\phi$  cambia a medida que gira la leva (cambia con y), y por consiguiente, es conveniente estudiar sus valores extremos. Al mismo tiempo, depende de los valores de  $\epsilon$  y de  $R_0$ .

Durante la subida de la leva,  $y' > 0$ , con lo cual el aumento de la excentricidad  $\mathcal{E}$  hace disminuir el valor de  $\phi$  (aunque en la bajada, cuando  $y' < 0$ , el ángulo de presión será mayor pero, lógicamente, sus consecuencias son menores en el comportamiento del mecanismo).

Igualmente, de la expresión (7) se deduce inmediatamente que  $\phi$  disminuye al aumentar  $R_0$ , es decir, al aumentar el tamaño de la leva.

Matemáticamente, la determinación de los valores extremos de  $\phi$  exige, para cada valor de  $R_0$  y  $\mathcal{E}$  dados, derivar la Ec (7) respecto de  $\phi$ , e igualarla a cero.

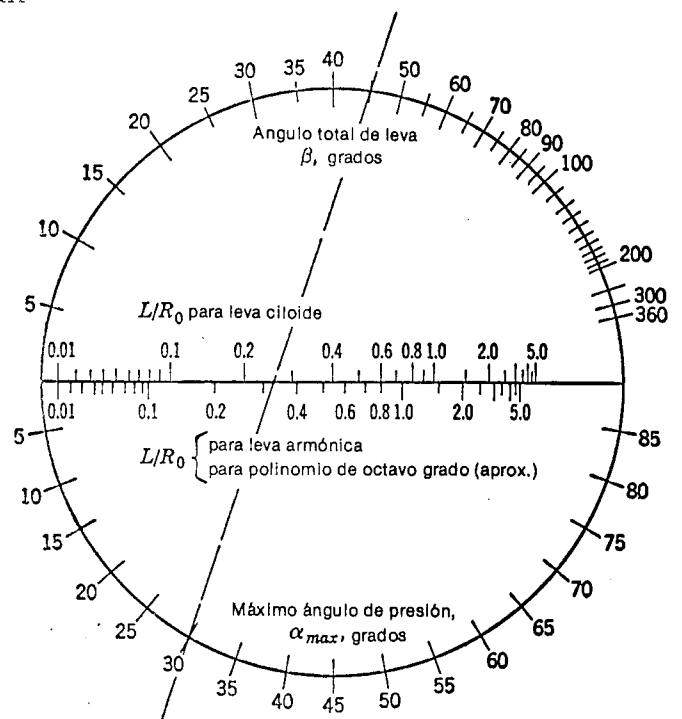
En el caso de levas céntricas ( $\mathcal{E}=0$ )

$$\phi = \arctan \frac{y'}{R_0 + y}$$

(mas desfavorables que las excéntricas, en el tramo de subida, en cuanto al valor de  $\phi$ ) se han desarrollado monogramas como el de la fig, en el cual para diferentes curvas base y para diferentes valores de  $L$  y  $\beta$ , se representa, para diferentes valores de  $R_0$ , el valor de  $\phi_{\max}$ .

O de otro modo, se puede escoger un valor de  $\phi_{\max}$  (menor de  $30^\circ$ ) y ver cuanto ha de ser  $R_0$ .

El procedimiento es el siguiente:



Datos:  $\beta$ ,  $L$ , tipo de curva

Incog:  $R_o$  y/o  $\phi_{max}$

1ª: Solución

Se fija  $\phi_{max}$ , y se traza la recta  $\phi_{max} - \beta$

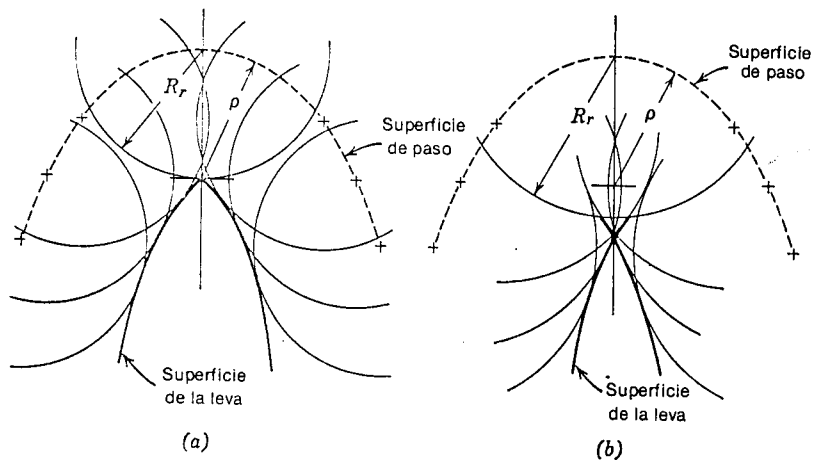
2ª.- Se calcula  $L/R_o$ , según el tipo de perfil base.

3ª.- Se obtiene  $L/R_o =$  ; que permite hallar  $R_o$ .

- Finalmente, otro aspecto a considerar en el diseño de estas levas, independiente del ángulo de presión, se refiere al análisis del radio de curvatura de la leva, para impedir la aparición de apuntamientos.

En la figura se observa claramente que el valor mínimo del radio de curvatura  $\beta$ , para que se produzca el apuntamiento, es el mismo que el radio del rodillo del seguidor.

Si  $\rho < R_3$  se necesitaría "socavar" la leva para que pudiera moverse sobre ella el rodillo, y por supuesto, el centro del rodillo no seguiría el perfil de leva previsto. (leva primitiva).

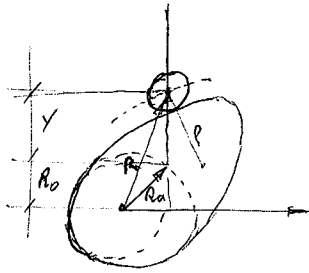


En el caso de que se desee un radio de curvatura mínimo sobre la leva ( $\rho_{min}$ ), el radio de curvatura sobre la leva primitiva ( $\rho$ ) y el radio del rodillo han de estar relacionados por la expresión

$$\rho = \rho_{min} + R_3$$



El cálculo de este valor de  $\rho$  es bastante complejo, y una vez conocido, para una curva base dada, puede determinarse el valor máximo de  $R_3$  (o viceversa, si se conoce  $R_3$  puede hallarse  $\rho$ , y comprobar que con la curva base que se va a utilizar, el radio de curvatura de la leva, en todos sus puntos, es - siempre mayor que ese valor).



En coordenadas polares, la leva primitiva tiene por coordenada del  $\theta$ :  $\bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{y}$

El radio de curvatura valdrá:

$$\rho = \frac{[(R_0 + y)^2 + (y')^2]^{3/2}}{(R_0 + y)^2 + 2(y')^2 - (R_0 + y)y''}$$

Para calcular el valor mínimo de  $\rho$  puede derivarse esta expresión respecto de  $y$ , e igualarla a cero. (Para cada tramo de curva base definido por  $y = f(x)$ , y para cada valor de  $R_0$ ) igual que se hizo antes, al ser ello una labor tediosa se han desarrollado tablas que presentan los resultados en forma gráfica. En ellas, para cada tipo de curva base se presenta la relación ( $\rho_{\min}/R_0$ ) contra  $L/R_0$ , para varias razones  $R_0/L$ .

Como siempre se conocerá la curva base, y se habrá elegido un valor de  $R_0$ , se puede hallar, para cada tramo, el valor del radio de curvatura de la leva primitiva.

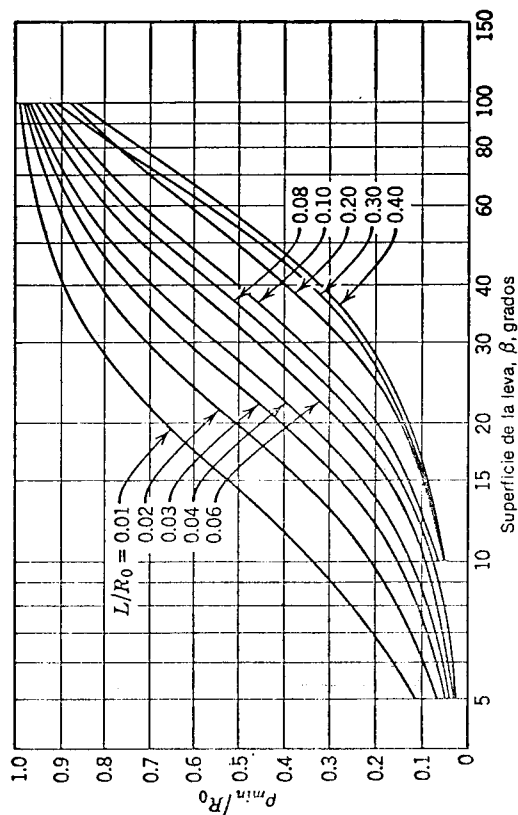
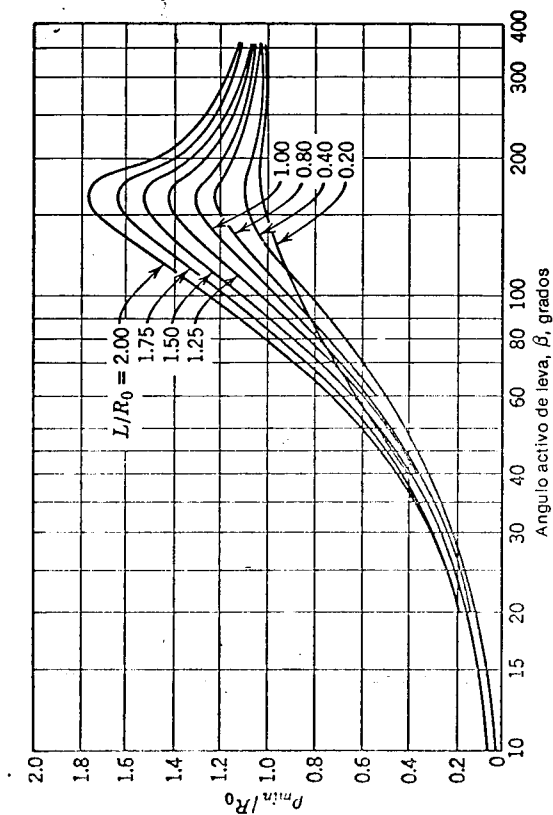


Figura 3.23 Movimiento cicloide. (De M. Klooomok y R. V. Muffley, "Plate Cam Design-Radius of Curvature," *Prod. Eng.*, septiembre, 1955.)

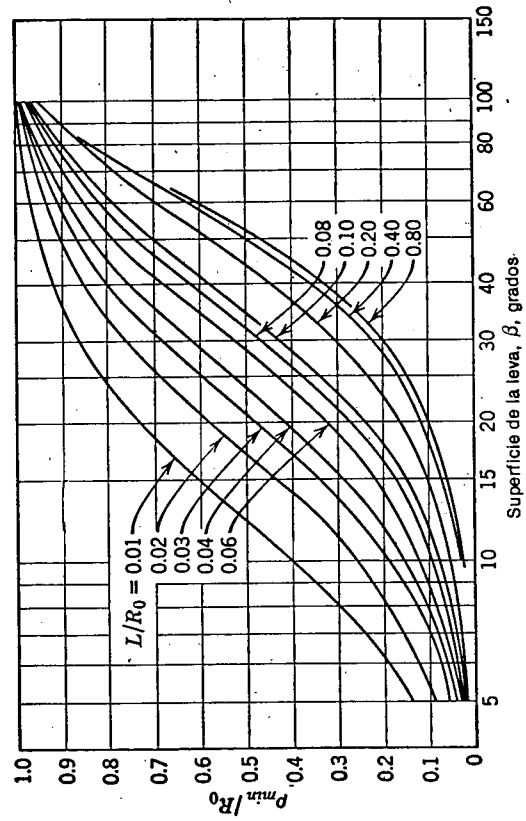
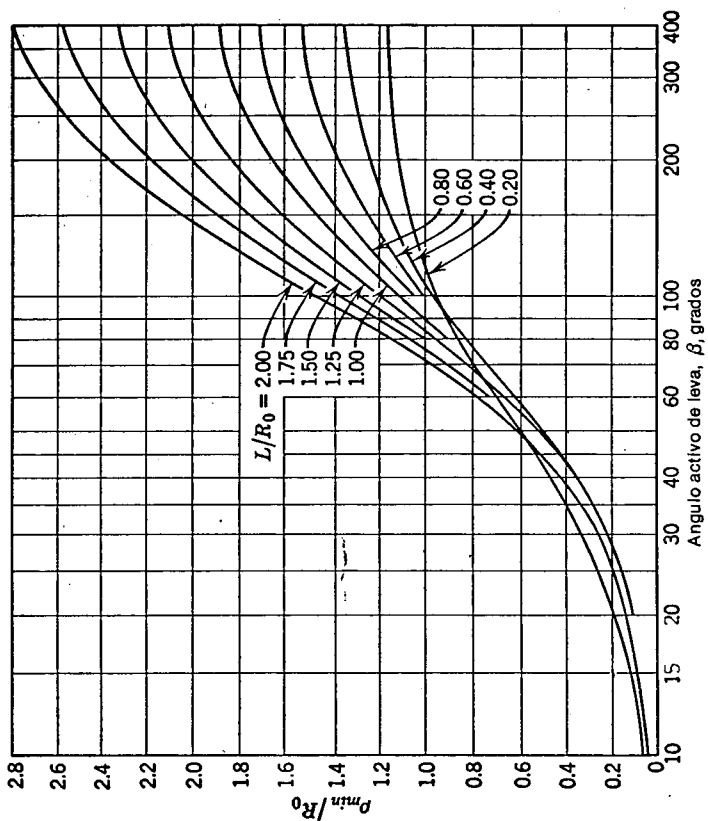


Figura 3.24 Movimiento armónico. (De M. Klooomok y R. V. Muffley, "Plate Cam Design-Radius of Curvature," *Prod. Eng.*, septiembre, 1955.)

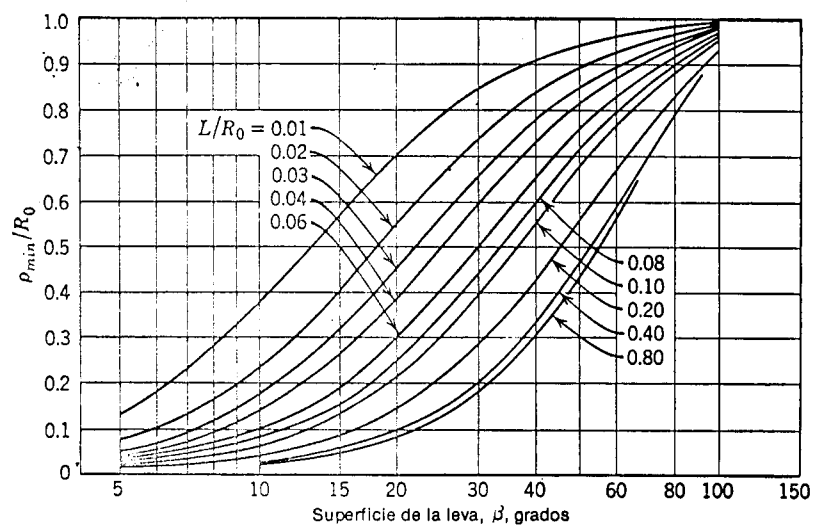
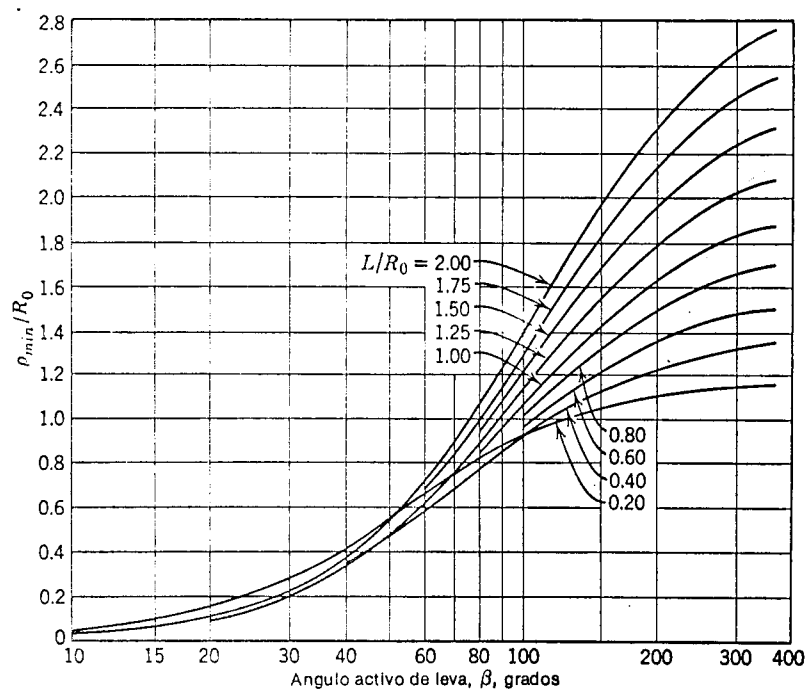
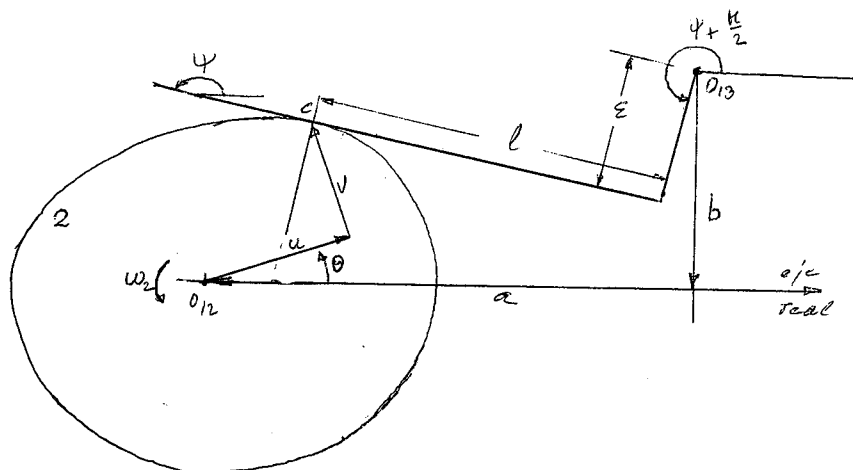


Figura 3.25 Movimiento de polinomio de octavo grado. (De M. Klopmok y R. V. Muffley, "Plate Cam Design-Radius of Curvature," *Prod. Eng.*, septiembre, 1955.)

7-3.- DISEÑO ANALITICO DE LA LEVA DE ROTACION CON SEGUIDOR DE ROTACION PLANO:-



En este tipo de levas,  $a, b$  y  $\epsilon$  son longitudes dadas.

La curvatura base es del tipo

$$\psi = \psi_0 + f(\theta)$$

El cálculo de las coordenadas del punto de contacto leva-seguidor, que nos definen el perfil de la leva, es inmediato:

$$\bar{u} + i\bar{v} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{\epsilon} + \bar{l}$$

$$u e^{i\theta} + v e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = a + b e^{i\frac{\pi}{2}} + \epsilon e^{i(\psi + \frac{\pi}{2})} + l e^{i\psi}$$

dividiendo por  $e^{i\theta}$

$$u + i v = a e^{-i\theta} + i b e^{-i\theta} + \epsilon e^{i(\psi + \frac{\pi}{2} - \theta)} + l e^{i(\psi - \theta)}$$

En forma trigonométrica:

$$u + i v = a(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) + i b(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) + \epsilon [\operatorname{sen}(\psi - \theta) - i \operatorname{cos}(\psi - \theta)] + l [\operatorname{cos}(\psi - \theta) + i \operatorname{sen}(\psi - \theta)]$$

De donde se obtienen las coordenadas  $u$  y  $v$  igualando partes real e imaginaria

$$u = a \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta + \epsilon \operatorname{sen}(\psi - \theta) + l \operatorname{cos}(\psi - \theta)$$

$$v = a \operatorname{sen}\theta + b \operatorname{cos}\theta - \epsilon \operatorname{cos}(\psi - \theta) + l \operatorname{sen}(\psi - \theta)$$

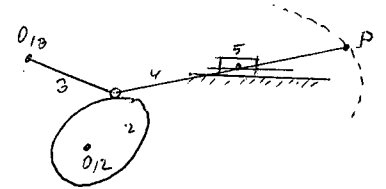
Expresiones en las que solo se desconoce  $l$ .



## 8.- DISEÑO DE LEVAS COMBINADAS.-

Según hemos visto, con un mecanismo de levas podemos lograr que el seguidor de estas se mueva según una ley de movimiento totalmente arbitraria, aunque con una importante limitación: El movimiento del seguidor solo puede ser de rotación o de traslación.

NOTA: Con el mecanismo de la figura podemos lograr que el seguidor siga una trayectoria elíptica, y con la ley de movimiento que le imprima la leva. (El punto P)



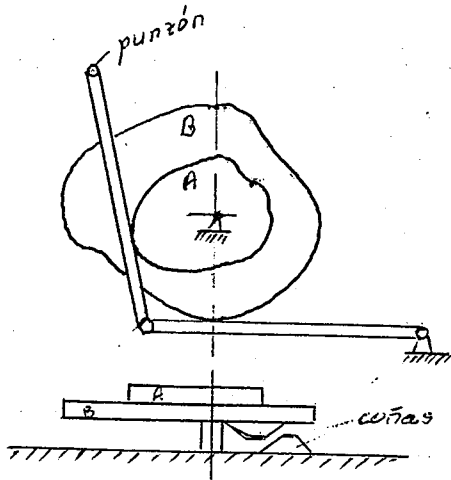
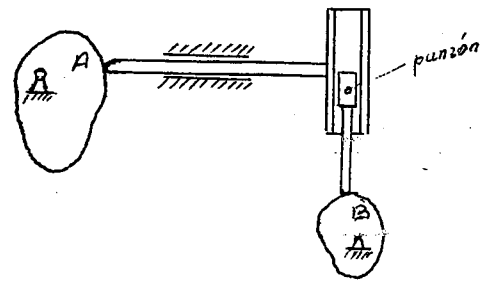
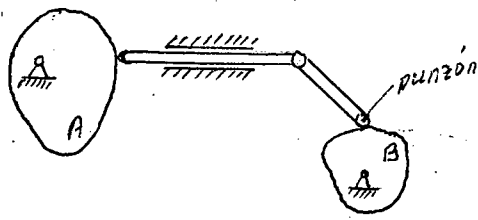
- Sin embargo, utilizando dos levas sincronizadas puede lograrse cualquier trayectoria deseada, sin limitaciones cinemáticas de ningún tipo, de una forma extremadamente sencilla, como vamos a ver con un ejemplo.

### EJEMPLO:

Se desea proyectar un mecanismo que accione un punzón, el cual ha de dibujar sobre la plancha colocada al efecto, la palabra LEVA, con la forma y dimensiones que mas abajo se expresan, en forma totalmente automática; al término del dibujo, el punzón ha de retornar a su posición inicial, siendo retirada y cambiada la plancha durante este intervalo, quedando el mecanismo listo para reiniciar el proceso.

- Para la resolución de este problema podemos utilizar cualquiera de los mecanismos de la figura, formados como se ve por una combinación de dos levas de rotación, con seguidores de rotación y de traslación, según los casos.

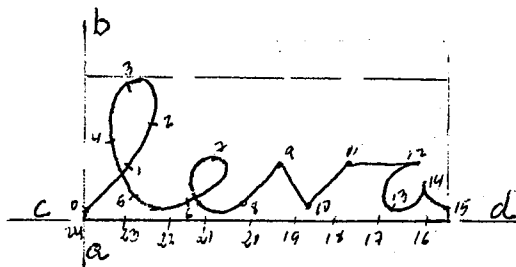
NOTA: Como es lógico, las combinaciones de mecanismos de levas puede ser enormes. Solo hemos puesto estos tres modelos a título de ejemplo.



NOTA: Observese que este mecanismos de levas está dotado a su vez de un mecanismo de cañas, que "levanta" el punzón de la plancha, en el camino de retroceso.

Con cualquiera de los tipos anteriores procederíamos de la siguiente forma:

1º.- Dibujamos a escala la trayectoria deseada, y la dividimos en



un número arbitrario de partes iguales. (En este mismo número de partes habremos de dividir los  $360^\circ$  de giro de las levas).

2º.- El cálculo de las correspondientes curvas base es inmediato.

En efecto, la leva A, que es la que produce los desplazamientos horizontales del punzón, tiene la curva base de la fig., obtenida sin mas que llevar sobre la correspondiente abcisa (giro de la leva,  $\alpha_L$ , para esa posición) la distancia horizontal medida a partir de una línea de referencia cualquiera, tal como ab. Lo mismo podriamos decir de la leva B que produce los desplazamientos verticales, medidos a partir de la línea de referencia cd.

