

**“Fundamentos de
cálculo vectorial,
teoría de campos y
de ondas para
ingenieros
mecánicos”**

Roque Calero Pérez

Septiembre de 2004

CONTENIDO:

Primera parte: Cálculo vectorial

1. Introducción.

1.1.- *Concepto de vector. Tipos.*

1.2.- *Representación de vectores. Sistemas de coordenadas (cartesianas, cilíndricas, esféricas e intrínsecas).*

2. Cálculo vectorial elemental.

2.1.- *Operaciones con vectores polares.*

2.1.1.- *Suma de vectores*

2.1.2.- *Diferencia de vectores*

2.1.3.- *Producto de un vector por un número n*

2.1.4.- *Producto escalar de dos vectores (producto interno)*

2.1.5.- *Producto vectorial de dos vectores (producto externo)*

2.1.6.- *Producto mixto de tres vectores*

2.1.7.- *Doble producto vectorial*

2.2.- *Operaciones con vectores axiales. (Momentos).*

2.2.1. *Momento central de un vector*

2.2.2. *Momento áxico de un vector*

2.2.3. *Momento planario de un vector*

2.3.- *Sistemas de vectores*

2.3.1. *Definición*

2.3.2. *Resultante del sistema*

2.3.3. *Momento de un sistema de vectores respecto de un punto*

2.3.4. *Invariantes de un sistema de vectores*

2.3.5. *Momento mínimo. Eje central.*

2.3.6. *Reducción de sistemas de vectores. Definición*

2.3.7. *Sistema de vectores concurrentes*

2.3.8. *Sistema de vectores paralelos*

2.3.9. *Sistemas de vectores coplanarios paralelos*

2.3.10. *Vectores coplanarios en cualquier dirección: Polígono funicular.*

Segunda parte: Teoría de campos

3. - Funciones vectoriales

3.1. - *Tipos de funciones vectoriales*

3.2. - *Derivada de una función vectorial*

4. -Teoría de campos

4.1. -*Campos escalares.*

4.1.1. -*Concepto y representación geométrica.*

4.1.2. -*Variación de los escalares del campo.*

4.1.2.1. - *Gradiente.*

4.1.2.2. - *Derivada direccional*

4.2. -*Campos vectoriales*

4.2.1. -*Concepto y representación geométrica*

4.2.2. -*Circulación en un campo vectorial*

4.2.3. -*Flujo en un campo vectorial*

4.2.4. -*Variación de los vectores del campo*

4.2.4.1. -*Conceptos generales*

4.2.4.2. -*Divergencia de un campo vectorial*

4.2.4.3. -*Rotacional de un campo vectorial*

4.2.5. -*Relaciones interesantes dentro de los campos vectoriales*

4.3. -*Estudio de algunos campos sencillos*

4.3.1.-Campos irrotacionales. Potencial escalar

4.3.2.-Campos adivergentes. Potencial vector

4.3.3.-Campos uniformes

4.3.4.Campos centrales

4.3.4.1. -Caso general

4.3.4.2. -Campo central culombiano

4.3.4.3. -Campo multicentral culombiano

4.3.4.4. -Campos culombianos de distribuciones continuas

5. Teoría de operadores

5.1. - Conceptos

5.2. - Aplicaciones del operador nabla

5.3. - Combinación de operadores nabla

Tercera parte: Teoría de Ondas

6. Introducción a las ondas mecánicas

7. Estudio general de ondas unidireccionales

7.1. *Formulación Matemática: Ecuación de Onda*

7.2. *Movimiento ondulatorio armónico y/o periódico*

7.3. *Casos particulares de interés en ingeniería mecánica*

7.3.1. *Ondas elásticas en piezas metálicas*

7.3.1.1. *Ondas longitudinales*

7.3.1.2. *Ondas Transversales*

7.3.2. *Ondas en cuerdas tensadas*

7.3.3. *Ondas en gases encerrados en tubos*

7.3.4. *Ondas superficiales en líquidos*

8. Ondas en dos y tres dimensiones

8.1. Estudio general

8.2. Ondas en placas elásticas

8.3. Ondas esféricas en fluidos

9. Transmisión de energía en las ondas.

10. Modificaciones en la propagación de ondas.

10.1. Introducción. Teoremas de Huygens y Malus

10.2. Reflexión y refracción de ondas

10.2.1. En dos direcciones. Ondas planas

10.2.2. En tres direcciones. Ondas esféricas

10.2.3. De ondas unidireccionales. Caso de cuerdas tensadas no homogéneas

10.3. Interferencia en ondas

10.3.1. En ondas unidireccionales

10.3.2. En ondas de dos y tres direcciones

11. Ondas estacionarias.

11.1. Introducción a las ondas estacionarias

11.2. Ondas estacionarias unidireccionales

11.3. Ondas estacionarias bidimensionales

11.4. Ondas estacionarias en tres dimensiones. Cavidades resonantes

11.5. La ecuación de onda en las ondas estacionarias

12. Propagación de ondas y movimientos relativos. Efecto Doppler. Ondas de Mach.

1.- INTRODUCCIÓN

1.1.- CONCEPTO DE VECTOR. TIPOS.

- Existen muchas magnitudes físicas que han de definirse, además de por un valor numérico (módulo), por una dirección y un sentido. (Por ejemplo: fuerzas, velocidades, etc...), es decir, por un vector. Por el contrario, la masa, el trabajo, etc... , son magnitudes que quedan representadas por un número, es decir, por un escalar.
- En todo lo que sigue, un vector se representará por el símbolo \vec{V} seguido de un subíndice para distinguir unos de otros. El módulo se representará por $|\vec{V}|$.

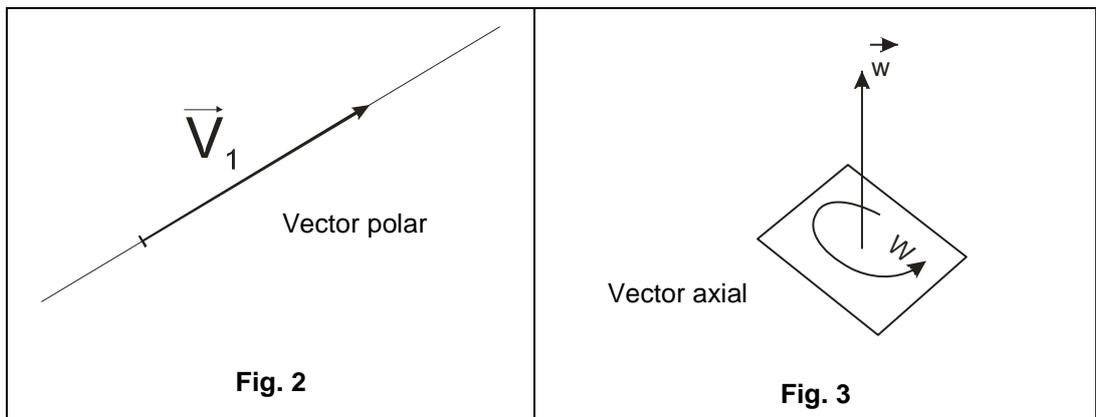


Fig. 1

- Los vectores pueden clasificarse en dos grandes grupos:

Vectores polares (que tienen definido el sentido por sí mismos: fuerzas, velocidades, etc...).

Vectores axiales (en el que su sentido se deriva de una convención: rotaciones, momentos, etc...).



- Los vectores polares pueden clasificarse a su vez en: **fijos, deslizantes y libres**.

Los fijos tienen su punto de aplicación determinado (por ejemplo, la velocidad de un punto concreto de un cuerpo en rotación).

Los deslizantes pueden considerarse aplicados en cualquier punto de su línea de acción.

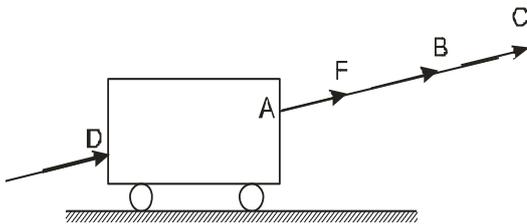


Fig. 4

Por ejemplo, el carro de la figura 4 se mueve igual, tanto si la fuerza F se aplica en D como en A o también, tirando de una cuerda en B , ó en un tramo más largo en C .

Los vectores libres son aquellos en que su punto de aplicación puede ser cualquiera que se desee en el espacio, manteniéndose fijas su dirección (líneas de acción paralelas) y su sentido.

En la figura 5 el vector libre \vec{V} se ha representado en tres de las infinitas posiciones posibles (representadas por \vec{V}' , \vec{V}'' , \vec{V}''').

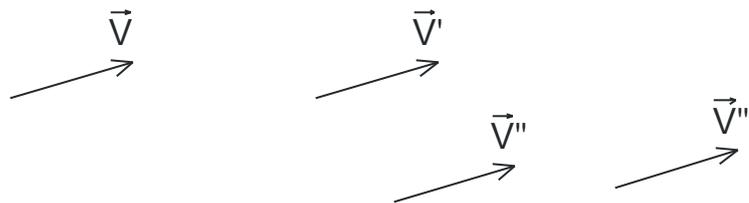


Fig. 5

(Los vectores \vec{V} , \vec{V}' , \vec{V}'' , \vec{V}''' se dice que son equipolentes).

1.2.- REPRESENTACIÓN DE VECTORES. SISTEMAS DE COORDENADAS.

Introducción:

El estudio de los fenómenos físicos, tanto si involucran magnitudes escalares, como si intervienen magnitudes vectoriales, requiere la fijación de unas coordenadas de referencia, determinadas por los ejes de las coordenadas (tipo y orientación) y el origen de coordenadas.

Los sistemas de coordenadas más empleados son **el cartesiano**, **el cilíndrico** y **el polar**. También se emplean las coordenadas intrínsecas (especialmente para el estudio del movimiento sobre las trayectorias), así como las coordenadas generalizadas (que no sean abordadas en este trabajo).

NOTA 1: Tanto la elección del sistema de coordenadas como la dirección de sus ejes y planos de referencia, así como su origen, pueden hacerse de forma totalmente arbitraria (tratando, casi siempre, de simplificar la formulación del fenómeno físico en estudio). Esto significa que las componentes de los vectores (proyecciones de estos sobre los ejes coordenados) no son valores invariantes, aunque sí lo serán los módulos y dirección de estos.

NOTA 2: Cuando se trata de representar y estudiar vectores asociados al movimiento (velocidades, aceleraciones, etc.) tiene una gran importancia la elección del origen de coordenadas, dado que éste puede encontrarse en movimiento. (Unos ejes coordenados fijos a la tierra se mueven con ésta aunque, para según qué tipo de estudios, pueden considerarse fijos). En este caso, las velocidades, aceleraciones o cualquier otra magnitud asociada al movimiento, tendrán el carácter de **“relativas”**.

NOTA 3: Un vector (libre, deslizante o fijo) puede descomponerse en otros dos, en dos direcciones arbitrarias.

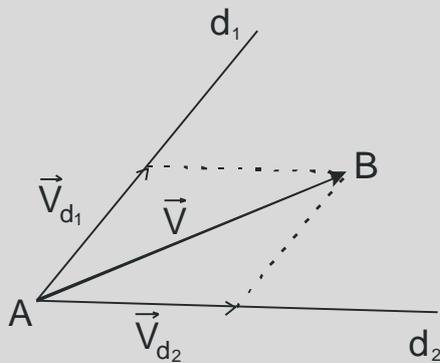


Fig. 6

El vector $\vec{V} \equiv \overline{AB}$ se ha descompuesto en el vector \vec{V}_{d1} en la dirección d_1 y el \vec{V}_{d2} en la dirección d_2 . Para ello se traza por B una paralela a d_1 que proyecta sobre d_2 el vector \vec{v} , obteniéndose \vec{V}_{d1} .

Igualmente se obtiene \vec{V}_{d2} .

De esta forma, puede considerarse el vector \vec{v} como la suma (vectorial) de \vec{V}_{d1} y \vec{V}_{d2} .

$$\vec{V} = \vec{V}_{d1} + \vec{V}_{d2}$$

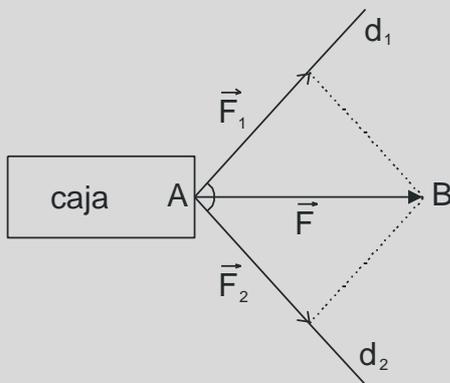


Fig. 7

Si \vec{F} es la fuerza que tira de la caja, el mismo efecto se consigue tirando simultáneamente con las fuerzas F_1 y F_2 (obtenidas descomponiendo \vec{F} en las dos direcciones d_1 y d_2).

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$$

Para calcular \vec{F} se ha trazado por el extremo de \vec{F}_1 una línea paralela a \vec{F}_2 , y por el extremo de \vec{F}_2 una paralela a \vec{F}_1 . Ambas líneas se cortan en el punto B .

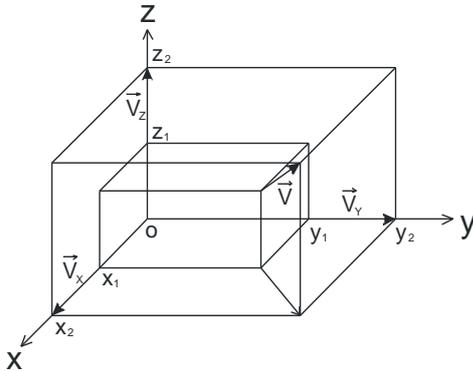
Coordenadas cartesianas.

Fig. 8

En este sistema se fija un triedro de referencia constituido por tres planos perpendiculares entre sí, cuya intersección definen los tres ejes de coordenadas.

Proyectando el vector \vec{V} sobre las tres direcciones OX , OY , OZ , se obtienen las tres componentes \vec{V}_x , \vec{V}_y , \vec{V}_z .

(En realidad, lo que se ha hecho es descomponer el vector \vec{V} en tres direcciones perpendiculares).

De acuerdo con lo expuesto en la NOTA 3, un vector (libre, deslizante o fijo) puede representarse por la suma de sus tres coordenadas cartesianas. $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$

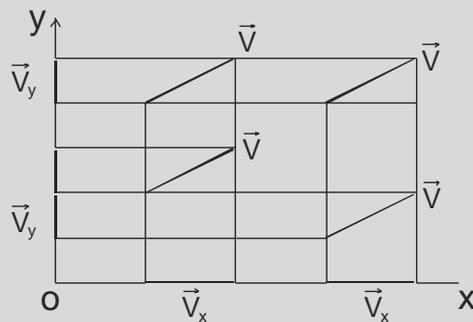
NOTA 4:

Fig. 9

Obsérvese (fig.9) que un vector en el plano dado por sus dos coordenadas \vec{V}_x y \vec{V}_y puede representar los infinitos vectores libres o deslizantes (dados por el mismo módulo, dirección y sentido).

(Igualmente ocurre en el espacio).

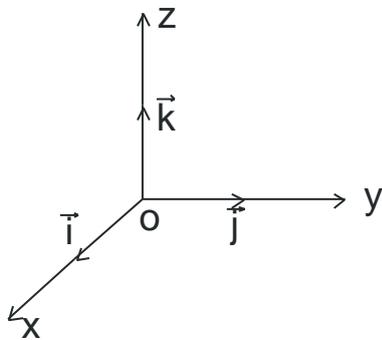


Fig. 10

Si se definen tres vectores unitarios en las direcciones de los ejes x , y , z , denominados \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , respectivamente (versores del sistema cartesiano), se puede poner:

$$\vec{V} = |\vec{V}_x| \vec{i} + |\vec{V}_y| \vec{j} + |\vec{V}_z| \vec{k}$$

siendo $|\vec{V}_x|$, $|\vec{V}_y|$, $|\vec{V}_z|$ los módulos de \vec{V}_x , \vec{V}_y y \vec{V}_z

simplificando la escritura y llamando

$$|\vec{V}_x| = V_x \quad |\vec{V}_y| = V_y \quad |\vec{V}_z| = V_z$$

puede escribirse un vector en coordenadas cartesianas:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

NOTA 5:

Las coordenadas de un vector unitario $\vec{\lambda}$ cualquiera pueden ponerse en función de los llamados cosenos directores o ángulos que forma el vector con los correspondientes ejes coordenados.

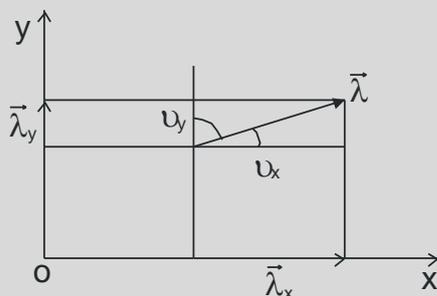


Fig. 11

En efecto (figura 11), si θ_x es el ángulo que el vector forma con el eje OX , y θ_y el que forma con el eje OY , que puede escribirse:

$$|\vec{\lambda}_x| = |\vec{\lambda}| \cdot \cos \theta_x = \cos \theta_x$$

$$|\vec{\lambda}_y| = |\vec{\lambda}| \cdot \cos \theta_y = \cos \theta_y$$

En función de los versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, un vector unitario se representa por:

$$\vec{\lambda} = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}$$

De acuerdo con lo anterior, un vector cualquiera (libre o deslizante) puede representarse por el módulo del mismo multiplicado por el vector unitario en su propia dirección: $\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{\lambda}$

$$\vec{V} = |\vec{V}| \cdot (\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$$

$$\vec{V} = |\vec{V}| \cos \theta_x \vec{i} + |\vec{V}| \cos \theta_y \vec{j} + |\vec{V}| \cos \theta_z \vec{k}$$

Con lo cual:

$$V_x = |\vec{V}| \cdot \cos \theta_x$$

$$V_y = |\vec{V}| \cdot \cos \theta_y$$

$$V_z = |\vec{V}| \cdot \cos \theta_z$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

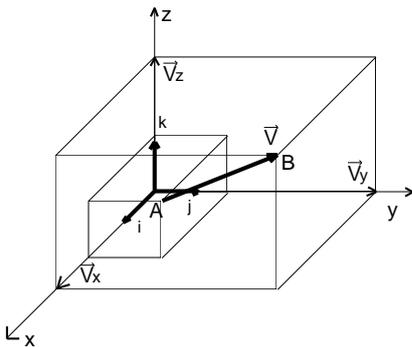


Fig. 12

Un vector fijo puede representarse por las coordenadas de su origen y de su extremo.

Si estas son:

A (x_1, y_1, z_1) y **B** (x_2, y_2, z_3) se tendrá

$$\vec{V} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k}$$

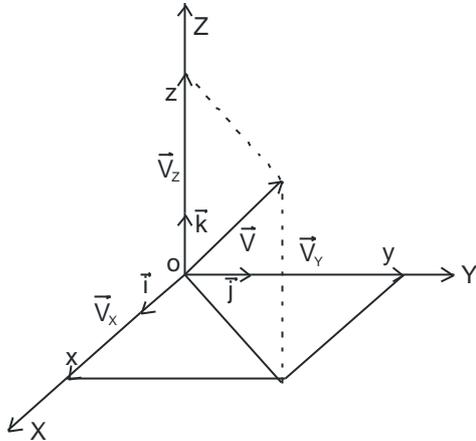


Fig. 13

Si el vector fijo tiene su origen en O y su extremo en $A(x, y, z)$ (vector de punto), se tendrá:

$$\vec{V} = (x - 0)\vec{i} + (y - 0)\vec{j} + (z - 0)\vec{k}$$

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

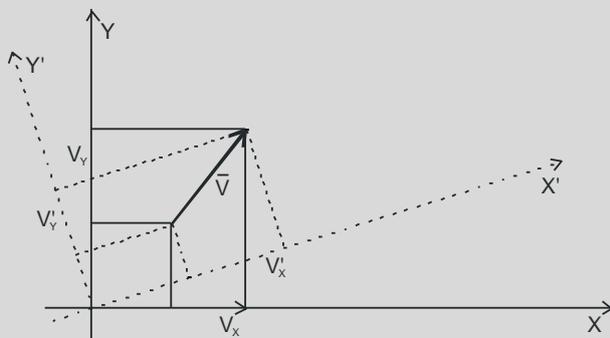
NOTA 6:

Fig. 14

Como se ve en la figura 14, un mismo vector \vec{V} tiene diferentes coordenadas V_x y V_y según sea el sistema de coordenadas elegido.

Esto significa que el módulo, dirección y sentido de un vector (fijo, deslizante o libre) son invariantes respecto de cualquier sistema de referencia, pero

no sus proyecciones (componentes).

Coordenadas cilíndricas (o semipolares).

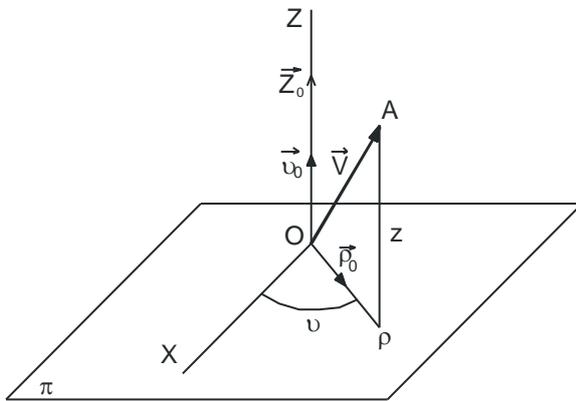


Fig. 15

En este sistema de coordenadas se fija un plano de referencia (π), un eje de referencia o eje polar (χ), un polo O y un eje perpendicular al plano, (z). Un punto cualquiera del espacio viene determinado por las coordenadas θ , ρ y z .

Si se definen los versores $\vec{\theta}_0$, $\vec{\rho}_0$ y \vec{z}_0 , el vector \vec{V} puede describirse:

$$\vec{V} = \theta \cdot \vec{\theta}_0 + \rho \cdot \vec{\rho}_0 + z \cdot \vec{z}_0$$

Siendo el módulo:

$$|\vec{V}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

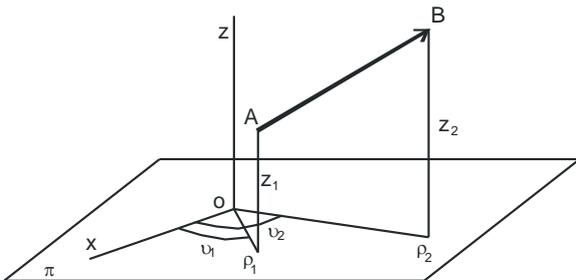


Fig. 16

Un vector con origen en A (θ_1, ρ_1, z_1) y extremo en B (θ_2, ρ_2, z_2), puede escribirse:

$$\vec{V} = (\theta_2 - \theta_1) \cdot \vec{\theta}_0 + (\rho_2 - \rho_1) \cdot \vec{\rho}_0 + (z_2 - z_1) \cdot \vec{z}_0$$

NOTA 7: La relación de estas coordenadas con las cartesianas es evidente

$$x = \rho \cdot \cos \theta$$

$$y = \rho \cdot \sin \theta$$

$$z = z$$

Transformación directa

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Coordenadas esféricas (o polares).

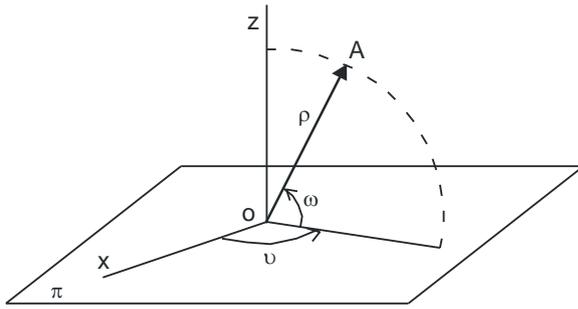


Fig. 17

En este sistema se fija un plano de referencia π un eje de referencia x y un polo O .

Un punto cualquiera como el A queda definido por las tres coordenadas θ, φ, ρ .

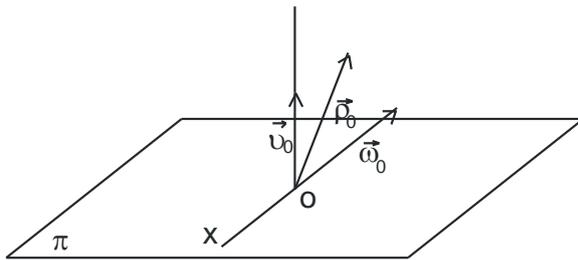


Fig. 18

Si se definen los versores $\vec{\theta}_0, \vec{\varphi}_0, \vec{\rho}_0$, el vector puede escribirse:

$$\vec{V} = \theta \cdot \vec{\theta}_0 + \varphi \cdot \vec{\varphi}_0 + \rho \cdot \vec{\rho}_0$$

Siendo su módulo: $|\vec{V}| = \rho$

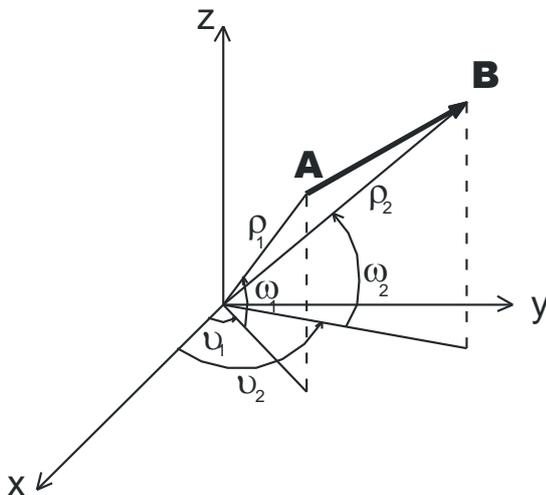


Fig. 19

Un vector cualquiera con origen en A ($\theta_1, \varphi_1, \rho_1$) y extremo en B ($\theta_2, \varphi_2, \rho_2$), puede escribirse :

$$\vec{V} = (\theta_2 - \theta_1) \cdot \vec{\theta}_0 + (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \vec{\varphi}_0 + (\rho_2 - \rho_1) \cdot \vec{\rho}_0$$

NOTA 8: La relación de estas coordenadas con las cartesianas es evidente.

$$x = \rho \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta$$

$$y = \rho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta$$

$$z = \rho \cdot \sin \varphi$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \arctan \sqrt{\frac{z^2}{x^2 + y^2}}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

NOTA 9: Si se toma como plano π el ecuador terrestre y, como eje polar la intersección de este con el plano meridiano que pasa por Greenwich, se tiene un sistema de coordenadas geográficas en el que el ángulo θ es la longitud y el ángulo φ la latitud (o altura).

Coordenadas intrínsecas.

En el estudio de algunos fenómenos físicos y, en particular aquellos referidos al movimiento de puntos sobre trayectorias dadas (por ejemplo: velocidad y aceleración de un punto móvil sobre una trayectoria alabeada), se recurre al empleo de *coordenadas intrínsecas*, es decir, ligadas al punto donde en cada instante se encuentra aplicado el vector.

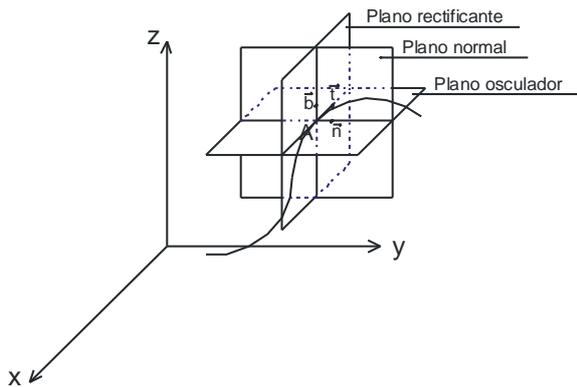


Fig. 20

En este sistema se definen en el punto **A** tres versores, $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$, formando un triedro trirrectángulo (triedro intrínseco). El versor \vec{t} es tangente a la curva en el punto **A**. El versor \vec{n} es normal a la curva en el punto **A**, y se encuentra en el plano tangente (u osculador). Su sentido es hacia el centro de curvatura.

(El plano osculador en **A** es el formado por dos tangentes, infinitamente próximas al punto **A**).

El versor binormal \vec{b} es perpendicular al plano tangente y su sentido es el resultante del producto vectorial : $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$

Un vector \vec{V} puede escribirse:

$$\vec{V} = a \cdot \vec{t} + b \cdot \vec{n} + c \cdot \vec{b}$$

Siendo **a**, **b** y **c** los módulos de los componentes en las tres direcciones del triedro intrínseco.

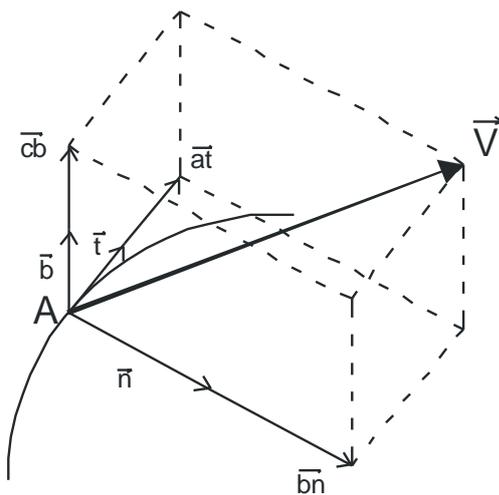


Fig. 21

2.- CÁLCULO VECTORIAL ELEMENTAL.-

2.1.- OPERACIONES CON VECTORES POLARES.

2.1.1.-Suma de vectores:

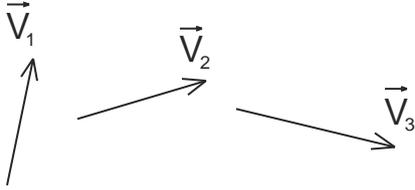


Fig. 22

Se define la suma de un conjunto de vectores libres como el vector que tiene como origen el origen del primero y, por extremo, al extremo del último, cuando se colocan todos los vectores uno a continuación de los otros, haciendo coincidir el extremo de uno con el origen del siguiente.

- Gráficamente, la suma de los tres vectores libres de la figura anterior es la mostrada en la figura 23.

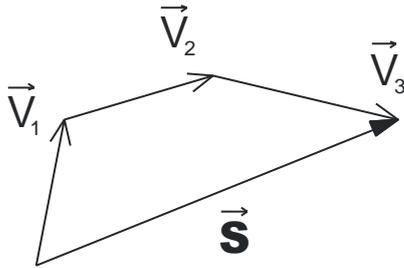


Fig. 23

$$\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

- Analíticamente, si los vectores a sumar vienen expresados por sus componentes en coordenadas cartesianas

$$\vec{V}_1 = V_{1x} \vec{i} + V_{1y} \vec{j} + V_{1z} \vec{k}$$

$$\vec{V}_2 = V_{2x} \vec{i} + V_{2y} \vec{j} + V_{2z} \vec{k}$$

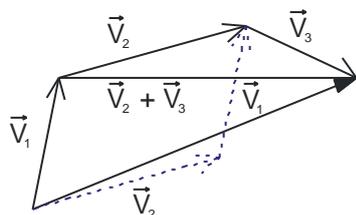
$$\vec{S} = (V_{1x} + V_{2x}) \vec{i} + (V_{1y} + V_{2y}) \vec{j} + (V_{1z} + V_{2z}) \vec{k}$$

- Propiedades:

La suma de vectores cumple las propiedades conmutativa y asociativa.

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \quad \text{conmutativa}$$

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) \quad \text{asociativa}$$



(En las figuras se pueden comprobar tales propiedades)

Fig. 24

2.1.2.- Diferencia de vectores:

Se define como la suma de uno con el opuesto del otro.

- Gráficamente (figura 25):

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$$

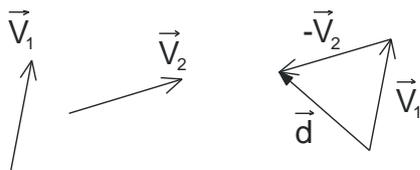


Fig. 25

- Analíticamente:

$$\vec{d} = (v_{1x} - v_{2x})\vec{i} + (v_{1y} - v_{2y})\vec{j} + (v_{1z} - v_{2z})\vec{k}$$

2.1.3.- Producto de un vector por un número n:

El producto de un vector por un número real es otro vector, de igual dirección, del mismo sentido si el número n es positivo, o de sentido contrario si es negativo, y cuyo módulo es **n** veces el módulo del vector inicial.

- Gráficamente (figura 26):

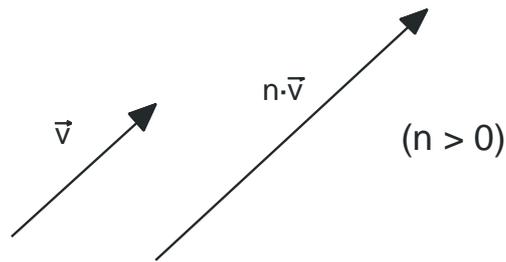


Fig. 26

- Analíticamente: $\overrightarrow{n\mathbf{v}} = n v_x \vec{i} + n v_y \vec{j} + n v_z \vec{k}$

- Propiedades:

Presenta la propiedad distributiva, tanto respecto del escalar como del vector.

$$(n_1 + n_2) \cdot \vec{v} = n_1 \cdot \vec{v} + n_2 \cdot \vec{v}$$

$$n \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = n \cdot \vec{v}_1 + n \cdot \vec{v}_2$$

2.1.4.- Producto escalar de dos vectores (producto interno):

Es, por definición, el escalar resultante de multiplicar los módulos de los dos vectores por el valor del coseno del ángulo que forman.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \cos \theta$$

- Gráficamente (figura 27)

Para obtener gráficamente el producto escalar de dos vectores libres \vec{V}_1 y \vec{V}_2 se elige un punto P y sobre él se coloca el origen de los dos vectores.

De la definición de producto escalar se deduce que este es el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{Pq}| \cdot |\vec{V}_2|$$

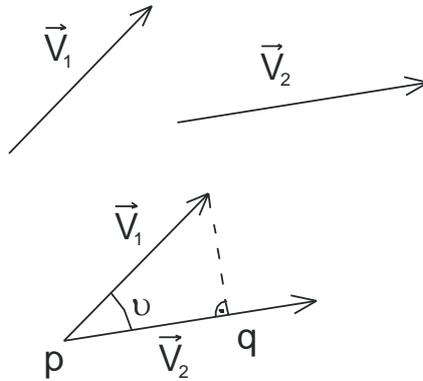


Fig. 27

- Analíticamente:

Si los vectores se expresan en coordenadas cartesianas :

$$\vec{V}_1 = v_{1x} \cdot \vec{i} + v_{1y} \cdot \vec{j} + v_{1z} \cdot \vec{k} \quad ; \quad \vec{V}_2 = v_{2x} \cdot \vec{i} + v_{2y} \cdot \vec{j} + v_{2z} \cdot \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 &= v_{1x} \cdot v_{2x} \vec{i} \cdot \vec{i} + v_{1y} \cdot v_{2y} \vec{j} \cdot \vec{j} + v_{1z} \cdot v_{2z} \vec{k} \cdot \vec{k} + \\ &+ v_{1x} \cdot v_{2y} \vec{i} \cdot \vec{j} + v_{1x} \cdot v_{2z} \vec{i} \cdot \vec{k} + v_{1y} \cdot v_{2x} \vec{j} \cdot \vec{i} + \\ &+ v_{1y} \cdot v_{2z} \vec{j} \cdot \vec{k} + v_{1z} \cdot v_{2x} \vec{k} \cdot \vec{i} + v_{1z} \cdot v_{2y} \vec{k} \cdot \vec{j} = \\ &= v_{1x} \cdot v_{2x} + v_{1y} \cdot v_{2y} + v_{1z} \cdot v_{2z} \end{aligned}$$

Ya que, por definición de producto escalar, se tiene, para los versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

- Propiedades:

El producto escalar posee las propiedades conmutativa y distributiva.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1 \quad \text{conmutativa}$$

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 \quad \text{distributiva}$$

$$n \cdot (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = (n \cdot \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \cdot (n \cdot \vec{V}_2)$$

NOTA 10:

A partir de la definición de producto escalar puede tenerse otra forma de calcular el módulo de un vector:

En efecto, multiplicando escalarmente un vector \vec{V} por sí mismo, se tiene:

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}|^2 \quad \rightarrow \quad |\vec{V}| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}$$

Es decir, se puede calcular el módulo de un vector multiplicándolo escalarmente por sí mismo.

NOTA 11:

El producto escalar también permite determinar el ángulo θ entre dos vectores

\vec{V}_1 y \vec{V}_2

En efecto:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|}$$

Si $\vec{V}_1 = V_{1x}\vec{i} + V_{1y}\vec{j}$ y $\vec{V}_2 = V_{2x}\vec{i} + V_{2y}\vec{j}$

$$\cos \theta = \frac{V_{1x} \cdot V_{2x} + V_{1y} \cdot V_{2y}}{\sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} \cdot \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2}}$$

2.1.5.- Producto vectorial de dos vectores (producto externo):

Es, por definición, un vector $(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)$, cuyo módulo vale el producto de los módulos por el valor del seno del ángulo que forman. Su dirección es la perpendicular al plano formado por los dos vectores y su sentido es tal que corresponde al avance de un sacacorchos que gira en la dirección del multiplicando, \vec{v}_1 , al multiplicador, \vec{v}_2

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \text{sen } \theta$$

- Gráficamente:

Como se ve en la figura 28, el producto vectorial, es igual al área del paralelogramo definido por los dos vectores

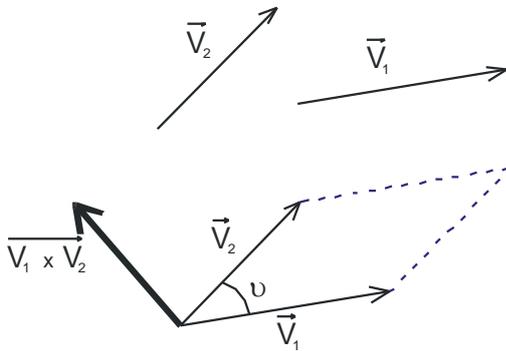


Fig. 28

- Analíticamente:

Si los vectores se expresan en coordenadas cartesianas:

$$\vec{v}_1 = v_{1x} \cdot \vec{i} + v_{1y} \cdot \vec{j} + v_{1z} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v}_2 = v_{2x} \cdot \vec{i} + v_{2y} \cdot \vec{j} + v_{2z} \cdot \vec{k}$$

El producto vectorial vale:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix}$$

(La demostración de esta expresión puede verse en el apéndice)

Según la definición de producto vectorial, se tiene para los versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

- Propiedades:

De la definición se desprende que el producto vectorial no tiene las propiedades conmutativa ni asociativa.

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \quad \text{conmutativa}$$

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) \neq (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 \quad \text{asociativa}$$

Sin embargo, sí presenta la propiedad distributiva,

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3$$

2.1.6.- Producto mixto de tres vectores:

Se define el producto mixto de tres vectores \vec{v}_1, \vec{v}_2 y \vec{v}_3 como el producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos.

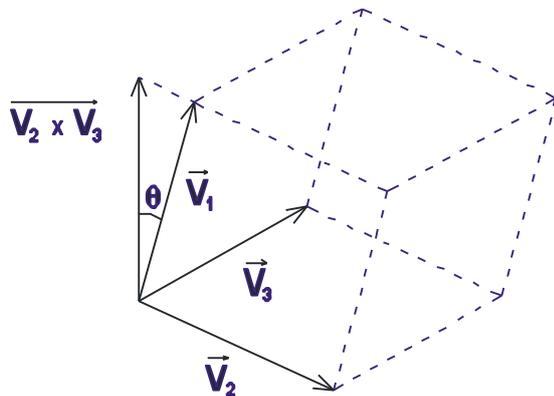


Fig. 29

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$$

(Es, por tanto, una magnitud escalar)

- Gráficamente:

El producto mixto tiene un valor igual al volumen del prisma formado por los tres vectores, como se ve en la figura.

En efecto, $|\vec{v}_2 \times \vec{v}_3|$ es el área de la base y el producto escalar del vector $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$ es la altura.

- Analíticamente:

Si los vectores se expresan en coordenadas cartesianas:

$$\vec{v}_1 = v_{1x} \vec{i} + v_{1y} \vec{j} + v_{1z} \vec{k} \quad \vec{v}_2 = v_{2x} \vec{i} + v_{2y} \vec{j} + v_{2z} \vec{k} \quad \vec{v}_3 = v_{3x} \vec{i} + v_{3y} \vec{j} + v_{3z} \vec{k}$$

El producto mixto, valdrá:

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{vmatrix}$$

(El producto mixto de tres vectores coplanarios es cero).

2.1.7.- Doble producto vectorial:

Se define por la expresión: $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3$

El doble producto vectorial es, por tanto, una magnitud vectorial.

Su valor es: $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_1$

2.2.- OPERACIONES CON VECTORES AXIALES (MOMENTOS).

2.2.1.- Momento central de un vector:

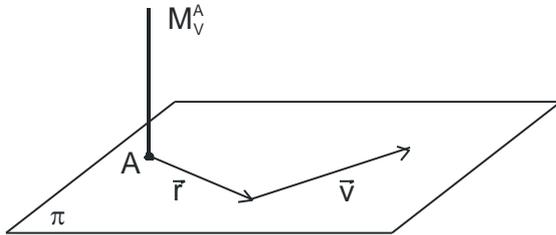


Fig. 30

Se define el momento de un vector fijo \vec{v} respecto de un punto A como el producto vectorial del vector \vec{r} (con origen en A y extremo en el origen de \vec{v}) por el vector \vec{v} .

$\vec{M}_V^A = \vec{r} \times \vec{v}$ (evidentemente, \vec{M}_V^A es un vector axial, mientras que \vec{v} es un vector polar)

Si \vec{v} es un vector deslizante, su momento respecto de un punto A es el producto vectorial del vector que tiene su origen en A y su extremo en un punto cualquiera B de la línea de acción de \vec{v} por el vector \vec{v} .

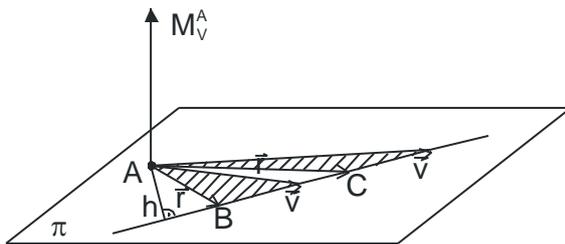


Fig. 31

En efecto, como $|\vec{M}_V^A|$ es proporcional (el doble) al área del triángulo de la figura, y ésta vale también $|\vec{v}| \cdot h$ (siendo h la altura del triángulo), es evidente que el momento respecto del punto A será el mismo, con independencia de la posición del vector deslizante \vec{v} sobre su línea de acción, es decir, los puntos B, C , u otro cualquiera.

En coordenadas cartesianas, el momento del vector $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, respecto de un punto A , de coordenadas $A(x_1, y_1, z_1)$, será, suponiendo el vector situado en un punto cualquiera $B(x_2, y_2, z_2)$ de su línea de acción.

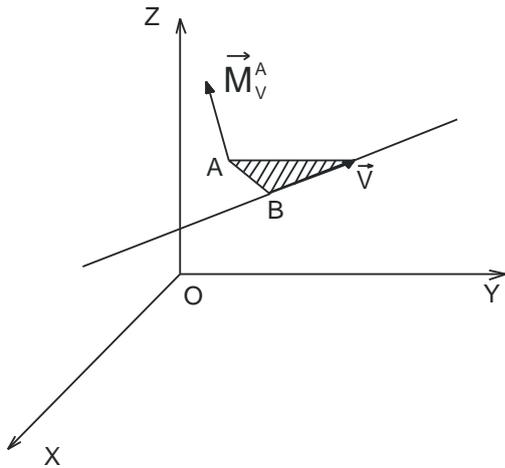


Fig. 32

$$\vec{M}_V^A = \vec{AB} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Existe una forma sencilla de relacionar los momentos centrales de un vector respecto de dos puntos diferentes **A** y **B**.

En efecto,

$$\vec{M}_V^A = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{M}_V^B = \vec{r}' \times \vec{v} = (\vec{BA} + \vec{r}) \times \vec{v} = \vec{BA} \times \vec{v} + \vec{M}_V^A$$

$$\vec{M}_V^B = \vec{M}_V^A + \vec{BA} \times \vec{v}$$

Es decir, el momento de un vector respecto de un punto cualquiera **B** es igual al momento del mismo vector respecto a otro punto **A**, más el momento respecto de **B** del vector \vec{v} aplicado en **A**.

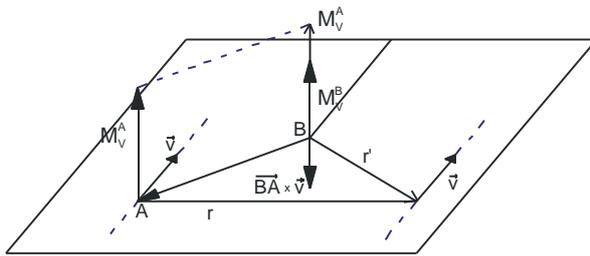


Fig. 33

En la fig. 32 se representa el momento del vector \vec{v} respecto de un punto **A** y de otro punto **B**. (Para visualizar mejor la expresión anterior se han colocado **A**, **B** y \vec{v} en el mismo plano).

Evidentemente, al estar **B** más cerca del vector \vec{v} que el punto **A**, el momento debe ser menor. Esto queda visualizado por el hecho de que el momento del vector \vec{v} , colocado en **A**, respecto de **B**, tiene signo contrario al de \vec{M}_V^A .

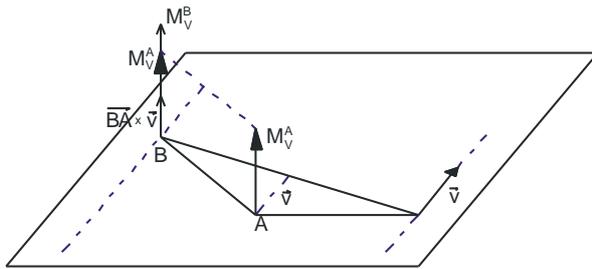


Fig. 34

(En módulo, puede escribirse:

$$|\vec{M}_V^B| = |\vec{M}_V^A| + |\vec{BA} \times \vec{V}|.$$

Lo contrario ocurre en la fig. 33, en donde el momento de \vec{v} colocado en A , respecto de B , es positivo, y por tanto se suma al \vec{M}_V^A , (lo cual es lógico, al estar, en este caso, el punto B más alejado de \vec{v} que el punto A)

2.2.2.- Momento áxico de un vector:

El momento áxico o momento de un vector (deslizante o no) respecto de un eje, es la proyección sobre dicho eje del momento del vector respecto a cualquier punto del mismo. (Es, por tanto, un escalar)

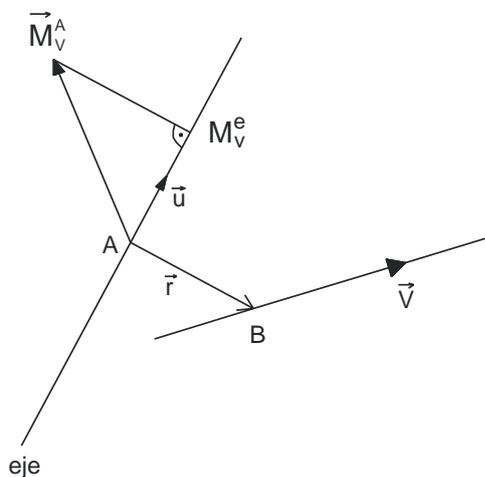


Fig. 35

Si \vec{u} es el vector unitario que define la dirección del eje (cuyas coordenadas, como se sabe, son los cosenos directores ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$)) y \vec{M}_V^A es el momento del vector \vec{v} respecto de un punto cualquiera del eje, el momento áxico valdrá:

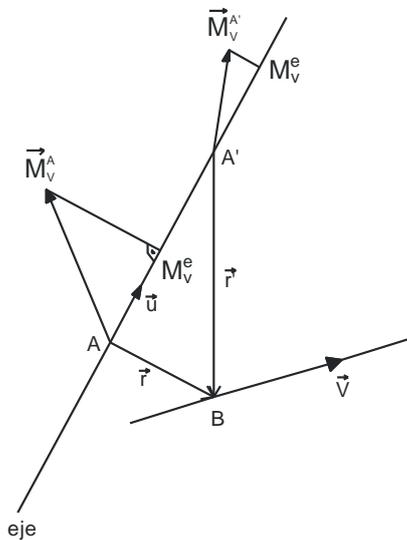
$$\vec{M}_V^e = \vec{M}_V^A \cdot \vec{u}$$

(dado que el producto escalar de \vec{M}_V^A por \vec{u} es la proyección de \vec{M}_V^A sobre el eje).

En coordenadas cartesianas, si el vector es $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$, el punto de aplicación es $\mathbf{B}(x_2, y_2, z_2)$ y el punto arbitrario elegido sobre el eje es $\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1)$, la expresión del momento áxico vendrá representada por el producto mixto:

$$\mathbf{M}_v^e = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

El momento áxico no depende del punto elegido sobre el eje. Si en lugar del punto \mathbf{A} se elegiría otro punto \mathbf{A}' , se tendría:



$$\begin{aligned} \vec{M}_v^A &= \vec{r} \times \vec{v} \\ \vec{M}_v^{A'} &= \vec{r}' \times \vec{v} = (\vec{A'A} + \vec{r}) \times \vec{v} = (|\mathbf{A'A}| \vec{u} + \vec{r}) \times \vec{v} \\ \vec{M}_v^{A'} &= |\mathbf{A'A}| \vec{u} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{v} \end{aligned}$$

Fig. 36

La proyección sobre el eje será:

$$\begin{aligned} M_v^e &= \vec{M}_v^{A'} \cdot \vec{u} = |\mathbf{A'A}| (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} + (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} \\ \text{Como } (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} &= 0, \text{ queda :} \\ M_v^e &= (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = M_v^e \end{aligned}$$

El momento áxico será nulo en dos casos:

- cuando la línea de dirección del vector se corte con el eje. (Y en ese caso habrá un punto en el que $r' = r = 0$).
- cuando el vector \vec{v} sea paralelo al eje. (En este caso, \mathbf{M}_A será un vector perpendicular al plano que contiene a \vec{v} y al eje, y su producto escalar, la proyección sobre el eje, será cero).

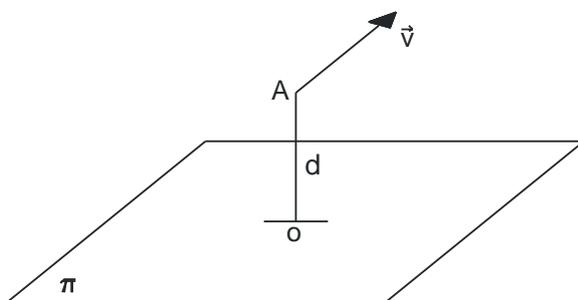
2.2.3.- Momento planario de un vector:

Fig. 37

Se define el momento planario, o momento de un vector (fijo o deslizante, pero en el segundo supuesto, siempre que la línea de acción no corte al plano, o sea, que sea paralela a él), respecto del plano π , al producto escalar del vector por la distancia al plano \mathbf{d} .

$$M_v^p = \vec{v} \cdot \vec{d}$$

Es, por tanto, una magnitud escalar.

2.3.- SISTEMAS DE VECTORES.-**2.3.1.- Definición :**

Un conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$, fijos o deslizantes, constituyen un sistema de vectores.

2.3.2.- Resultante del sistema :

La resultante general del sistema de vectores es la suma (vectorial) de todos los vectores que componen el sistema, y se considera un vector libre.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i$$

2.3.3.- Momento de un sistema de vectores respecto de un punto :

Se define el momento de un sistema de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_i$, respecto de un punto arbitrario **A**, por la expresión

$$\vec{M}_T^A = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

En coordenadas cartesianas, si el sistema de vectores esta formado por los n vectores, $\vec{v}_i = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, y $\mathbf{B}(x_{1i}, y_{1i}, z_{1i})$ son las coordenadas del origen de cada vector, y $\mathbf{A}(x_2, y_2, z_2)$ son las coordenadas del punto respecto del cual se toman momentos, queda :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n v_{xi} \vec{i} + \sum_{i=1}^n v_{yi} \vec{j} + \sum_{i=1}^n v_{zi} \vec{k}$$

$$\vec{M}_T^A = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_{1i} & y_2 - y_{1i} & z_2 - z_{1i} \\ v_{xi} & v_{yi} & v_{zi} \end{vmatrix}$$

La figura 38 representa un sistema formado por tres vectores, \vec{v}_1, \vec{v}_2 y \vec{v}_3 , situados respectivamente en tres planos perpendiculares. Se representa también la resultante general \vec{R} , situada en un punto arbitrario A , y el momento resultante respecto de ese punto A (M_T^A), como suma vectorial de $M_{V_1}^A, M_{V_2}^A, M_{V_3}^A$.

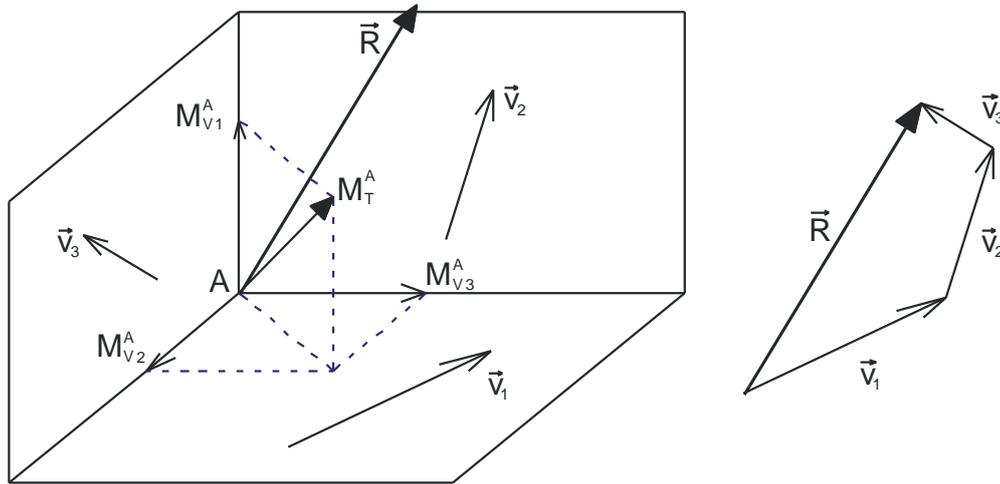


Fig. 38

Si se conoce el momento resultante respecto de un punto A (M_T^A), es fácil calcular el momento resultante respecto a cualquier otro punto B , tal como se ve en la figura 39.

Obsérvese que si \vec{v}_i y A están en el plano π , $M_{V_i}^A$ es perpendicular a dicho plano, pero M_T^A no tiene porqué serlo.

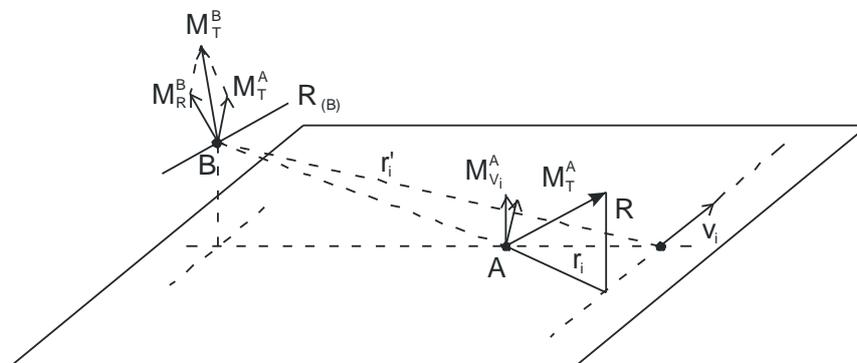


Fig. 39

En efecto:

$$\vec{M}_T^B = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{BA} + \vec{r}_i) \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{BA} \times \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$\vec{M}_T^B = \vec{M}_T^A + \vec{BA} \times \sum_{i=1}^n \vec{v}_i = \vec{M}_T^A + \vec{BA} \times \vec{R}$$

siendo $\vec{BA} \times \vec{R}$ el momento de la resultante, supuesta en **A**, respecto de **B** (M_R^B).

Es decir, el momento de un sistema de vectores respecto de un punto arbitrario **B** es igual al momento del sistema respecto de otro punto cualquiera **A**, más el momento de la resultante, supuesta en **A**, respecto de **B**:

$$\vec{M}_T^B = \vec{M}_T^A + \vec{M}_R^B$$

NOTA 12: La expresión anterior indica que si la resultante \vec{R} es cero y el momento resultante respecto de un punto dado también, entonces el momento del sistema será nulo para cualquier otro punto que se considere.

2.3.4.- Invariantes de un sistema de vectores:

Invariantes de un sistema de vectores son aquellos valores del mismo que no dependen del punto elegido como referencia (por ejemplo, para aplicar momentos), ni tampoco de la posición elegida para colocar los ejes de referencia.

El primer invariante es, evidentemente, la resultante general:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i$$

El segundo invariante es la proyección del momento resultante respecto de cualquier punto, sobre la resultante general, colocada pasando por ese punto (o, lo que es igual, su producto escalar).

$$\vec{M}_T^A \cdot \vec{R} = \text{cte.}$$

En efecto, $\vec{M}_T^B = \vec{M}_T^A + \vec{BA} \times \vec{R}$;

Multiplicando escalarmente por \vec{R} se tiene: $\vec{M}_T^B \cdot \vec{R} = \vec{M}_T^A \cdot \vec{R} + (\vec{BA} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}$;

Como $(\vec{BA} \times \vec{R}) \cdot \vec{R} = 0$; $\vec{M}_T^B \cdot \vec{R} = \vec{M}_T^A \cdot \vec{R} = \text{cte.}$

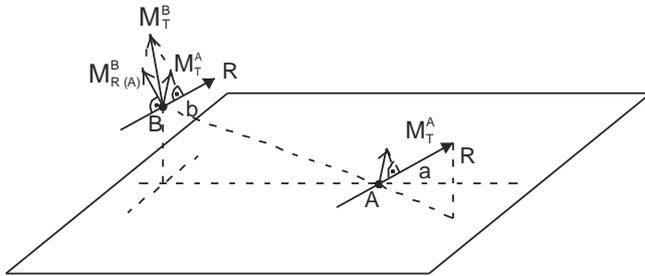


Fig. 40

En la figura 40 se observa que al ser cero la proyección del momento de la resultante $M_{R(A)}^B$ sobre la resultante (al ser vector perpendicular), necesariamente han de ser iguales las proyecciones sobre la resultante de los momentos respecto de A , B o cualquier otro punto ($Aa = Bb = Cc = -$).

2.3.5.- Momento mínimo. Eje central:

Se ha visto como la proyección del momento resultante de un sistema de vectores referido a cualquier punto, sobre la resultante general del sistema situada en ese punto, es un valor constante y característico del sistema. ($Aa = Bb = Cc = \text{cte.}$)

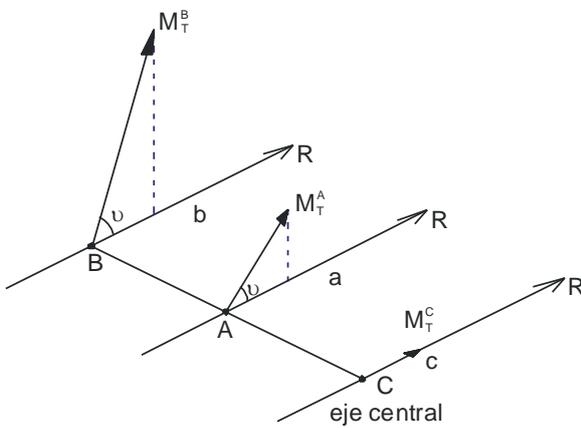


Fig. 41

Dentro de ese producto constante, el momento resultante tendrá un valor mínimo cuando sea paralelo a la resultante ($\theta = 0$). Pues bien, para todo sistema de vectores existe un conjunto de puntos (que conformen una recta) respecto de todos los cuales el momento del sistema es mínimo (y obviamente para todos los puntos de la recta, idénticos).

Tal recta se llama eje central del sistema.

Utilizando coordenadas cartesianas, si $\vec{v}_i = v_{xi} \vec{i} + v_{yi} \vec{j} + v_{zi} \vec{k}$ es el sistema de vectores, se tendrá : $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$, $\vec{M}_T^A = \vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$.

Puede escribirse la ecuación : $\vec{M}_T^C = \vec{M}_T^A + \vec{CA} \times \vec{R}$, o también $\vec{M}_T^C = \vec{M}_T^A - \vec{AC} \times \vec{R}$, siendo en este caso **C** un punto del eje central. Las componentes cartesianas de \vec{M}_T^C serán:

$$M_{Tx}^C = M_x^A - [(y_2 - y_1)R_z - (z_2 - z_1)R_y] ;$$

$$M_{Ty}^C = M_y^A - [(z_2 - z_1)R_x - (x_2 - x_1)R_z] ;$$

$$M_{Tz}^C = M_z^A - [(x_2 - x_1)R_y - (y_2 - y_1)R_x]$$

siendo (x_2, y_2, z_2) las coordenadas del punto **A** y (x_1, y_1, z_1) las del punto **C**.

Imponiendo la condición de paralelismo entre \vec{M}_T^C y \vec{R} se obtiene la ecuación de una recta (eje central). Para simplificar la nomenclatura, se ha tomado el punto **A** como origen de coordenadas **A (0, 0, 0)** y **C (x, y, z)**

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z}$$

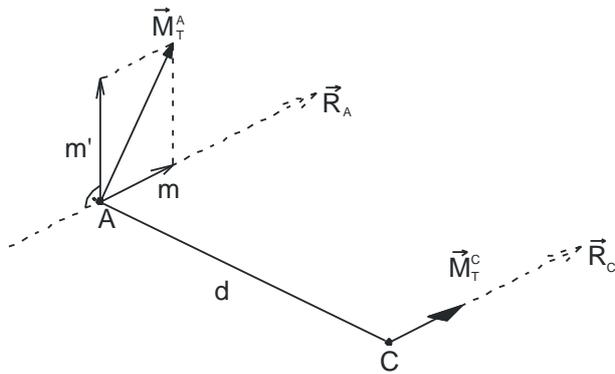


Fig. 42

El eje central puede calcularse, en forma gráfica, como se ve en la figura 42.

Para ello, se ha descompuesto el momento respecto de un punto **A** en dos vectores \vec{m}' y \vec{m} , perpendicular y paralelo, respectivamente, a la resultante \vec{R} . Luego, sobre la perpendicular al plano de \vec{M}_T^A y \vec{R} se obtiene un punto **C** tal que, $m' = d \cdot R$. Tal punto pertenece al eje central, el cual tendrá la dirección de la resultante.

2.3.6.- Reducción de sistemas de vectores. Definición.-

Un sistema de vectores puede reducirse en un punto, sustituyéndolo por otro sistema equivalente más sencillo. Tal reducción será posible si la resultante y el momento resultante, en el punto de reducción, son iguales a la resultante y al momento resultante de todo el sistema respecto de ese punto.

Sistema reducible a un vector:

Cualquier sistema cuyo momento mínimo sea cero, puede ser reducido a su resultante situada en el eje central. Tales son los casos de sistema de vectores concurrentes, paralelos y coplanarios.

Sistema reducible a un par:

Es el caso del sistema de vectores cuya resultante es cero, pero no así el momento resultante respecto de cualquier punto.

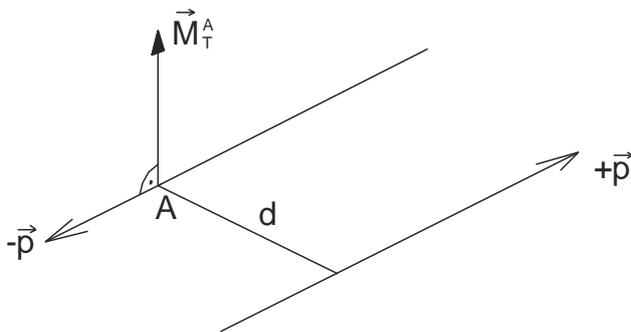


Fig. 43

Como $\vec{p} \times \vec{d} = \vec{M}_T^A$, el par equivalente (a todo el sistema de vectores) puede tener infinitas soluciones (si se elige una distancia \vec{d} , se calcularía el valor correspondiente de \vec{p} y viceversa, y éstas elecciones pueden ser totalmente arbitrarias).

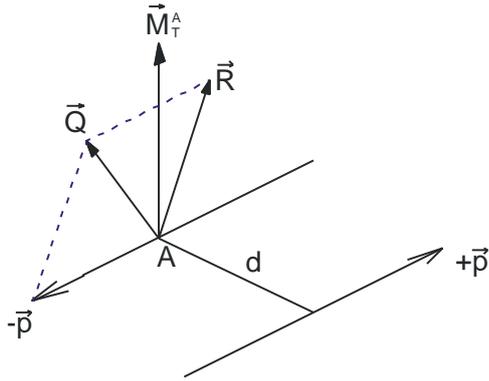
Sistema equivalente a dos vectores polares:

Fig. 44

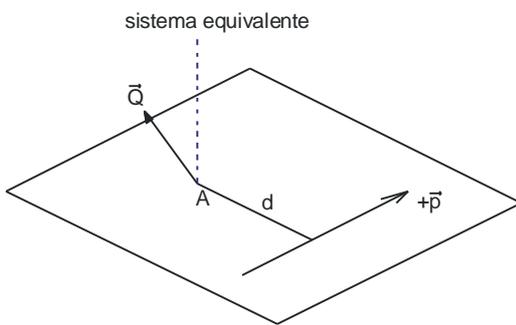


Fig. 45

El sistema de vectores equivalente en el punto **A** está formado por el vector polar \vec{R} (la resultante general) y el vector axial \vec{M}_T^A (el momento resultante respecto de ese punto).

Puede eliminarse el vector axial, sustituyéndolo por el par $(-\vec{p}, +\vec{p})$, de manera que el sistema de vectores queda reducido a solo dos: el vector \vec{Q} en **A** y el vector $+\vec{p}$ a la distancia d y situado en un plano perpendicular a \vec{M}_T^A .

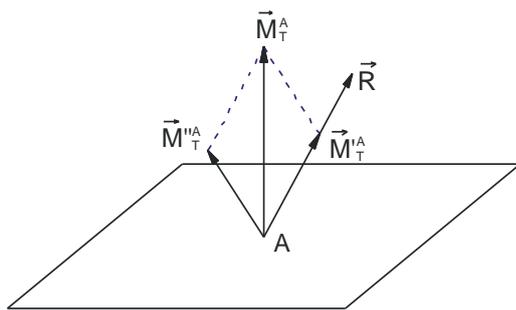
Sistema equivalente a un torsor:

Fig. 46

El sistema de vectores equivalente en el punto **A** formado por la resultante \vec{R} y el momento resultante \vec{M}_T^A puede ser sustituido por otro sistema equivalente, consistente en un momento y una resultante, con la misma dirección, denominado **"torsor"**.

Para ello, se descompone el momento en una componente en la dirección de la resultante,

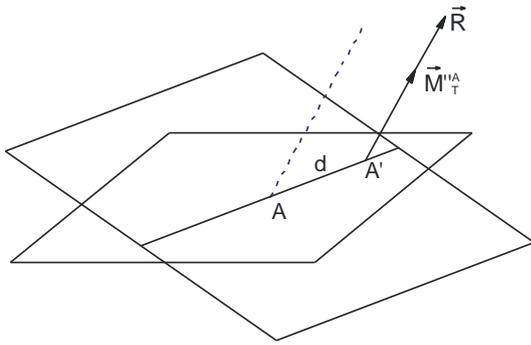


Fig. 47

\vec{M}_T^A , y otra en el plano perpendicular a ésta, \vec{M}'_T^A .

Desplazando el punto de aplicación de la resultante una distancia d (sobre un plano perpendicular a \vec{R}), tal que: $\vec{M}'_T^A = \vec{d} \times \vec{R}$ se tiene el sistema reducido a un vector polar \vec{R} en el punto A' y un vector axial \vec{M}'_T^A con la misma dirección y en el mismo punto.

En este caso, el punto A' será un punto del eje central.

2.3.7.- Sistema de vectores concurrentes:

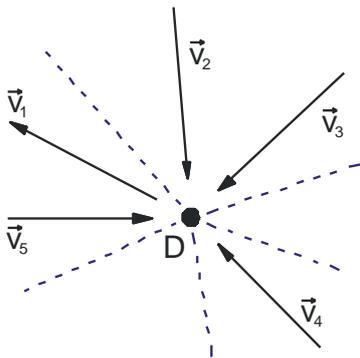


Fig. 48

En un sistema de este tipo, el momento resultante respecto del punto de concurrencia D es cero.

En consecuencia, el momento mínimo tendrá este mismo valor. Por tanto, el eje central será la recta que pasando por D sea paralela a la resultante.

Teorema de Varignon: El momento resultante de un sistema de vectores concurrentes, respecto de cualquier punto A , es igual al momento producido por la resultante aplicada en el punto de concurrencia D , respecto de dicho punto A .

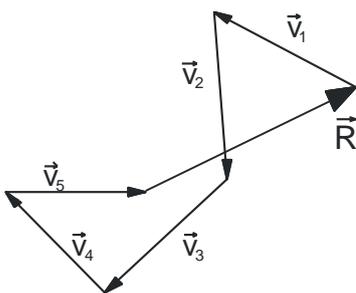


Fig. 49

2.3.8.- Sistema de vectores paralelos:

(Un sistema de este tipo es igual que el anterior, sólo que en este caso el punto de concurrencia está en el infinito) (punto impropio).

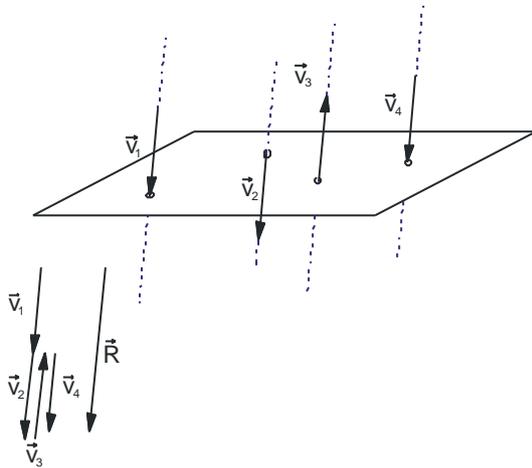


Fig. 50

En estos sistemas, el momento mínimo también es cero, pues el momento resultante respecto a cualquier punto siempre será un vector perpendicular a la resultante.

En consecuencia, el momento resultante de un sistema de vectores paralelos, respecto de un punto cualquiera A , es igual al momento producido por la resultante supuesta situada en el eje central, respecto de dicho punto.

La ubicación del eje central de estos sistemas puede calcularse del modo siguiente:

Llamando:

$\mathbf{p}_1(x_1, y_1, z_1); \mathbf{p}_2(x_2, y_2, z_2); \mathbf{p}_3(x_3, y_3, z_3)$ las coordenadas de los puntos de aplicación de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (mejor de la intersección de sus líneas de acción con un plano π) y $\mathbf{G}(x_g, y_g, z_g)$ las coordenadas del punto de intersección del eje central con el mismo plano π , se tiene:

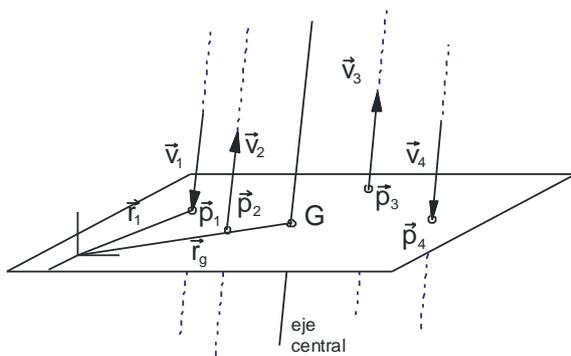


Fig. 51

$$\bar{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{v}}_i$$

$$\bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{r}}_g = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{v}}_i \times \bar{\mathbf{r}}_i$$

En módulo, puede escribirse:

$$\begin{aligned} |\vec{R}| \cdot |\vec{r}_g| &= \left| \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \right| \cdot |\vec{r}_i| \\ |\vec{r}_g| &= \frac{\sum_{i=1}^n |\vec{v}_i| \cdot |\vec{r}_i|}{|\vec{R}|} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el valor de las componentes de \vec{r}_g y \vec{r}_i e igualando, se obtiene:

$$X_g = \frac{\sum_{i=1}^n v_i x_i}{|\vec{R}|} ; Y_g = \frac{\sum_{i=1}^n v_i y_i}{|\vec{R}|} ; Z_g = \frac{\sum_{i=1}^n v_i z_i}{|\vec{R}|}$$

La ecuación del eje central, si la dirección de los vectores \vec{v}_i viene dada por el versor $\mathbf{u} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$:

$$\frac{x - x_g}{\cos \alpha} = \frac{y - y_g}{\cos \beta} = \frac{z - z_g}{\cos \gamma}, \text{ es decir: } \frac{x - \frac{\sum_{i=1}^n v_i x_i}{\sum_{i=1}^n v_i}}{\cos \alpha} = \frac{y - \frac{\sum_{i=1}^n v_i y_i}{\sum_{i=1}^n v_i}}{\cos \beta} = \frac{z - \frac{\sum_{i=1}^n v_i z_i}{\sum_{i=1}^n v_i}}{\cos \gamma}$$

NOTA 13: Si en lugar de vectores deslizantes, estos fueran vectores ligados (lo que equivaldría a decir que los puntos p_1, p_2, \dots, p_i no estarían todos en el mismo plano), también existiría en este caso un eje central.

Además, si todos los vectores \vec{v}_i se girasen con un mismo ángulo θ , en planos paralelos, el nuevo eje central se cortaría con el anterior en un punto G, denominado "*centro de vectores*".

Este *centro de vectores* es fijo y, sólo depende de los puntos de aplicación de los vectores y no del valor de estos.

2.3.9.- Sistemas de vectores coplanarios paralelos:

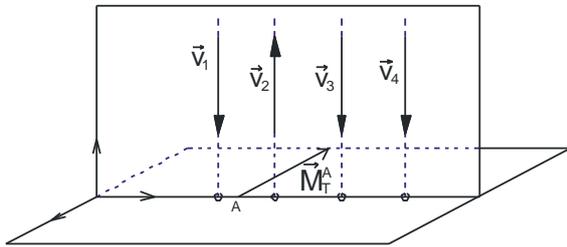


Fig. 52

Al igual que en los casos anteriores, en estos sistemas el momento resultante de todos los vectores, respecto de un punto cualquiera A del plano, es un vector normal a éste, por lo que su proyección sobre la resultante es nula y, por tanto, será cero el valor del momento mínimo.

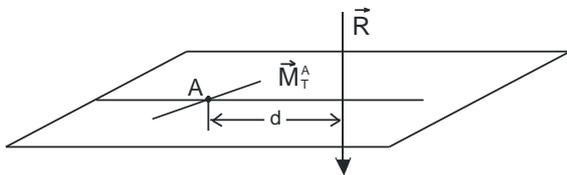


Fig. 53

El momento resultante respecto de cualquier punto será igual al momento de la resultante, supuestamente localizada en el eje central, respecto de tal punto.

Si se conoce el momento resultante respecto de un punto A , (M_T^A) el eje central se

encuentra a una distancia $d = \frac{|M_T^A|}{|R|}$ de A

2.3.10.- Vectores coplanarios en cualquier dirección: Polígono funicular:

Sean los vectores coplanarios $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ y \vec{v}_4 , cuya resultante es \vec{R} :

$$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$$

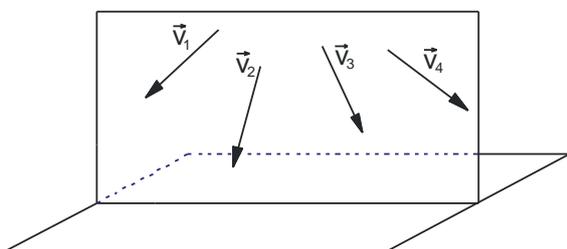


Fig. 54

En forma gráfica puede determinarse la resultante general, la posición del eje central y el momento del sistema respecto de cualquier punto, por medio del llamado polígono funicular.

La resultante general se calcula con el polígono vectorial (como se ve en la figura

54).

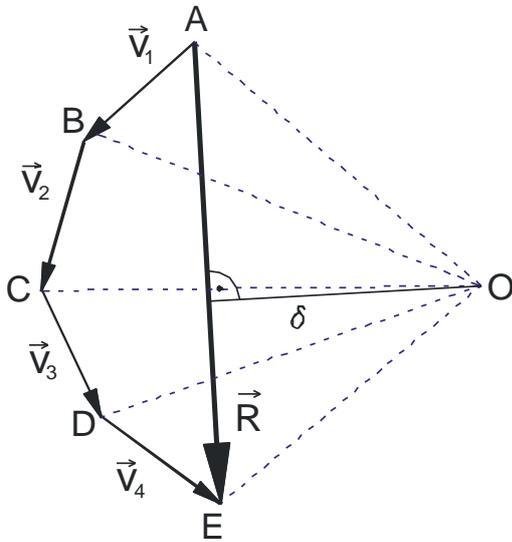
Polígono de vectores:

Fig. 55

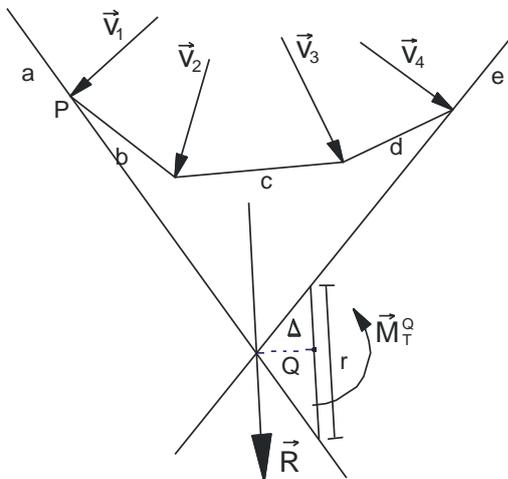
Polígono funicular:

Fig. 56

La posición de la resultante se determina del modo siguiente:

1°.- En el polígono vectorial se elige un polo arbitrario O que se une con los puntos A, B, C, D y E .

2°.- Por un punto arbitrario P del sistema de vectores se trazan las líneas (y segmentos) a, b, c, d y e , paralelas respectivas a OA, OB, OC, OD y OE .

3°.- Se prolongan las líneas extremas a y e hasta que se cortan. El punto de intersección determina la posición de la resultante y también la del eje central del sistema (si se hubiera elegido otro punto diferente al P , el polígono funicular sería semejante al anterior y, la intersección de las direcciones a y e , también se cortarían sobre \vec{R}

4°.- El momento respecto de un punto Q vale $|\vec{M}_T^Q| = \Delta \cdot |\vec{R}|$, con la dirección que se muestra en la figura.

También puede calcularse el momento respecto de Q como $|\vec{M}_T^Q| = \delta \cdot r$, (siendo r el segmento que se muestra en la figura 56).

3.- FUNCIONES VECTORIALES.-

3.1.- TIPOS DE FUNCIONES VECTORIALES.-

a) Función vectorial de una variable escalar (u):

Se define así a la función que asigna un vector \vec{v} a cada valor del escalar u .

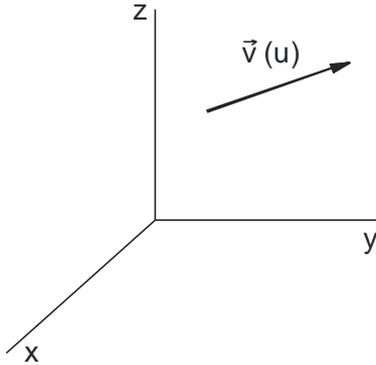


Fig. 57

$$\vec{v} = \vec{v}(u)$$

Los conceptos de límite y continuidad se estudian igual que para funciones escalares.

b) Función vectorial de dos (o más) variables escalares (u, w):

Se define por: $\vec{v} = \vec{v}(u, w)$

Para cada dos valores, u y w , se obtiene un valor de \vec{v} .

c) Función vectorial de punto, dependiendo de una variable escalar (u):

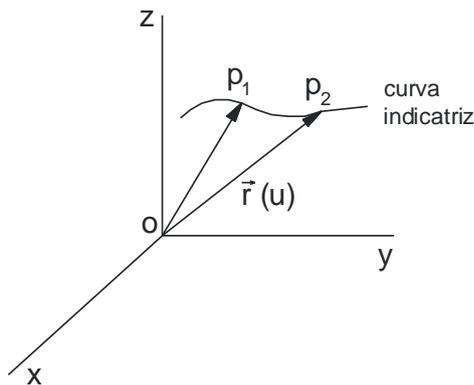


Fig. 58

Es un concepto diferente de los anteriores. Ahora, el vector \vec{r} es un vector que parte siempre del origen de coordenadas y representa la posición de un punto en el espacio.

En consecuencia, la función $\vec{r} = \vec{r}(u)$ representa una curva, en general alabeada, llamada "*indicatriz*".

Cada valor de u significa un punto de la curva.

En coordenadas cartesianas;

$$\vec{r} = r_x(u) \vec{i} + r_y(u) \vec{j} + r_z(u) \vec{k}$$

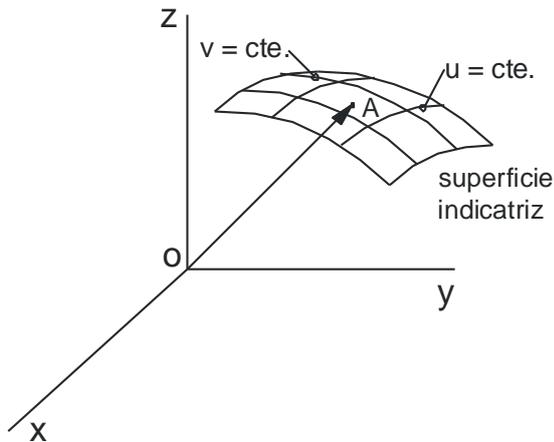
d) **Función vectorial de punto, dependiendo de dos variables escalares (u, v):**

Fig. 59

$$\vec{r} = \vec{r}(u, w)$$

El vector \vec{r} representa la posición de un punto que describe una superficie en el espacio, llamada "**superficie indicatriz**".

En coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = r_x(u, w)\vec{i} + r_y(u, w)\vec{j} + r_z(u, w)\vec{k}$$

Para valores de $u = \text{cte.}$ o $w = \text{cte.}$, la función depende de una sola variable, y sus indicatrices constituyen dos familias de curvas contenidas en la superficie.

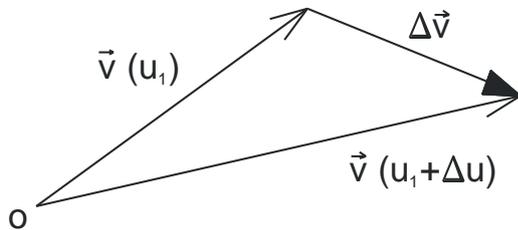
3.2.- DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL.-**a) Función vectorial de una variable escalar:**

Fig. 60

$$\vec{v} = v_x(\mathbf{u}) \vec{i} + v_y(\mathbf{u}) \vec{j} + v_z(\mathbf{u}) \vec{k}$$

Si el escalar \mathbf{u} recibe un incremento $\Delta \mathbf{u}$, la función vectorial también se incrementa $\Delta \vec{v}$.

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \vec{i} + \Delta v_y \vec{j} + \Delta v_z \vec{k}$$

(no escribiendo (\mathbf{u}) para simplificar)

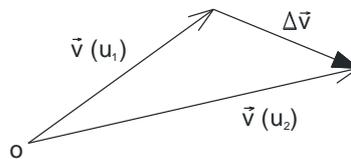
Dividiendo por $\Delta \mathbf{u}$ y tomando el límite cuando $\Delta \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$, se tiene:

$$\frac{d\vec{v}}{d\mathbf{u}} = \frac{dv_x}{d\mathbf{u}} \vec{i} + \frac{dv_y}{d\mathbf{u}} \vec{j} + \frac{dv_z}{d\mathbf{u}} \vec{k},$$

que es la derivada de la función vectorial.

(Obsérvese que la derivada de un vector se debe, tanto a su posible cambio de módulo, como sólo de dirección o, en ambos efectos, simultáneamente).

Geoméricamente, si la única variación fuese un cambio de dirección, la derivada sería un vector perpendicular al vector \vec{v} en cada punto (pues en el límite, $\Delta \vec{v}$ será perpendicular).



En el caso de que la función vectorial sea el producto de una función escalar $\alpha(\mathbf{u})$ por la función vectorial:

$$\vec{v} = \alpha(\mathbf{u}) \cdot \vec{v}(\mathbf{u})$$

al incrementarse un $\Delta \mathbf{u}$, se tendrá:

$$\Delta \vec{v} = (\alpha + \Delta \alpha) \cdot (\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) - \alpha \mathbf{v} = \alpha \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \Delta \alpha + \Delta \alpha \Delta \mathbf{v}$$

con lo cual, la derivada queda (despreciando $\Delta \alpha \Delta \mathbf{v}$)

$$\frac{d(\alpha \mathbf{v})}{du} = \alpha \frac{d\mathbf{v}}{du} + \mathbf{v} \frac{d\alpha}{du}$$

En el caso que la función vectorial sea el producto (escalar o vectorial) de dos funciones vectoriales de variable escalar, se tendrá:

$$\frac{d(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)}{du} = \vec{v}_1 \cdot \frac{d\vec{v}_2}{du} + \vec{v}_2 \cdot \frac{d\vec{v}_1}{du}$$

$$\frac{d(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}{du} = \vec{v}_1 \times \frac{d\vec{v}_2}{du} + \frac{d\vec{v}_1}{du} \times \vec{v}_2$$

b) Función vectorial de dos (o más) variables escalares:

$$\vec{v} = v_x(u, w) \vec{i} + v_y(u, w) \vec{j} + v_z(u, w) \vec{k}$$

Definiéndose las dos derivadas parciales:

$$\frac{\delta \vec{v}}{\delta u} = \frac{\delta v_x}{\delta u} \vec{i} + \frac{\delta v_y}{\delta u} \vec{j} + \frac{\delta v_z}{\delta u} \vec{k}$$

$$\frac{\delta \vec{v}}{\delta w} = \frac{\delta v_x}{\delta w} \vec{i} + \frac{\delta v_y}{\delta w} \vec{j} + \frac{\delta v_z}{\delta w} \vec{k}$$

c) Función vectorial de punto, dependiendo de una variable escalar:

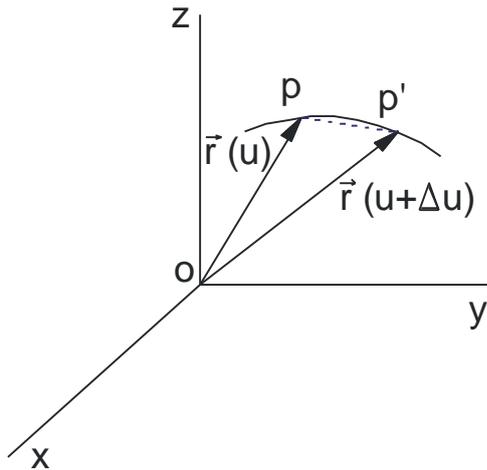


Fig. 61

Si la función $\vec{r} = \vec{r}(\mathbf{u})$ es continua y derivable, al dar una pequeña variación al escalar \mathbf{u} , se tendrá:

$$\overrightarrow{pp'} = \vec{r}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) - \vec{r}(\mathbf{u})$$

con lo cual, la derivada valdrá:

$$\lim_{\Delta\mathbf{u} \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{pp'}}{\Delta\mathbf{u}} = \lim_{\Delta\mathbf{u} \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) - \vec{r}(\mathbf{u})}{\Delta\mathbf{u}} = \frac{d\vec{r}(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} \equiv \vec{r}'(\mathbf{u})$$

Gráficamente, la derivada de la función $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ en el punto \mathbf{P} es un vector tangente a la *curva indicatriz* en ese punto.

Si la función vectorial de punto \mathbf{r} es el producto de una función escalar $\alpha(\mathbf{u})$ por la función vectorial $\vec{r}(\mathbf{u})$, se tendrá:

$$\vec{r} = \alpha(\mathbf{u}) \cdot \vec{r}(\mathbf{u}) \qquad \frac{d\vec{r}}{d\mathbf{u}} = \frac{d\alpha}{d\mathbf{u}} \vec{r} + \alpha \frac{d\vec{r}}{d\mathbf{u}}$$

Si la función vectorial de punto \mathbf{r} es el producto (escalar o vectorial) de dos funciones vectoriales de punto $\vec{r}_1(\mathbf{u})$ y $\vec{r}_2(\mathbf{u})$, se tendrá:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \qquad \frac{d\vec{r}}{d\mathbf{u}} = \frac{d\vec{r}_1}{d\mathbf{u}} \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \frac{d\vec{r}_2}{d\mathbf{u}}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \qquad \frac{d\vec{r}}{d\mathbf{u}} = \frac{d\vec{r}_1}{d\mathbf{u}} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2}{d\mathbf{u}}$$

- **Coordenadas cartesianas :**

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

(no escribiendo el escalar u , para simplificar):

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{dr_x}{du} \vec{i} + \frac{dr_y}{du} \vec{j} + \frac{dr_z}{du} \vec{k}$$

- **Coordenadas cilíndricas :**

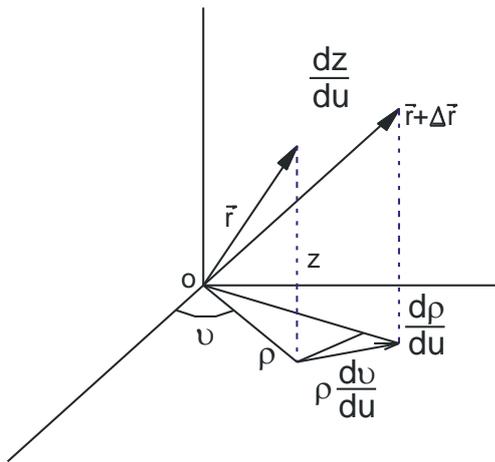


Fig. 62

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{\rho}_0 + z \cdot \vec{z}_0$$

Al derivar respecto de u , y teniendo en cuenta que el versor $\vec{\rho}$ cambia de dirección con θ , queda:

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{d\rho}{du} \vec{\rho}_0 + \rho \frac{d\theta}{du} \vec{\theta}_0 + \frac{dz}{du} \vec{z}_0$$

- **Coordenadas esféricas :**

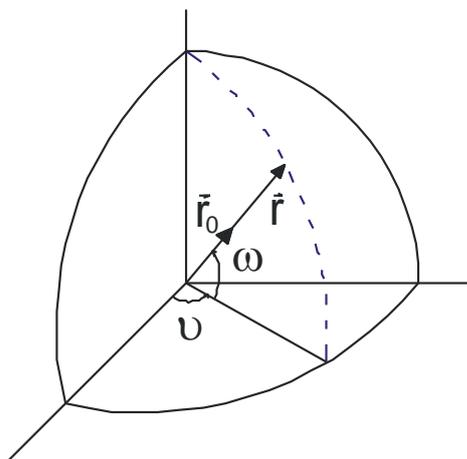


Fig. 63

$$\vec{r} = r \cdot \vec{r}_0$$

Al derivar respecto de u , hay que tener en cuenta que el versor \vec{r}_0 varía con θ y con φ , de manera que se tendrá:

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{dr}{du} \vec{r}_0 + r \cos \varphi \frac{d\theta}{du} \vec{\theta}_0 + r \frac{d\varphi}{du} \vec{\phi}_0$$

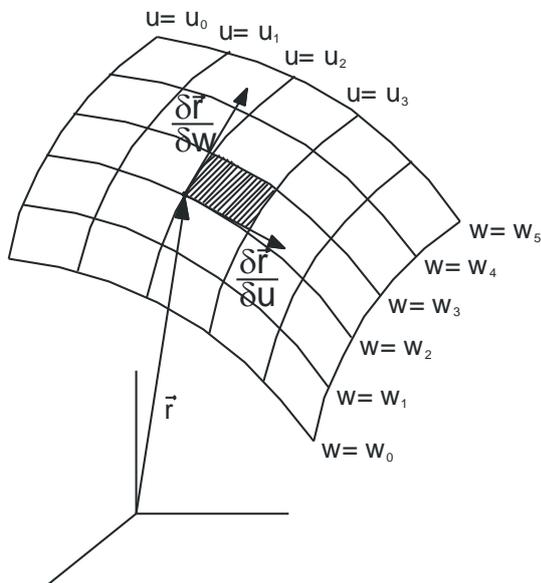
d) Función vectorial de punto, dependiendo de dos variables escalares:

Fig. 64

Si la función $\vec{r} = \vec{r}(u, w)$ es continua y derivable, se podrán definir las dos derivadas parciales:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(u + \Delta u, w) - \vec{r}(u, w)}{\Delta u}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(u, w + \Delta w) - \vec{r}(u, w)}{\Delta w}$$

En coordenadas cartesianas, si

$$\vec{r} = r_x(u, w)\vec{i} + r_y(u, w)\vec{j} + r_z(u, w)\vec{k}$$

la diferencial total de la función vendrá dada por:

$$\overrightarrow{ds} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw$$

siendo \overrightarrow{ds} el arco elemental, sobre la superficie indicatriz, que une los dos puntos correspondientes a (u, w) y $(u + du, w + dw)$.

4.- TEORÍA DE CAMPOS.-**4.1.- CAMPOS ESCALARES.-****4.1.1.- Concepto y representación geométrica.**

a) **Concepto:** Una región del espacio donde a cada punto de la misma se le puede hacer corresponder, según una cierta propiedad, un escalar, constituye un campo escalar.

Ejemplo: En la región "interior de una habitación" y, según la propiedad "temperatura", podemos asignar a cada punto de ese espacio un número (la temperatura en ese punto).

Matemáticamente, y usando coordenadas cartesianas, a cada punto $\mathbf{p}_1(x_1, y_1, z_1); \mathbf{p}_2(x_2, y_2, z_2); \dots; \mathbf{p}_i(x_i, y_i, z_i)$, le corresponde un escalar:

$$\mathbf{p}_1 \rightarrow u_1$$

$$\mathbf{p}_2 \rightarrow u_2$$

.....

$$\mathbf{p}_i \rightarrow u_i$$

Esta correspondencia puede establecerse mediante una función explícita o implícita:

$$f(x, y, z) = U \quad \text{explícita}$$

$$g(x, y, z, U) = 0 \quad \text{implícita}$$

De manera que para cada punto (terna de valores $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i$) se obtiene el valor del escalar U que representa el valor del campo en ese punto.

Ejemplo: La función $3xy + 2yz - 4z = U$, que define la propiedad "temperatura" en la región en que existe esta función matemática, nos indica cuál es el escalar "temperatura" en cada punto.

$$P(0, 0, 0) \rightarrow U_0 = 0$$

$$P(1, 1, 1) \rightarrow U_1 = 1$$

$$P(2, 2, 2) \rightarrow U_2 = 4$$

.....

Naturalmente, para el estudio de este tipo de campos, la "propiedad" no tiene importancia que se explicita o no.

Si el escalar que corresponde a cada punto es invariable en el tiempo, el campo se llama estacionario. Caso contrario, variable o no estacionario.

En éste último caso, la función que lo define incluye la variable "tiempo".

$$U = f(x, y, z, t)$$

a) **Representación geométrica. Superficies y líneas equiescalares:**

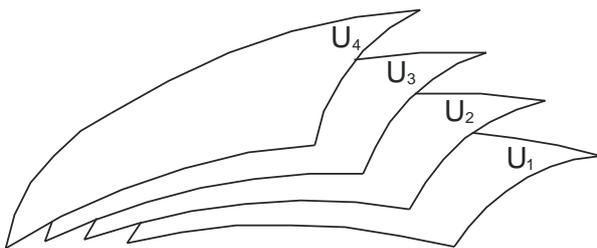


Fig. 65

En los campos escalares, el lugar geométrico de los puntos en los que éste tiene el mismo valor, se denominan **superficies equiescalares**.

Matemáticamente: $f(x, y, z) = \text{cte.}$

En la práctica, el campo escalar se representa por un haz de superficies equiescalares, correspondientes a saltos discretos e iguales en el valor de la función. Por supuesto, el haz de superficies de nivel carece de "saltos", de manera que por cada punto del espacio pasa una línea de nivel.

Sin embargo, al dibujarlas de forma que difieran una de la otra en una cantidad idéntica para todas, permite una visualización rápida e intuitiva de la forma del campo, de manera que en las dos zonas en que las superficies están más próximas, la variación del campo es más rápida y, viceversa. Evidentemente, dos superficies equiescalares diferentes no pueden tener ningún punto en común.

NOTA 14: En el caso de campos escalares "*planos*", en los que la función representa la cota de los puntos (x, y) de un plano, las superficies equipotenciales quedan reducidas a líneas equiescalares o, "*líneas de nivel*". La proyección de estas líneas sobre el plano de referencia dan lugar a un conjunto de líneas (siempre cerradas) denominadas *curvas de nivel*. Su proximidad indica una mayor pendiente.

Evidentemente, la cota que separa cada dos líneas de nivel, es una cantidad constante e igual para todas.

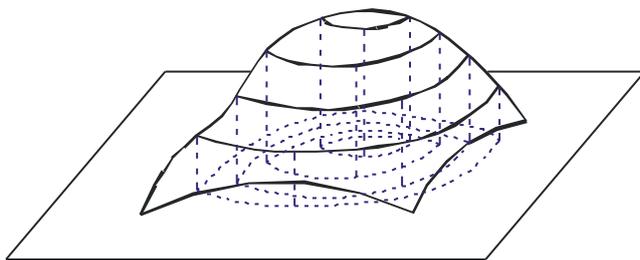


Fig. 66

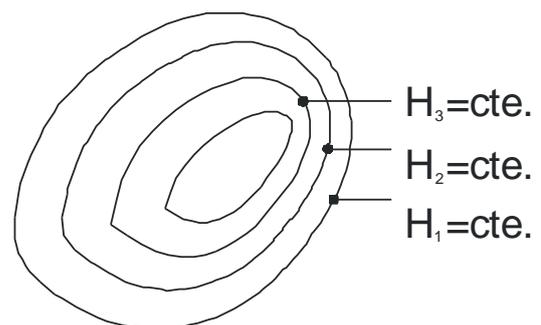


Fig. 67

4.1.2.- Variación de los escalares del campo.**4.1.2.1.- Gradiente.**

a) Introducción: En los campos escalares interesa conocer como varía éste de un punto a otro del mismo. Pues bien, el gradiente del campo permite conocer esta variación. La figura representa las líneas de nivel de un campo escalar plano representado por la función:

$$z = f(x, y)$$

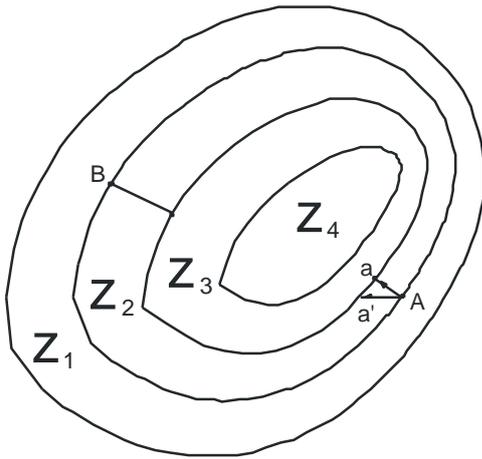


Fig. 68

Visualmente se comprueba que la variación del campo escalar (la pendiente) no es la misma en todos sus puntos (por ejemplo, es más alta en **A** que en **B**: las líneas de nivel próximas están más justas en el primer caso) y, además, que la pendiente en **A** depende de la dirección en que se tome la misma (es más alta en la dirección **Aa** que en la **Aa'**). En consecuencia, la variación de un campo escalar, en cada punto, ha de representarse por un vector (con su correspondiente módulo, dirección y sentido).

b) Gradiente.-

Suponiendo un campo escalar representado por la función continua y derivable

$$U = U(x, y, z)$$

Una variación infinitesimal de esta función (a lo largo de un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$), puede escribirse:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

Expresión que también puede ponerse como el producto escalar:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k})$$

Siendo $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$, el vector representativo del desplazamiento infinitesimal efectuado y

$$\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \overrightarrow{\text{grad } U}$$

un vector denominado gradiente de la función escalar U . De esta forma, la variación elemental de la función U queda definida en función de los vectores $\overrightarrow{\text{grad } U}$ y $d\vec{r}$ (como su producto escalar)

$$dU = \overrightarrow{\text{grad } U} \cdot d\vec{r}$$

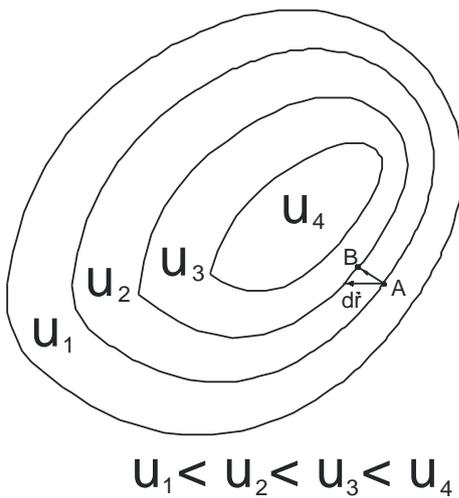


Fig. 69

Como el desplazamiento $d\vec{r}$ puede ser totalmente arbitrario, el $\overrightarrow{\text{grad } U}$ no puede definirse por el cociente $dU/d\vec{r}$

Sin embargo, estableciendo la condición de que la dirección del $\overrightarrow{\text{grad } U}$ sea la de máxima variación del campo (en cada punto), y que su sentido sea el de valores crecientes de éste, entonces el valor del $\overrightarrow{\text{grad } U}$ si queda unívocamente definido.

Gráficamente y, en referencia al campo escalar plano de la figura 69, se observa que la máxima variación de la función (en el punto A) tiene la dirección de la perpendicular a las líneas de nivel (dirección AB).

El módulo del $\overrightarrow{\text{grad } U}$ puede calcularse a partir

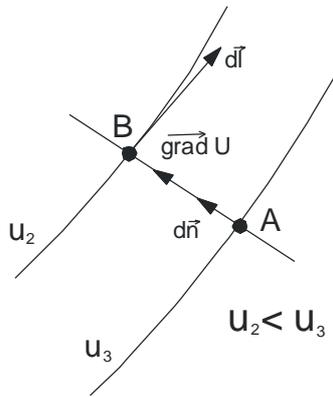


Fig. 70

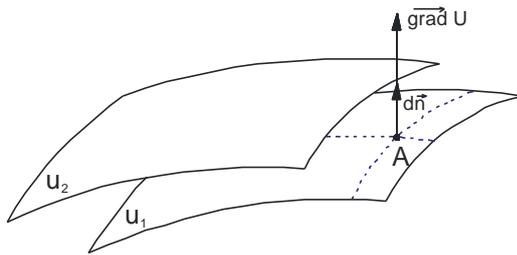


Fig. 71

de la expresión:

$$dU = |\overrightarrow{\text{grad } U}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \theta$$

Esta expresión será máxima cuando $\cos \theta = 1$, es decir, cuando $d\vec{r}$ coincida con el $\overrightarrow{\text{grad } U}$ o, también, cuando $d\vec{r}$ coincida con el $|d\vec{n}|$ (vector normal a la línea de nivel en el punto A).

Entonces,
$$|\overrightarrow{\text{grad } U}| = \frac{dU}{|d\vec{n}|}$$

En definitiva, en cada punto de un campo escalar queda definido un vector denominado gradiente del campo ($\overrightarrow{\text{grad } U}$) que, físicamente representa la variación más rápida del campo en ese punto.

Su módulo es $\left| \frac{dU}{d\vec{n}} \right|$, su dirección, la perpendicular en ese punto a la superficie equipotencial correspondiente y su sentido, el de los potenciales crecientes

En coordenadas cartesianas, su módulo viene dado por:

$$|\overrightarrow{\text{grad } U}| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

y su dirección, por los cosenos directores

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{|\overrightarrow{\text{grad } U}|}; \quad \cos \beta = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{|\overrightarrow{\text{grad } U}|}; \quad \cos \gamma = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{|\overrightarrow{\text{grad } U}|}$$

(Obviamente, las expresiones anteriores se calcularán para cada punto del campo, dado por las tres coordenadas x, y, z).

NOTA 15: En los campos escalares planos, en los que pueden determinarse las líneas de nivel, es fácil de ver que el vector $\overrightarrow{\text{grad } U}$ y el vector $d\vec{l}$ (desplazamiento elemental sobre la línea de nivel), son perpendiculares.

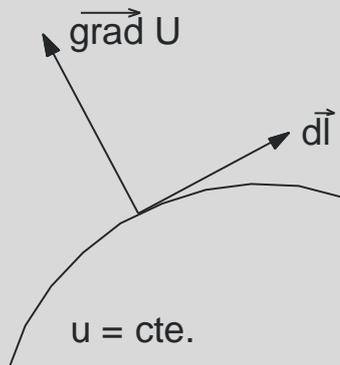


Fig. 72

En efecto, por definición de la línea de nivel, la variación del campo a lo largo de la misma es cero, por lo que:

$$dU = \overrightarrow{\text{grad } U} \cdot d\vec{l} = 0$$

Que indica la perpendicularidad entre $\overrightarrow{\text{grad } U}$ y $d\vec{l}$.

NOTA 16: Obsérvese que el gradiente es una derivada del campo respecto de un desplazamiento. Por tanto, las dimensiones de este vector son las del campo (el que sea, temperatura por ejemplo) dividido por una longitud.

NOTA 17: El gradiente puede considerarse un "operador diferencial". En efecto, denominando "nabla" ($\vec{\nabla}$) al vector simbólico

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

El $\overrightarrow{\text{grad } U}$ puede expresarse:

$$\overrightarrow{\text{grad } U} = \vec{\nabla} U \quad (\text{nabla de } U)$$

NOTA 18: Aún cuando no se demuestre aquí, el vector $\overrightarrow{\text{grad } U}$ es un invariante del campo escalar (su módulo, dirección y sentido no dependen de los sistemas de coordenadas elegidos para su formulación matemática).

4.1.2.2.- Derivada direccional.

Conociendo el gradiente del campo en un punto, es fácil conocer la variación de éste en cualquier dirección que se desee.

En efecto:

$$dU = \overrightarrow{\text{grad } U} \cdot d\vec{r}$$

$$dU = \left| \overrightarrow{\text{grad } U} \right| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \theta$$

De donde puede obtenerse la variación de la función U en la dirección de $d\vec{r}$.

$$\frac{dU}{|d\vec{r}|} = \left| \overrightarrow{\text{grad } U} \right| \cdot \cos \theta$$

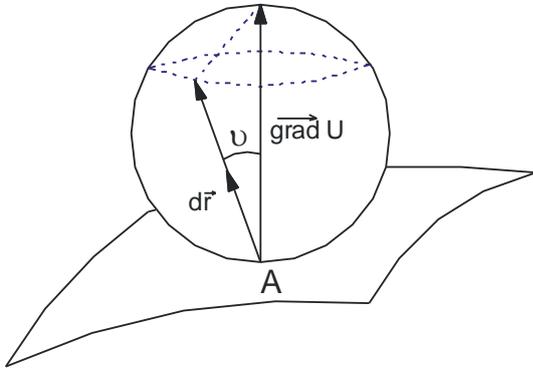


Fig. 73

Igualdad que expresa que para calcular la derivada del campo escalar en una dirección dada (a partir del punto considerado), basta con proyectar el vector gradiente en esa dirección.

4.2.- CAMPOS VECTORIALES. -**4.2.1.- Concepto y representación geométrica.****a) Concepto:**

Una región del espacio donde a cada punto de la misma se le puede hacer corresponder, según una cierta propiedad, un vector, constituye un campo vectorial.

Ejemplo: En el espacio interplanetario, sobre una masa (unidad) se origina una fuerza (por el efecto de los astros circundantes). En consecuencia, según la propiedad "fuerza", a cada punto del espacio se le puede asignar un vector (fuerza), determinado en módulo, dirección y sentido. El espacio interplanetario constituye un campo vectorial.

Matemáticamente y, usando coordenadas cartesianas, a una serie de puntos $p_1(x_1, y_1, z_1)$; $p_2(x_2, y_2, z_2)$; $p_i(x_i, y_i, z_i)$, le corresponde un vector:

$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow \vec{v}_1 \\ p_2 &\rightarrow \vec{v}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ p_i &\rightarrow \vec{v}_i \end{aligned}$$

Esta correspondencia puede establecerse mediante una función vectorial de variable escalar: $\vec{v} = f(x, y, z)$

De manera que, a cada punto (terna de valores x_1, y_1, z_1), le corresponde un vector \vec{v} que representa el valor del campo en ese punto.

En coordenadas cartesianas se suele representar este tipo de funciones en la forma

$$\vec{v} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$$

Siendo: $X = X(x, y, z)$; $Y = Y(x, y, z)$; $Z = Z(x, y, z)$

Ejemplo: La función $\vec{v} = 2xy\vec{i} + xyz\vec{j} + 4xz\vec{k}$, en la que $X = 2xy$, $Y = xyz$ y $Z = 4xz$ que define la fuerza sobre la unidad de masa en cada punto de una cierta región nos indica cuál es el vector del campo en cada punto:

$$P_0 (0, 0, 0) \rightarrow \vec{V}_0 = 0$$

$$P_1 (1, 1, 1) \rightarrow \vec{V}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$

$$P_2 (2, 2, 2) \rightarrow \vec{V}_2 = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

Naturalmente, para el estudio de este tipo de campos, la "propiedad" no tiene importancia el que sea conocida y explicitada.

Si el vector que corresponde a cada punto es invariable en el tiempo, se trata de un campo vectorial estacionario. Caso contrario, variable o no estacionario. En este último caso, la función que define el campo incluye la variable tiempo

$$\vec{v} = f(x, y, z, t)$$

NOTA 19: Se llama intensidad del campo en un punto al módulo del vector campo en ese punto. Según esto, el conjunto de las intensidades de un campo vectorial constituyen un campo escalar.

NOTA 20: Los gradientes en cada punto de un campo escalar constituyen un campo vectorial. En estos campos vectoriales, al campo escalar que lo genera se le llama "potencial escalar".

b) Representación geométrica. Líneas de campo:

Los campos vectoriales pueden representarse gráficamente por las "**líneas de campo**" y por el número de éstas, representadas por unidad de superficie normal a las líneas.

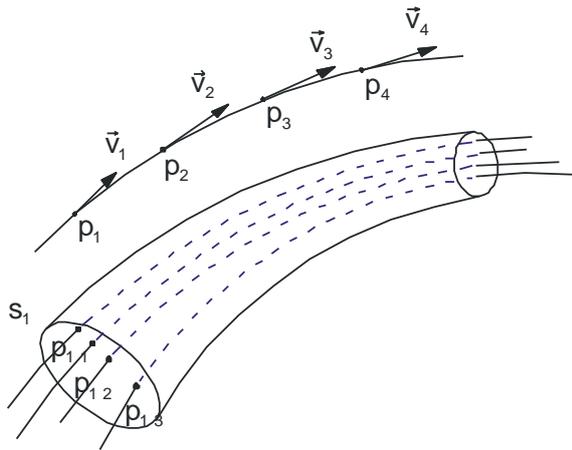


Fig. 74

Las **líneas de campo** pueden visualizarse trazando, a partir de un punto P_1 , un pequeño segmento en la dirección del vector campo en ese punto.

A partir del extremo de ese segmento (P_2) se traza otro, con la dirección del campo en P_2 y así sucesivamente.

Se obtiene así una curva que representa la "**línea de campo**".

Tomando una superficie circular de área S_1 con centro en P_1 , normal a la línea de campo previamente definida, se dibujan n puntos P_{1n} , origen de otras n líneas, uniformemente repartidos por toda la superficie.

Este número n se toma proporcional a la intensidad del campo en ese punto (producto del módulo del vector por el área).

En la figura 74 se observa que el resultado es un "**tubo vectorial**" que representa la dirección y la intensidad del campo en la zona encerrada por él. Puede observarse que en P_4 , la intensidad de campo es mayor y, las líneas están más juntas (así, se puede ver la dirección e intensidad del campo vectorial, sin necesidad de dibujar vectores del mismo).

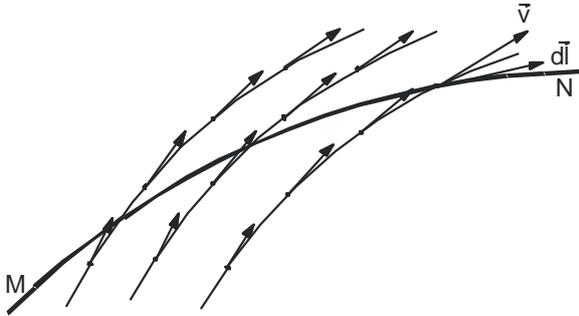
4.2.2.- Circulación de un campo vectorial.-

Fig. 75

En un campo vectorial definido por:

$$\vec{V} = \vec{V}(X, Y, Z)$$

$$\vec{V} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

Si se toma una curva cualquiera **MN**, en el interior del campo, se denomina circulación del campo a lo largo de la línea **MN** al escalar resultado de la integral curvilínea:

$$C = \int_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

Siendo $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, el elemento de arco tomado sobre dicha línea.

En general, en un campo vectorial cualquiera, el valor de ésta integral depende tanto de los extremos **M** y **N** como del camino recorrido.

NOTA 21: Si el campo vectorial fuera un campo de fuerzas (sobre una masa por ejemplo), la circulación a lo largo de **M-N** sería el trabajo desarrollado, sobre esa masa, por el campo.

NOTA 22: En los campos vectoriales formados por los gradientes de un campo escalar (campos potenciales), la circulación entre dos puntos sólo depende de

los valores extremos y no del camino recorrido y la integral curvilínea a lo largo de una curva cerrada, es cero. (Todas estas particularidades serán abordadas cuando se estudien estos campos).

4.2.3.- Flujo en un campo vectorial.-

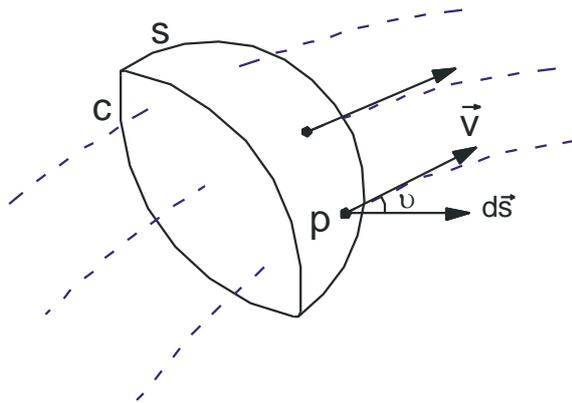


Fig. 76

Sea el campo vectorial

$$\vec{V} = \vec{V}(X, Y, Z)$$

$$\vec{V} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

Considerando una superficie cualquiera **S**, apoyada sobre la línea **C**, y sobre ella un punto **P**, alrededor del cual se toma la superficie elemental **ds**, representada por el vector **ds** (normal a la superficie en ese punto), se denomina flujo elemental del campo a través de **ds**, a:

$$d\phi = \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

El flujo a través de toda la superficie será:

$$\phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

En coordenadas cartesianas, el flujo puede ponerse:

$$\vec{ds} = dy dz \vec{i} + dx dz \vec{j} + dx dy \vec{k}$$

$$\phi = \iint_S (X dy dz + Y dx dz + Z dx dy)$$

El flujo es máximo cuando el campo es perpendicular a la superficie (\vec{V} y \vec{ds} paralelos) y nulo cuando el campo es paralelo a la superficie.

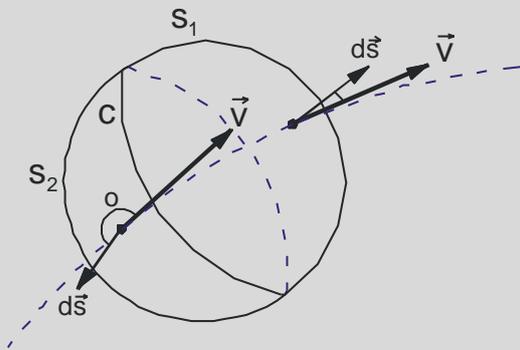
Si la superficie **S** es normal a las líneas de campo, es decir, si $\cos \theta = 1$:

$$d\phi = |\vec{V}| \cdot |d\vec{s}|$$

de donde se deduce la intensidad del campo en un punto como el flujo del mismo por unidad de superficie

$$|\vec{V}| = \frac{d\phi}{|d\vec{s}|}$$

NOTA 23: Si se toman dos superficies S_1 y S_2 , sobre una misma línea de contorno C , formando el conjunto una superficie cerrada, el flujo total que la atraviesa será:



$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

Fig. 77

Si $\phi = 0$, quiere decir que el flujo entrante es igual al saliente y se está en presencia de un "campo conservativo".

Si $\phi \neq 0$, el flujo entrante es diferente del saliente; de manera que el interior del volumen encerrado por la superficie se generan nuevos vectores del campo (o desaparecen). Se dice que existen manantiales o sumideros. (Estos aspectos serán abordados más adelante).

4.2.4.- Variación de los vectores del campo.-

4.2.4.1.- Conceptos generales.-

En el estudio de campos vectoriales interesa conocer como varían estos al desplazarse de un punto a otro en su interior.



Fig. 78

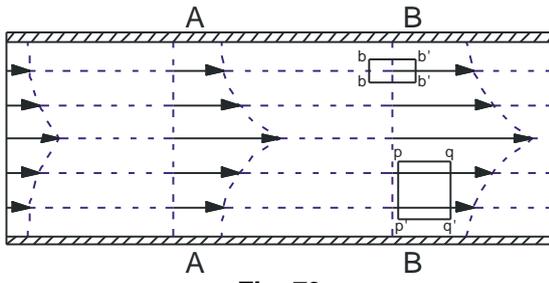


Fig. 79

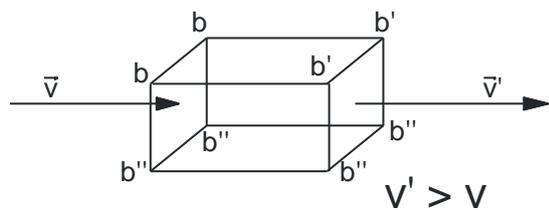


Fig. 80

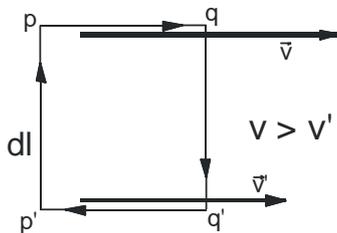


Fig. 81

La figura 79 representa la sección diametral de un campo vectorial constituido por los vectores velocidad de una corriente de agua encerrada en un tubo. (fig. 78).

Por las secciones **A-A** y **B-B**, se inyectan caudales adicionales de agua, cuyo único efecto es aumentar la velocidad del agua "**aguas arriba**", a partir de tales secciones.

Además, el rozamiento del agua con las paredes del tubo hace que la velocidad sea menor en las proximidades de ésta.

Si se elige un elemento de volumen **b-b, b'-b'** y de profundidad **b-b''** (de manera que **bbb''** este antes del orificio de entrada **B**, y **b'b'b''**, después) es evidente que el flujo que entra por la cara **bbb''** es menor que el que sale por la cara **b'b'b''**.

Existe un "**manantial**" en el interior del campo que incrementa en este caso, el módulo del vector velocidad (sin modificar su dirección).

Se dice que la "**divergencia**" del campo en ese punto es positiva.

Si se elige ahora una línea cerrada **pqq'p'** y se calculase la circulación del vector velocidad a lo largo de ella, se ve que su valor es diferente de cero, al ser los vectores \vec{V} y \vec{V}' diferentes.

Se dice que el "**rotacional**" del campo es positivo.

NOTA 24: Físicamente, si se imagina un pequeño cubo de madera flotando sobre una corriente de agua, éste se aceleraría al traspasar las secciones *A-A* y *B-B*, donde existen manantiales (divergencia positiva) y rotaría continuamente (mientras se desplaza), debido a las diferentes velocidades a ambos lados de sus caras paralelas al desplazamiento.

NOTA 25: Expresado en otra forma, las variaciones de un campo vectorial "en la propia dirección de las líneas de campo" quedan expresadas por la divergencia, mientras que las variaciones "laterales" de los vectores del campo, vienen expresados por el rotacional.

4.2.4.2.- Divergencia de un campo vectorial.-

a) Definición intrínseca:

Sea un punto *P* en el seno de un campo vectorial $\vec{V} = \vec{V}(X, Y, Z)$

Si se rodea el punto *P* con un elemento de volumen Δv que tiende a cero, siendo *ds* la superficie exterior del mismo, se define la divergencia del campo \vec{V} en el punto *P* por la expresión:

$$\text{div } \vec{V} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \iint_{ds} \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

En otras palabras, la divergencia del campo en el punto *P* es el flujo neto que atraviesa la superficie que encierra el volumen elemental, dividido por tal volumen. Esta cantidad es un escalar, y tiene un valor único en cada punto del campo.

Si la $\text{div } \vec{V}$ es positiva en el punto *P*, indica que en ese punto existen agentes creadores del campo (**manantiales**). Si en todos los puntos del campo, la divergencia

fuera nula, no existirían manantiales ni sumideros. Las líneas de campo serían necesariamente cerradas y el campo se denomina **adivergente o "solenoidal"**.

b) Definición en coordenadas cartesianas:

Sea un campo vectorial definido por la función:

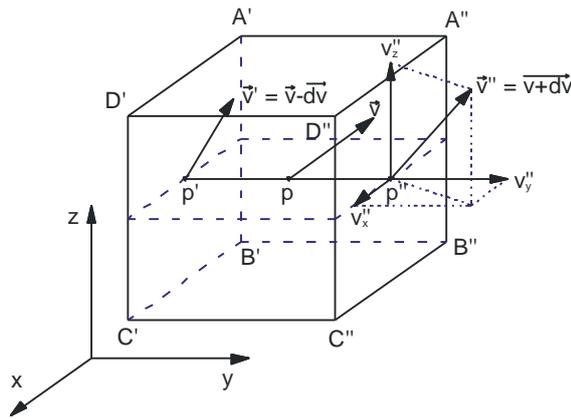


Fig. 82

$$\vec{V} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

Tomando un punto P en su interior y, rodeándolo de un volumen elemental, de lados dx , dy , dz , como se ve en la figura 82, puede calcularse el valor de la divergencia.

El flujo a través de la cara $A'B'C'D'$ (flujo entrante), puede calcularse fácilmente, siendo el vector campo en P' (centro de la cara).

$$\vec{V}' = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}$$

El área de esa cara vale

$$d\vec{s} \times \vec{dz} = 0\vec{i} - dx\,dz\vec{j} + 0\vec{k}$$

(el signo menos se debe a que el vector $d\vec{s}$ asociado a la cara $A'B'C'D'$, tiene sentido negativo, respecto a los ejes coordenados elegidos).

De esta forma, el flujo elemental (flujo entrante) a través de esta cara vale:

$$d\phi_{A'B'C'D'} = -Y' \cdot dx\,dz$$

Relacionando el vector \vec{V}' con el \vec{V} ($\vec{V}' = \vec{V} + d\vec{V}$), puede escribirse:

$$d\phi_{A'B'C'D'} = -\left[Y + \frac{\partial Y}{\partial y} \cdot \left(-\frac{dy}{2} \right) \right] dx \cdot dz \quad (1)$$

El flujo saliente por la cara $A''B''C''D''$ (flujo saliente) también puede calcularse de igual forma, siendo ahora el vector campo en P'' (centro de la cara).

$$\vec{V}'' = X'' \vec{i} + Y'' \vec{j} + Z'' \vec{k}$$

El área de esa cara es:

$$\vec{dx} \times \vec{dz} = 0 \vec{i} + dx \cdot dz \vec{j} + 0 \vec{k}$$

Con lo cual el flujo elemental vale:

$$d\phi_{A'B'C'D'} = Y'' dx dz$$

Relacionando los vectores \vec{V}'' y \vec{V} ($\vec{V}'' = \vec{V} + d\vec{V}$), puede escribirse:

$$d\phi_{A''B''C''D''} = \left[Y + \frac{\partial Y}{\partial y} \cdot \left(\frac{dy}{2} \right) \right] dx \cdot dz \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) se obtendrá el flujo total neto a través de las caras del prisma normales al eje y .

$$d\phi_Y = d\phi_{A'B'C'D'} + d\phi_{A''B''C''D''} = - \left[\left(Y - \frac{1}{2} \frac{\partial Y}{\partial y} dy \right) + \left(Y + \frac{1}{2} \frac{\partial Y}{\partial y} dy \right) \right] dx \cdot dz$$

$$d\phi_Y = \frac{\partial Y}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz$$

Haciendo lo mismo con las otras dos caras, se obtiene

$$d\phi_X = \frac{\partial X}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \quad d\phi_Z = \frac{\partial Z}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz$$

Con lo cual el flujo total neto será:

$$d\phi = d\phi_X + d\phi_Y + d\phi_Z$$

$$d\phi = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz$$

Con lo cual la expresión de la divergencia (definida por $\frac{d\phi}{dv}$) en coordenadas cartesianas será:

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

NOTA 26: La expresión anterior carece de derivadas parciales cruzadas. Por consiguiente, la $\text{div } \vec{V}$ representa la variación de los vectores del campo en su propia dirección (de las líneas de campo).

(Este es el motivo de que, además, tales variaciones pueden representarse por una magnitud escalar).

NOTA 27: Como la divergencia de un campo vectorial define en cada punto del mismo un escalar, el conjunto de todos los escalares $\text{div } \vec{V}$ configuran un campo escalar.

NOTA 28: La divergencia puede considerarse un “operador diferencial”, pudiendo expresarse como el producto escalar de los vectores “nabla” y \vec{v} .

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

NOTA 29: Aunque no se demuestre, la $\text{div } \vec{V}$ es un invariante del campo vectorial.

4.2.4.3.- Rotacional de un campo vectorial.-

a) Definición intrínseca:

Sea un punto P en el seno de un campo vectorial $\vec{V} = \vec{V}(X, Y, Z)$.

Si se rodea el punto P con un elemento de volumen Δv que tiende a cero, siendo Δs la superficie exterior del mismo y se intercepta por un plano arbitrario π , que pasa por P , se obtiene una superficie elemental ds contorneada por la línea cerrada dl . Se define el rotacional del campo en ese punto P , y en la dirección perpendicular al plano π a la expresión:

$$\text{rot } \vec{V} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{l}}{\Delta s}$$

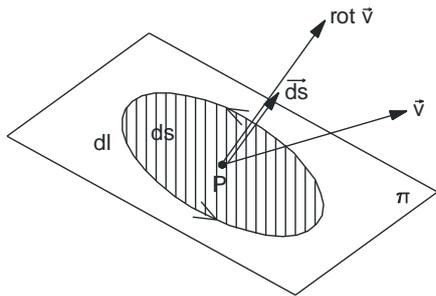


Fig. 83

Como ds es una magnitud vectorial (en la figura 83 se ha representado por el vector \vec{ds}), también lo será el $\text{rot } \vec{V}$.

En este ejemplo, $\text{rot } \vec{V}$ tiene la dirección de \vec{ds} y sentido al indicado por la circulación sobre el contorno dl .

Como el plano π se ha tomado de manera arbitraria y, por consiguiente ds , el vector $\text{rot } \vec{V}$ no queda definido unívocamente por la expresión anterior.

Sin embargo, si se eligen tres planos perpendiculares entre si y, que se corten en el punto P , se tendrán tres coordenadas del vector $\text{rot } \vec{V}$ que lo definirán unívocamente.

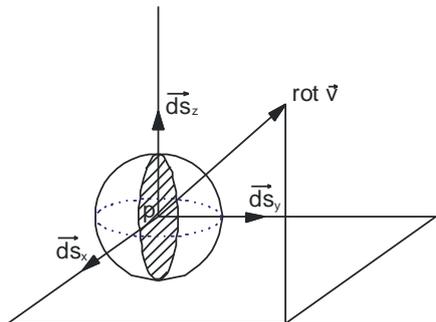


Fig. 84

También podrá definirse el vector rotacional como aquel perpendicular al plano π que pasa por P y en el cual la circulación es máxima.

b) Definición en coordenadas cartesianas.-

Sea un campo vectorial definido por la función

$$\vec{V} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

Se toma un punto $P(x, y, z)$ en su interior, formando parte de una superficie elemental \vec{ds} , cuyo contorno es la línea $d\vec{l}$ y donde el campo vale $\vec{V} = \vec{V}(X, Y, Z)$.

Proyectando el vector \vec{V} y la superficie elemental \vec{ds} sobre los tres ejes coordenados puede calcularse la circulación en cada proyección.

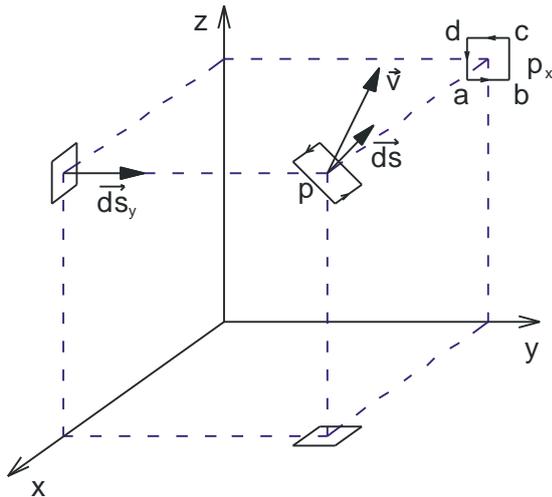


Fig. 85

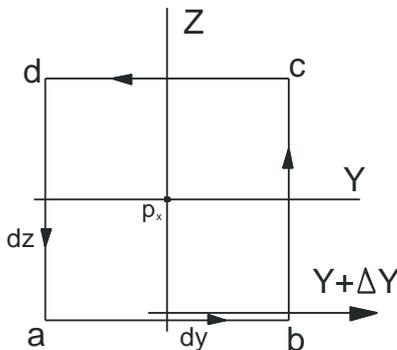


Fig. 86

Sobre el plano **ZOY**, se tiene:

- Circulación del campo a lo largo de $a \rightarrow b$ (teniendo en cuenta que sólo la componente Y ha de ser considerada, al ser Z perpendicular a $a \rightarrow b$)

$$(\vec{Y} + \Delta\vec{Y}) \cdot \vec{dy}$$

(producto escalar) que puede escribirse:

$$\left[Y + \frac{\partial Y}{\partial z} \left(-\frac{dz}{2} \right) \right] \cdot dy = \left(Y - \frac{1}{2} \frac{\partial Y}{\partial z} dz \right) dy$$

- Circulación a lo largo de $b \rightarrow c$.

$$\left(Z + \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial y} dy \right) dz$$

- Circulación a lo largo de $c \rightarrow d$.

$$- \left(Y + \frac{1}{2} \frac{\partial Y}{\partial z} dz \right) dy$$

- Circulación a lo largo de $d \rightarrow a$.

$$- \left(Z - \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial y} dy \right) dz$$

- Sumando todos estos valores se obtiene el valor de la circulación del vector campo en la proyección sobre el plano **ZOY**.

$$\frac{\partial Z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial Y}{\partial z} dy dz = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz$$

- Dividiendo la circulación por el área se obtiene la componente del vector rotacional sobre el plano **ZOY**.

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right)$$

- Igualmente podrían calcularse las otras dos componentes del vector rotacional, con lo que, éste puede escribirse

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k}$$

NOTA 30: Como se ve en la expresión anterior, todas son derivadas cruzadas, por lo que el rotacional del campo \vec{V} en el punto P representa las variaciones del campo en dirección perpendicular a las líneas de campo; (a diferencia de la divergencia, que representa la variación del campo en la propia dirección de estas líneas).

NOTA 31: Como el rotacional de un campo vectorial define en cada punto un vector ($\overrightarrow{\text{rot } V}$), el conjunto de todos ellos constituyen un nuevo campo vectorial.

NOTA 32: El rotacional puede considerarse un operador diferencial, pudiendo expresarse como el producto vectorial de “nabla” por \vec{V} .

$$\overrightarrow{\text{rot } V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

NOTA 33: Aunque no se demuestre aquí, el rotacional es un invariante del campo vectorial.

4.2.5.- Relaciones interesantes dentro de los campos vectoriales.-

a) Teorema de Gaus-Ostrogradsky (teorema de la divergencia).-

De la definición de divergencia puede escribirse:

$$\begin{aligned}d\phi &= \text{div } \vec{v} \cdot d\mathbf{v} \\ \vec{v} \cdot \vec{ds} &= \text{div } \vec{v} \cdot d\mathbf{v}\end{aligned}$$

Integrando el primer término sobre una superficie cerrada \mathbf{S} y el segundo sobre todo el volumen \mathbf{v} encerrado por ella, queda:

$$\oiint_{\mathbf{S}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \iiint_{\mathbf{v}} \text{div } \vec{v} \cdot d\mathbf{v}$$

“El flujo neto (entrante menos saliente) a través de una superficie cerrada es igual a la integral, extendida al volumen \mathbf{v} encerrado por tal superficie, de la divergente del campo”

b) Teorema de Stokes (Teorema del rotacional).-

De la definición de rotacional puede escribirse:

$$\vec{V} \cdot d\vec{l} = \overrightarrow{\text{rot } V} \cdot \vec{ds}$$

Integrando el primer término sobre una línea cerrada I y el segundo sobre una superficie abierta \mathbf{S}_a que se apoye en ella (cualquiera que sea su forma), queda:

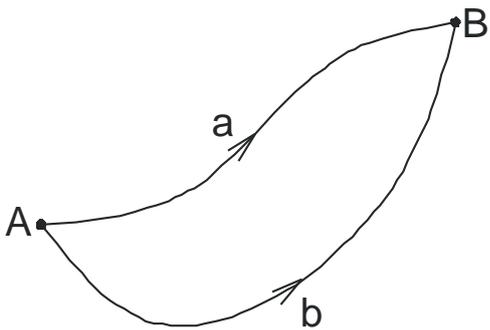
$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathbf{S}_a} \overrightarrow{\text{rot } V} \cdot \vec{ds}$$

“La circulación a lo largo de una línea cerrada y arbitraria Γ situada en un campo vectorial es igual al flujo de los vectores rotacional a través de una superficie abierta que se apoye en ella”.

4.3.- ESTUDIO DE ALGUNOS CAMPOS SENCILLOS.-**4.3.1.- Campos irrotacionales. Potencial escalar.-**

Si un campo vectorial es irrotacional, entonces puede considerarse formado por los gradientes de una función escalar U , denominada “potencial escalar” de dicho campo vectorial.

$$\text{rot } \vec{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} U$$

 <p style="text-align: center;">Fig. 87</p>	<p>Sea el campo vectorial</p> $\vec{V} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$ <p>Si se verifica</p> $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \mathbf{0}$ <p>Por el teorema de Stokes:</p> $\iint_s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{ds} = \oint_c \vec{V} \cdot \vec{dl} = \mathbf{0} \Rightarrow \oint_c \vec{V} \cdot \vec{dl} = \mathbf{0}$ <p>Es decir, en un campo irrotacional, la circulación a lo largo de una curva cerrada es nula.</p>
--	---

Eligiendo dos caminos alternativos entre dos puntos del campo A y B , puede ponerse:

$$\int_{AaB} \vec{V} \cdot \vec{dl} + \int_{BbA} \vec{V} \cdot \vec{dl} = \mathbf{0}$$

Lo cual significa que:

$$\int_{AaB} \vec{V} \cdot \vec{dl} = -\int_{BbA} \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_{AbB} \vec{V} \cdot \vec{dl}$$

Es decir, en un campo irrotacional, la circulación entre dos puntos no depende del camino recorrido, sino sólo de la posición de los dos puntos.

Según esto, puede vincularse al punto P un escalar arbitrario U_p , (denominado “potencial escalar”) de manera que al punto B le corresponderá un único valor dado por:

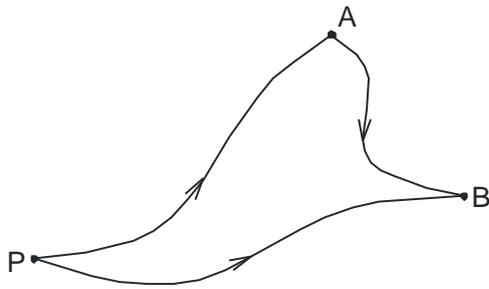


Fig. 88

$$U_B = U_P + \int_{PA} \vec{v} \cdot \vec{dl}$$

Igualmente:

$$U_A = U_P + \int_{PB} \vec{v} \cdot \vec{dl}$$

De donde:

$$\int_{AB} \vec{v} \cdot \vec{dl} = U_B - U_A$$

Es decir, la circulación del vector campo entre dos puntos **A** y **B** es igual a la diferencia de potenciales de los puntos **A** y **B**.

NOTA 34: Obsérvese que la expresión $U_B - U_A = \int_{AB} \vec{v} \cdot \vec{dl}$ puede escribirse para dos puntos infinitamente próximos:

$$dU = \vec{v} \cdot \vec{dl}$$

Por definición de gradiente de un campo escalar, se verifica:

$$dU = \overrightarrow{\text{grad } U} \cdot \vec{dl}$$

De donde se infiere que:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad } U}$$

Es decir, si un campo es irrotacional, sus vectores son los gradientes de un campo escalar.

La proposición inversa también se verifica: “Si un campo vectorial está formado por los gradientes de un campo escalar, tal campo es irrotacional”.

En efecto, si $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad } U}$,

$$\text{rot } \vec{V} = \text{rot}(\overrightarrow{\text{grad } U}) = \text{rot}\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right)$$

Y de la definición de gradiente puede escribirse:

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \cdot \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \cdot \partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \cdot \partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \cdot \partial x}\right) \vec{k}$$

con lo cual $\text{rot } \vec{V} = \mathbf{0}$

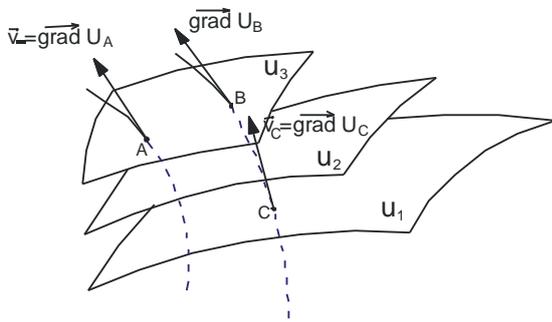


Fig. 89

Gráficamente, las líneas de campo son las trayectorias ortogonales a las superficies “equipotenciales” del campo escalar U . Tomando dos superficies equipotenciales muy próximas, U y $U+dU$, la circulación elemental a lo largo de una línea de campo (que son perpendiculares a las superficies equipotenciales) será:

$$dC = \overrightarrow{\text{grad } U} \cdot \vec{dl} = U - (U + dU) = -dU$$

Es decir, los vectores de un campo vectorial $\vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad } U}$, originados por los gradientes de un campo escalar, están dirigidos hacia los potenciales decrecientes.

4.3.2.- Campos adivergentes. Potencial vector.-

Si un campo vectorial es adivergente ($\text{div } \vec{V} = \mathbf{0}$ en todos sus puntos), entonces puede considerarse formado por los rotacionales de un cierto campo vectorial \vec{A} , denominado “potencial vector”.

$$\text{div } \vec{V} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{V} = \overrightarrow{\text{rot } \vec{A}}$$

En efecto, sea el campo vectorial:

$$\vec{V} = X(x, y, z) \vec{i} + Y(x, y, z) \vec{j} + Z(x, y, z) \vec{k}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Si existe el campo vectorial:

$$\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{i} + A_y(x, y, z) \vec{j} + A_z(x, y, z) \vec{k}$$

Su rotacional será:

$$\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{A}} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

De la igualdad $\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{A}}$, se tiene:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = X \quad ; \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = Y \quad ; \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = Z \quad (2)$$

Expresiones que, por integración, permiten calcular los valores A_x, A_y, A_z .

Para simplificar el cálculo, puede calcularse una solución particular, en la cual, por ejemplo $A_x = 0$. Entonces:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = X \quad ; \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} = -Y \quad ; \quad \frac{\partial A_x}{\partial y} = Z$$

Integrando las dos últimas expresiones y sustituyéndolas en la primera:

$$A_z = - \int Y \, dy + c_1(y, z) \quad ; \quad A_y = - \int Z \, dx + c_2(y, z)$$

$$- \int \frac{\partial Y}{\partial y} \, dx + \frac{\partial c_1}{\partial y} - \int \frac{\partial Z}{\partial z} \, dx - \frac{\partial c_2}{\partial z} = - \int \left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \, dx + \frac{\partial c_1}{\partial y} - \frac{\partial c_2}{\partial z} = X$$

Como de (1) se obtiene:

$$\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = - \frac{\partial X}{\partial x}$$

Sustituyéndolo queda:

$$\int \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{c}_2}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{X}$$

Teniendo en cuenta que $\int \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ queda al sustituir en la expresión anterior:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) + \frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{c}_2}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Considerando otra solución particular en la que $\mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$, queda:

$$\frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) \Rightarrow \mathbf{c}_1 = \int \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) d\mathbf{y} + \mathbf{c}_3(\mathbf{z})$$

Luego el vector $\vec{\mathbf{A}}$ será:

$$\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \vec{i} + \int \mathbf{Z} d\mathbf{x} \vec{j} + \left(\int \mathbf{Y} d\mathbf{x} + \int \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) d\mathbf{y} + \mathbf{c}_3 \right) \vec{k}$$

La proposición inversa también se verifica: “Si un campo vectorial está formado por los rotacionales de otro campo vectorial, dicho campo es adivergente”.

$$\text{div } \vec{\mathbf{V}} = \text{div } \overline{\text{rot } \mathbf{A}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial \mathbf{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial \mathbf{y}} \right) = \mathbf{0}$$

En los campos adivergentes, en los que $\vec{\mathbf{V}} = \overline{\text{rot } \mathbf{A}}$, a los vectores $\vec{\mathbf{V}}$ se les suele llamar “vectores torbellino” y a las líneas de vector, “líneas de torbellino”.

La ecuación de estas líneas será:

$$\frac{d\mathbf{x}}{\frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial \mathbf{z}}} = \frac{d\mathbf{y}}{\frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial \mathbf{x}}} = \frac{d\mathbf{z}}{\frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial \mathbf{y}}}$$

Como se verá a continuación, en estos campos las líneas de torbellino son, necesariamente, cerradas.

Considerando el tubo vectorial (de torbellino) de la figura.

Aplicando el teorema de Stokes al campo vectorial \vec{A} , sobre una superficie abierta S , situada sobre el tubo de torbellino:

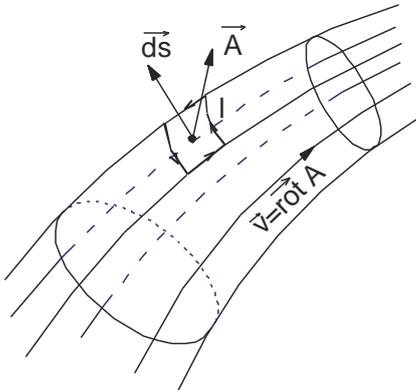


Fig. 90

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } A} \cdot d\vec{s}$$

Es decir: $\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{s}$

Como \vec{v} y $d\vec{s}$ son perpendiculares, queda:

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

Tomando ahora una línea cerrada c , como la de la figura, y suponiendo los tramos a y a' muy próximos, de manera que:

$$\int_a \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\int_{a'} \vec{A} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \int_{a+a'} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

La circulación a lo largo de toda la línea será:

$$\int_a \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_b \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{a'} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{b'} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

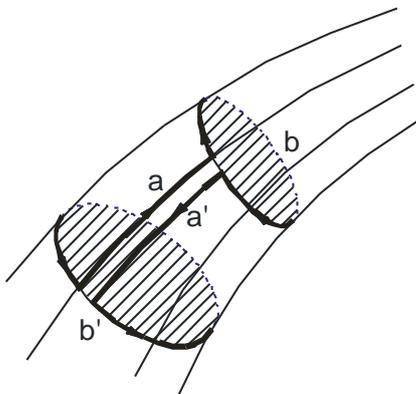


Fig. 91

O, lo que es igual, $\int_b \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{b'} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \text{cte.}$

Que también puede escribirse:

$$\int_c \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } A} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \text{cte.}$$

Esta última expresión indica que el flujo del campo de torbellino se mantiene constante, es decir, que el campo \vec{v} no tiene manantiales ni sumideros; en otras palabras, que los tubos (o las líneas de torbellino) se cierran sobre sí mismas (o en el infinito).

4.3.3.- Campos uniformes.-

Un campo vectorial uniforme es aquel en el que todos los vectores del campo tienen igual módulo, dirección y sentido.

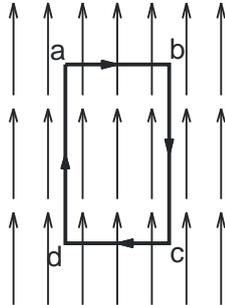


Fig. 92

En este caso, la función que define el campo:

$$\vec{V} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

queda reducida a:

$$\vec{V} = Z(x, y, z)\vec{k}$$

y como $z = \text{cte.}$, queda finalmente:

$$\vec{V} = c\vec{k}$$

Las líneas de campo tendrán por expresión:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \Rightarrow \frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{c}$$

De donde, integrando: $x = \text{cte.}$; $y = \text{cte.}$

que son rectas paralelas al eje Z .

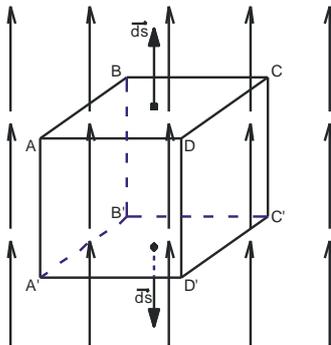


Fig. 93

- La circulación vale:

$$\vec{V} = c\vec{k} \quad \text{y} \quad d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$dC = \vec{v} \cdot d\vec{l} = c dz$$

(la circulación no dependerá del camino si el campo es irrotacional)

- El flujo vale:

$$\vec{V} = c\vec{k} \quad \text{y} \quad d\vec{s} = ds_x\vec{i} + ds_y\vec{j} + ds_z\vec{k}$$

$$d\phi = \vec{v} \cdot \vec{ds} = \mathbf{c} \cdot d\mathbf{s}_z$$

- El rotacional será:

$$\text{como } \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{v} = 0$$

Al ser el campo irrotacional, la circulación no depende del camino, y puede definirse un potencial escalar

$$dU = \mathbf{C} dz \Rightarrow U = \mathbf{c} z + \text{cte} \Rightarrow \vec{V} = -\text{grad } U$$

Las superficies equipotenciales ($U = \text{cte.}$) serán $z = \text{cte.}$ (planos paralelos al XOY).

- La divergencia será:

$$\text{como } \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$$

Son campos adivergentes.

No existen manantiales ni sumideros.

4.3.4.- Campos centrales.-

4.3.4.1.- Caso General:

Son aquellos campos en que los vectores que lo representan tienen todos la dirección de un punto fijo, denominado “**centro del campo**”.

Los vectores de este campo quedarán definidos por la expresión:

$$\vec{v} = f(\vec{r}) = f(r) \vec{r}_0$$

Siendo

$$\vec{r}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

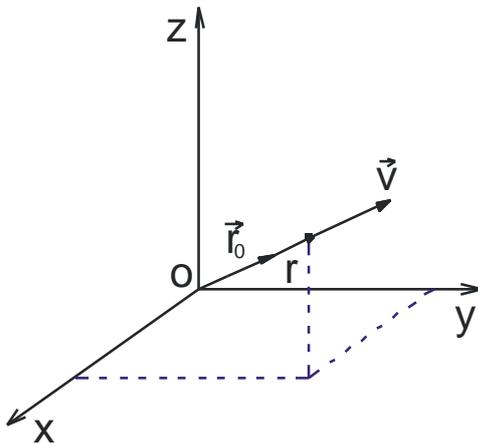


Fig. 94

En coordenadas cartesianas serán:

$$\vec{V} = \vec{V}(X, Y, Z)$$

$$X = f(r) \cos \alpha = f(r) \frac{x}{|r|} ;$$

$$Y = f(r) \frac{y}{|r|} ; \quad Z = f(r) \frac{z}{|r|}$$

Las líneas de campo serán:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

$$\frac{dx}{f(r) \frac{x}{|r|}} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Integrando, queda:

$$x = y c_1 ; \quad y = z c_2$$

que son rectas que pasan por el origen.

Los tubos de vector con conos con vértice en el origen.

La circulación en estos campos vale:

$$\vec{v} = f(r) \frac{x}{r} \vec{i} + f(r) \frac{y}{r} \vec{j} + f(r) \frac{z}{r} \vec{k}$$

$$d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$C = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_C f(r) \frac{x}{r} dx + \int_C f(r) \frac{y}{r} dy + \int_C f(r) \frac{z}{r} dz$$

(Como se verá más adelante, la circulación de estos campos es cero, para líneas cerradas).

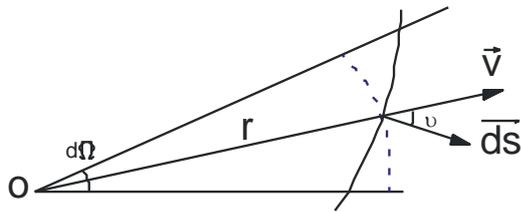


Fig. 95

- El flujo vale:

$$d\phi = \vec{v} \cdot \vec{ds} = |\vec{v}| \cdot |\vec{ds}| \cdot \cos \theta = f(r) \cdot ds \cdot \cos \theta$$

Como el valor del ángulo sólido:

$$d\Omega = \frac{ds \cdot \cos \theta}{r^2}$$

queda al sustituir:

$$d\phi = f(r) r^2 d\Omega$$

- El rotacional en estos campos es nulo. En efecto, una cualquiera de sus componentes (tal como la \bar{i}) vale:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = f'(r) \cdot \frac{z}{r} \frac{\partial r}{\partial y} - f(r) \frac{z}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\text{Como } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} = \frac{y}{r};$$

Queda finalmente:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = f'(r) \frac{z \cdot y}{r^2} - f(r) \frac{z \cdot y}{r^3}$$

Igualmente ocurre con el otro sumando:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = f'(r) \frac{y \cdot z}{r^2} - f(r) \frac{y \cdot z}{r^3}$$

Con lo cual:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{V} = 0$$

Al ser el campo irrotacional, admite función potencial, es decir,

$$\vec{V} = -\text{grad } U \Rightarrow dU = -\vec{V} \cdot d\vec{l} = -f(r) dr$$

El valor de la circulación no depende del camino, sino sólo de los puntos extremos.

Las superficies equipotenciales ($U = \text{cte.}$) serán esferas con centro en O y radio r

$$dU = 0 \Rightarrow f(r) dr = 0 \Rightarrow r = \text{cte.}$$

- La divergencia en estos campos no es nula en todos sus puntos

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \neq 0$$

Evidentemente, el punto O , donde se genera el campo, es un manantial. Cualquier elemento de volumen que rodee a este punto O tendrá un flujo saliente positivo.

Sin embargo, en otros puntos, como el mostrado en la figura, encerrado por el volumen $ABCD - A'B'C'D'$, la divergencia si será nula.

4.3.4.2.- Campo central culombiano.-

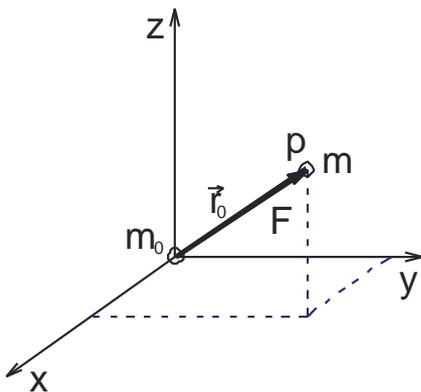


Fig. 97

Es un campo central creado por una masa de agente m_0 , sin dimensiones, que constituye el centro del campo.

Experimentalmente se ha comprobado que cualquier otra masa de prueba m , situada en un punto cualquiera del espacio, recibe una fuerza dada por la **ley de Coulomb**.

$$\vec{F} = K \frac{m m_0}{r^2} \vec{r}_0$$

Siendo el sentido de esta fuerza el de m a m_0 (atracción gravitatoria). K es una constante que depende del medio y de las unidades en que se midan las masas, fuerza y distancias.

Los vectores del campo central coulombiano se definen como el cociente entre la fuerza \vec{F} y la masa de prueba m .

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \vec{H} = K \frac{m_0}{r^2} \vec{r}_0$$

(Según esto, el vector campo se define como la fuerza sobre la unidad de masa).

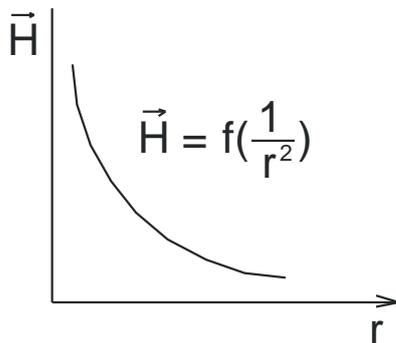


Fig. 98

Gráficamente, los módulos de los vectores campo decrecen con la distancia a la carga generadora, siguiendo una curva como la de la figura 98.

En coordenadas cartesianas, el campo central coulombiano puede escribirse:

$$\vec{H} = K \frac{m_0}{r^2} \cos \alpha \vec{i} + K \frac{m_0}{r^2} \cos \beta \vec{j} + K \frac{m_0}{r^2} \cos \gamma \vec{k}$$

$$\vec{H} = K \frac{m_0}{r^3} x \vec{i} + K \frac{m_0}{r^3} y \vec{j} + K \frac{m_0}{r^3} z \vec{k}$$

Las líneas de campo serán:

$$\frac{dx}{K \frac{m_0}{r^3} x} = \frac{dy}{K \frac{m_0}{r^3} y} = \frac{dz}{K \frac{m_0}{r^3} z} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

que son rectas que pasan por la posición de la masa m_0 (supuesta en ella el origen de coordenadas), y los tubos de vector son conos con vértice en m_0 .

- La circulación en estos campos vale:

$$d\mathbf{c} = \vec{H} \cdot d\vec{r} = K \frac{m_0}{r^2} \vec{r}_0 \cdot d\vec{r}$$

Siendo $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$, queda:

$$d\mathbf{c} = K \frac{m_0}{r^3} x dx + K \frac{m_0}{r^3} y dy + K \frac{m_0}{r^3} z dz$$

$$d\mathbf{c} = K \frac{m_0}{r^2} dr$$

(Como se verá más adelante, la circulación en estos campos es independiente del camino seguido - sólo depende de los puntos extremos - y en una línea cerrada es cero).

- El flujo en estos campos vale:

$$d\phi = \vec{H} \cdot d\vec{s} = |\vec{H}| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \theta$$

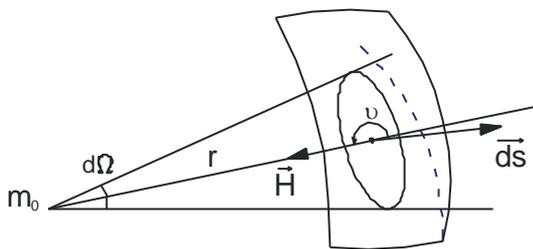


Fig. 99

El ángulo sólido vale:

$$d\Omega = \frac{ds \cdot \cos \theta}{r^2}$$

Con lo cual el flujo vale:

$$d\phi = K m_0 d\Omega$$

En el cálculo del flujo a través de una superficie cerrada, pueden darse varios

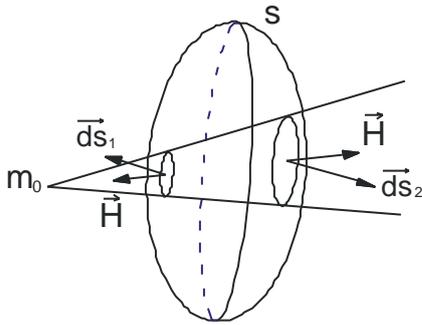


Fig. 100

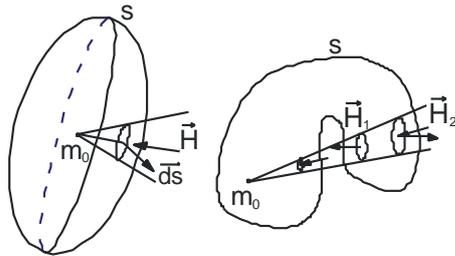


Fig. 101

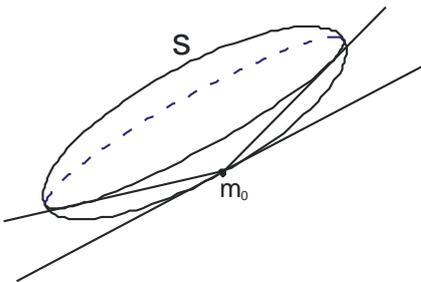


Fig. 102

casos, según ésta encierre o no a la masa de agente m_0 .

Si la superficie cerrada S no contiene la masa de agente m_0 , el flujo a través de $d\vec{s}$ es igual y contrario al que atraviesa $d\vec{s}_2$.

El flujo neto saliente de la superficie cerrada es nulo.

Si la superficie cerrada S contiene a m_0 , entonces, $\phi = 4\pi K m_0$, ya que el ángulo sólido completo vale 4π .

Esto vale incluso para superficies más complejas, como la representada en la figura 98. Si se encuentra sobre la superficie S , entonces $\phi = 2\pi K m_0$ puesto que el ángulo sólido vale 2π en éste caso.

- El rotacional de estos campos centrales es nulo (por las mismas consideraciones que las expuestas en el punto anterior).

$$\text{rot } \vec{H} = 0$$

En consecuencia, la circulación no depende del camino y, admite función potencial. Los vectores campo \vec{H} pueden ser considerados los gradientes de un campo escalar U .

$$\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad } U}$$

El campo escalar U (campo potencial) en cada punto puede calcularse a partir de la circulación entre el infinito y el punto considerado, suponiendo $U_\infty = 0$.

$$C_{\infty-p} = \oint_{\infty p} \vec{H} \cdot d\vec{r} = U_p - U_{\infty} = U_p \quad ; \quad U_p = \int_{\infty p} K \frac{m_0}{r^2} dr = K \frac{m_0}{r}$$

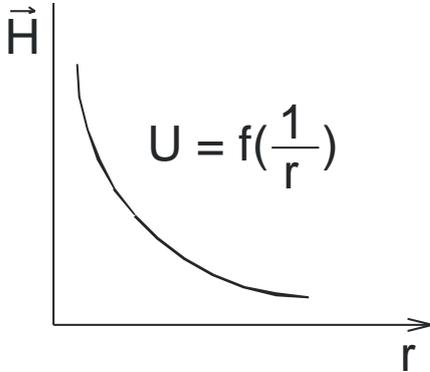


Fig. 103

Como se ve, el potencial es máximo en la posición de la masa de agente m_0 y nulo en el infinito.

Como el campo coulombiano es la fuerza por unidad de masa, el potencial tiene un significado muy preciso.

En efecto, el potencial del campo \vec{H} en el punto P mide el trabajo realizado por las fuerzas del campo para trasladar la unidad de masa desde el punto hasta el infinito.

- La divergencia en este campo no es nula en todos sus puntos. Por consiguiente, no es un campo solenoidal, existiendo un manantial donde se encuentra la masa m_0 .

En concreto, la divergencia vale $4\pi K m_0$ en el punto donde se encuentra la masa m_0 y cero en todos los demás puntos.

4.3.4.3.- Campo multicentral coulombiano.-

Es un campo creado por varias masas de agente m_1, m_2, m_3, \dots

- El campo resultante, sobre la unidad de masa en el punto P será la suma vectorial:

$$\mathbf{H}_R = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3$$

- La circulación en estos campos será:

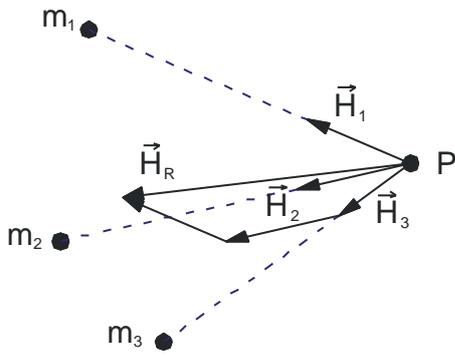


Fig. 104

$$d\mathbf{C} = \vec{H}_R \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^m \vec{H}_i \cdot d\vec{l}$$

- El flujo vendrá dado por:

$$d\phi = \vec{H}_R \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^m \vec{H}_i \cdot d\vec{s}$$

Si la superficie cerrada \mathbf{S} comprende p masas de agente y q masas se encuentran sobre la superficie, el flujo total será:

$$\phi = 4\pi K \sum_{i=1}^p m_i + 2\pi K \sum_{i=1}^q m_j$$

- El rotacional en estos campos valdrá:

$$\text{rot } \vec{H}_R = \text{rot } \sum_{i=1}^n \vec{H}_i = \sum_{i=1}^n \text{rot } \vec{H}_i = 0$$

Admite, por tanto, función potencial

$$\vec{H} = -\overline{\text{grad } U} \quad dU = -\vec{H}_R \cdot d\vec{r} = -\sum_{i=1}^n \vec{H}_i \cdot d\vec{r} \quad U = K \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i} + \text{cte.}$$

Suponiendo que no hayan masas de agente en el infinito, es decir, $U_\infty = 0$ puede ponerse:

$$U = K \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$$

La divergencia en estos campos no es cero en todos los puntos, dependiendo que el volumen considerado encierre o no masas de agente. Cada una de ellas es un manantial del campo.

NOTA 35: En estos campos es importante considerar el efecto de unas masas sobre otras y, en especial, la “energía potencial mutua”.

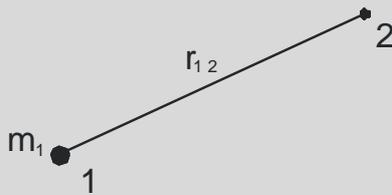


Fig. 105

En el punto 2, el potencial creado por la masa de agente m_1 vale $K \frac{m_1}{r_{12}}$, y representa la energía potencial de la unidad de masa de agente en el punto 1 (o lo que es igual, el trabajo desarrollado por la fuerza del campo para trasladar la unidad de masa desde el infinito al punto 2).

Si en este punto 2 se coloca otra masa de agente m_2 , su energía potencial debido a que se encuentra en el campo creado por m_1 , será:

$$W_{m_2} = U_2 \cdot m_2 = K \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$$

Si se parte del campo creado por m_2 se hubiera obtenido la misma expresión, de manera que

$$W_{12} = K \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$$

es la energía potencial mutua de ambas masas de agente.

En el caso de varias masas en presencia, que crean un campo resultante \vec{H}_R en cada punto, la energía potencial mutua vendrá dada por:

trasladar la masa m de un punto al otro.

$$W_{A-B} = m(U_A - U_B)$$

4.3.4.4.- Campos colombianos de distribuciones continuas.-

a) Caso general:

Como generalización de los campos colombianos multicentrales pueden considerarse los campos generados por distribuciones continuas, constantes o no, de masas de agente superficiales (con densidad σ) o volumétricas (con densidad ρ), pero en ambos casos, finitas (es decir, no existen masas de agente en el infinito).

Tales son los casos de placas, esferas, etc..., consideradas como distribuciones superficiales o volumétricas de masas de agente.

- El valor del campo vendrá dado por:

$$\text{distribución superficial: } \vec{H} = \iint_S K \frac{dm}{r^2} \vec{r}_0 = \iint_S K \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{r}_0$$

$$\text{distribución volumétrica: } \vec{H} = \iiint_V K \frac{dm}{r^2} \vec{r}_0 = \iiint_V K \frac{\rho dv}{r^2} \vec{r}_0$$

- El valor de la circulación será:

$$dC = \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad , \quad \text{con el valor de } \vec{H} \text{ correspondiente.}$$

- El flujo será:

$$d\phi = \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad , \quad \text{con el valor de } \vec{H} \text{ correspondiente.}$$

- Al igual que en los campos multicentrales,

$$\text{rot } \vec{H} = 0$$

luego existe función potencial, dada por:

$$U = \iint_s K \frac{\sigma ds}{r} \quad ; \quad U = \iiint_v K \frac{\rho dv}{r}$$

- La divergencia puede calcularse del modo siguiente:

Si la superficie S encierra todas las masas, el flujo viene dado por:

$$\oiint_s \vec{H} \cdot \vec{ds} = 4\pi K \iiint_v \rho dv$$

Del teorema de la divergencia:

$$\oiint_s \vec{H} \cdot \vec{ds} = \iiint_v \text{div } \vec{H} dv$$

Restando ambas expresiones queda:

$$\iiint_v (\text{div } \vec{H} - 4\pi K \rho) dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{H} = 4\pi K \rho$$

NOTA 37: Como $\text{div } \vec{H} = \text{div} (-\text{grad } U) = -\Delta U$ (Laplaciana de U), resulta

$$\Delta U = -4\pi K \rho \quad \text{que es la ecuación de Poisson.}$$

Evidentemente, en las zonas del campo donde no hayan masas de agente:

$$\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta U = 0 \quad \text{que es la ecuación de Laplace.}$$

- La energía potencial mutua será:

$$W = \frac{1}{2} \iint_s U \cdot \sigma ds \qquad W = \frac{1}{2} \iiint_v U \cdot \rho dv$$

b) Disco plano de masas de agente.-

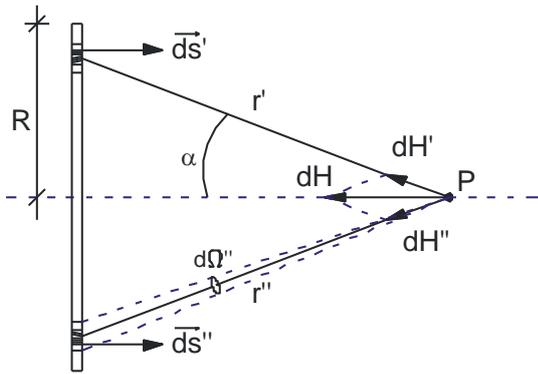


Fig. 106

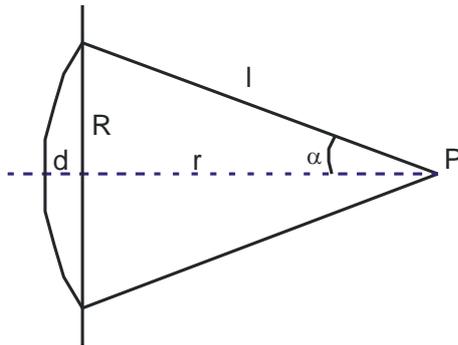


Fig. 107

En el disco de masas de agente de la figura se va a calcular el campo y el potencial en un punto cualquiera de su eje de simetría, siendo σ la densidad superficial de tales masas.

El campo en P producido por el elemento de área ds'' , que contiene masas de agente por valor $dm = \sigma \cdot ds''$, será:

$$dH'' = K \frac{dm}{r''^2} = K \frac{\sigma ds}{r''^2}$$

Si $d\Omega''$ es el ángulo sólido con el que se ve ds'' desde P , puede ponerse:

$$d\Omega'' = \frac{ds'' \cos \alpha}{r''^2} \Rightarrow dH'' = \frac{K\sigma d\Omega''}{\cos \alpha}$$

Si se considera la acción del elemento opuesto ds' , el campo será:

$$dH' = \frac{K\sigma d\Omega'}{\cos \alpha}$$

La suma de ambas acciones vendrá dada por:

$$dH = 2 dH' \cos \alpha$$

Sumando los infinitos elementos ds , se tendrá:

$$H = \int dH' \cos \alpha = K\sigma \int d\Omega = K\sigma \Omega$$

en donde Ω es el ángulo sólido con que se ve todo el disco desde P .

En la expresión anterior, el ángulo sólido Ω puede ser sustituido por los valores de ángulos y distancias mostrados en la figura 107.

Área del casquete, $S = 2\pi l d = 2\pi l(l-r)$

$$\text{como } r = l \cos \alpha \Rightarrow S = 2\pi l^2 (1 - \cos \alpha)$$

$$\text{como } \cos \alpha = \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \Rightarrow S = 2\pi l^2 \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right)$$

$$\text{como } \Omega = \frac{S}{l^2} = 2\pi \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right)$$

queda al sustituir:

$$H = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right)$$

El potencial en P puede calcularse de la forma siguiente:

$$dU = -\vec{H} \cdot \vec{dr} \quad \text{siendo } \vec{dr} \text{ un desplazamiento elemental en el interior del campo.}$$

Integrando la expresión anterior:

$$U = -\int H \cdot dr + C_1 \quad (C_1 \text{ es una constante})$$

$$U = -\int 2\pi K\sigma \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right) dr + C_1 = 2\pi K\sigma \left(-r + \sqrt{R^2 + r^2}\right) + C_1$$

Si el valor del campo es cero en el infinito, puede calcularse el valor de C_1 :

$$0 = 2\pi K\sigma \left(-r + \sqrt{R^2 + r^2}\right) + C_1$$

expresión que para $r \rightarrow \infty$, vale:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(-r + \sqrt{R^2 + r^2}\right) = \frac{(\sqrt{R^2 + r^2} - r)(\sqrt{R^2 + r^2} + r)}{(\sqrt{R^2 + r^2} + r)} = \frac{R^2 + r^2 - r^2}{\sqrt{R^2 + r^2} + r} = \frac{R^2}{\infty} = 0$$

luego, $C_1 = 0$.

El valor del potencial es, por tanto:

$$U = 2\pi K\sigma \left(-r + \sqrt{R^2 + r^2}\right)$$

En el centro del disco, donde $r = 0$.

$$\begin{aligned} |\vec{H}| &= 2\pi K\sigma \\ U &= 2\pi K\sigma R \end{aligned}$$

c) Plano infinito de masas de agente.-

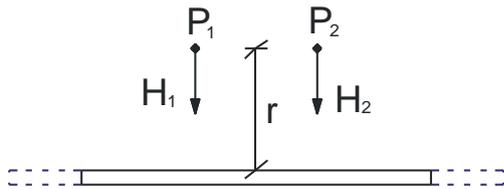


Fig. 108

Este caso puede considerarse una generalización del anterior, en el que el radio R del disco es infinito.

Cualquier punto del plano (P_1 ; P_2 ; etc.) (Figura 108) puede considerarse “centro de simetría”, y la expresión “acción sobre un punto del eje” puede transformarse en “acción sobre un punto cualquiera”.

- El valor del campo puede calcularse a partir de la expresión:

$$H = 2\pi K\sigma \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right) \quad \text{haciendo } R = \infty$$

con ello, el campo está formado por vectores paralelos entre sí, perpendiculares al plano, de módulo

$$H = 2\pi K\sigma$$

(Como se ve, el módulo no depende de la distancia al plano, y ello se debe a que existen masas de agente incluso en el infinito).

- El valor del potencial no puede obtenerse a partir de la expresión obtenida para el disco

$$U = 2\pi K\sigma \left(-r + \sqrt{R^2 + r^2}\right) + \text{cte.}$$

En efecto, para $R = \infty$, la expresión anterior daría $U = \infty$, lo cual es imposible.

Puede calcularse, sin embargo, a partir del valor del campo:

$$dU = -H dr = -2\pi K\sigma dr$$

$$U = -2\pi K\sigma \int dr = -2\pi K\sigma r + C_1$$

Sin embargo, el valor de la constante C_1 tampoco puede determinarse, al no ser $U = 0$ en $R = \infty$.

Por consiguiente, solo puede determinarse la diferencia de potencial

$$U_A - U_B = 2\pi K\sigma (r_A - r_B)$$

d) Distribución superficial (σ) de masas de agente en forma de esferas.-

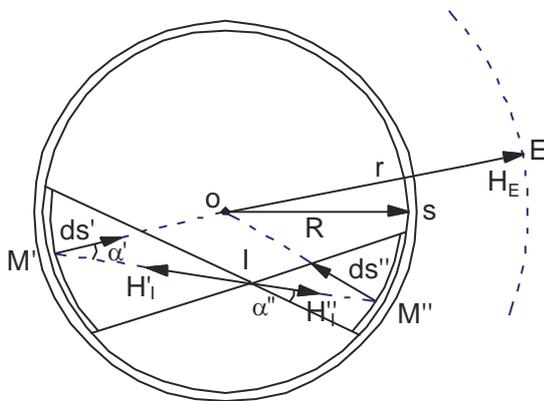


Fig. 109

Cálculo del campo \vec{H} :

1.- En un punto exterior, E :

Trazando por E una superficie de *Gaus* (esfera de radio r), y aplicando su teorema, se tiene:

-Flujo saliente:

$$\oiint_S \vec{H} \cdot \vec{ds} = H \oiint_S ds = H_E \cdot 4\pi r^2$$

- Carga encerrada: $M = 4\pi R^2 \sigma$

- Teorema de *Gaus*:

$$H_E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi K \cdot 4\pi R^2 \sigma$$

$$H_E = 4\pi K\sigma \frac{R^2}{r^2}$$

2.- En un punto de la superficie, S :

$$r \equiv R \quad H_s = 4\pi K\sigma$$

3.- En un punto interior, I :

Eligiendo un elemento de superficie ds' , las masas de agente contenidas serán

$$dm' = \sigma \cdot ds'$$

El campo en I será:

$$dH'_I = \frac{K dm}{r'^2_I} = \frac{K\sigma d\Omega'}{\cos \alpha'}$$

Si se elige otro elemento de área ds'' , que tenga respecto del punto I el mismo ángulo sólido $d\Omega'' = d\Omega'$, se tendrá:

$$dH''_I = \frac{K\sigma d\Omega'}{\cos \alpha''}$$

Como el triángulo $M'OM''$ es isósceles, $\alpha' = \alpha''$, y por consiguiente, $dH'_I = dH''_I$.

Como ambos vectores son de sentidos contrarios, $d\vec{H}'_I + d\vec{H}''_I = \mathbf{0}$, es decir, $\vec{H}_I = \mathbf{0}$.

NOTA 38: A la misma conclusión de que el campo en el interior de la esfera es nulo podría haberse llegado aplicando el *teorema de Gauss* sobre una superficie gaussiana que pasa por I .

$$\text{En este caso, } H_I \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k \cdot 4\pi r^2 \cdot 0 \Rightarrow H_I = 0$$

- Cálculo del potencial U :

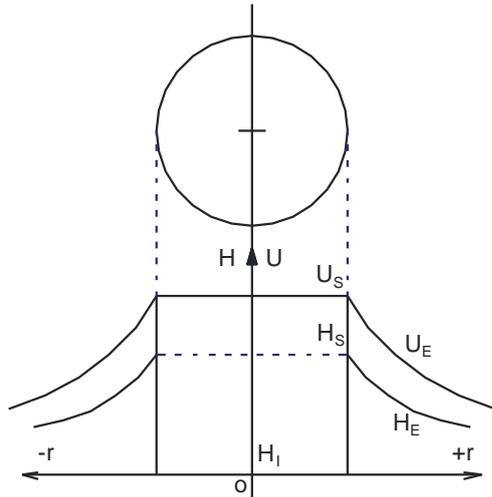


Fig.110

1.- En un punto exterior, E :

$$dU = -H_E dr = -4\pi K\sigma \frac{R^2}{r^2} dr$$

$$U_E - U_\infty = -\int_E^\infty 4\pi K\sigma R^2 \frac{dr}{r^2} \Rightarrow U_E = 4\pi K\sigma \frac{R^2}{r^2}$$

2.- En un punto de la superficie, S :

$$r \equiv R \quad U_S = 4\pi K\sigma R$$

3.- En un punto del interior, I :

$$H=0 \Rightarrow dU=0 \Rightarrow U=cte.$$

$$\text{En consecuencia, } U_o = U_I = U_S = 4\pi K\sigma R$$

- En el gráfico 110 se han representado los valores de H y U en función de r .

e) Distribución volumétrica (ρ) de masas de agente en forma de esfera:

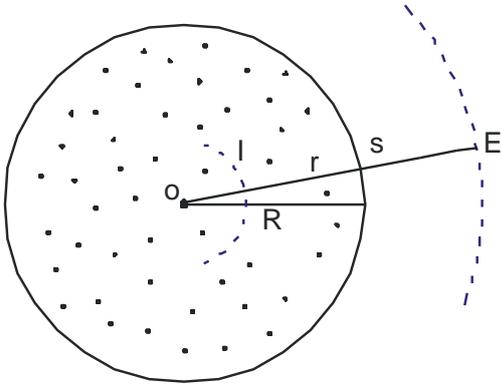


Fig. 111

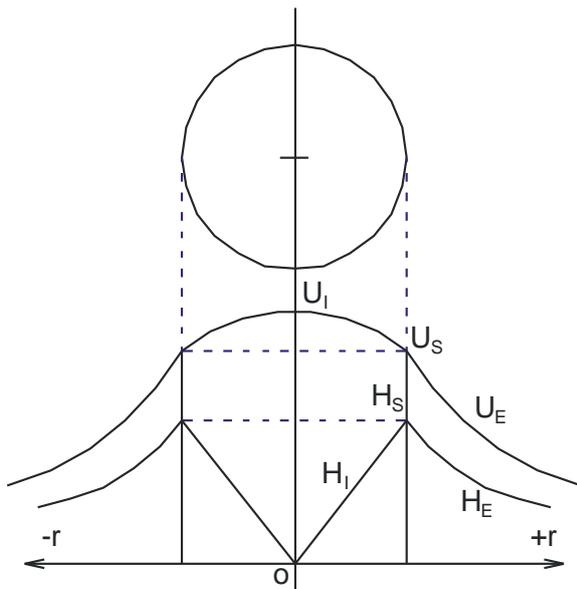


Fig. 112

Cálculo del campo H:

(Aplicando el teorema de Gaus)

1.- Punto exterior, **E**:

$$H_E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \cdot 4\pi K$$

$$H_E = \frac{4}{3} \pi K \rho \frac{R^3}{r^2}$$

2.- Punto en la superficie, **S**:

$$r \equiv R \quad H_S = \frac{4}{3} \pi K \rho R$$

3.- Punto en el interior, **I**:

$$H_I \cdot 4\pi r_i^2 = \frac{4}{3} \pi r_i^3 \rho \cdot 4\pi K$$

$$H_I = \frac{4}{3} \pi K \rho r_i$$

Cálculo del potencial U:

1.- En un punto exterior, **E**:

$$U_E - U_\infty = U_E = - \int_E^\infty H_E \cdot dr$$

$$U_E = \frac{4}{3} \pi K \rho \frac{R^3}{r}$$

2.- En un punto de la superficie, **S**:

$$r \equiv R \quad U_S = \frac{4}{3} \pi K \rho R^2$$

3.- En un punto del interior, I :

$$U_i - U_s = \int_{r_i}^R H_i \cdot ds$$

$$U_i = \frac{4}{3} \pi K \rho R^2 + \frac{4}{3} \pi K \rho \int_R^{r_i} r_i \cdot dr_i$$

$$U_i = \frac{\pi K \rho}{3} (4R^2 - 2r_i^2)$$

En las figura 112 se han representado gráficamente los vectores del campo y del potencial.

5.- TEORÍA DE OPERADORES.-**5.1.- CONCEPTOS.-**

De forma genérica, un operador es un símbolo que representa una operación de cálculo.

En las operaciones numéricas y algebraicas, se tienen los operadores (+) *más*, (-) *menos*, (·) *por*, (:) *dividido por*, (√) *raíz*, etc...

En las funciones escalares de variable escalar se encuentran los operadores (D) *derivada* e (∫) *integral*.

En las funciones vectoriales de variable escalar (definitivas de los campos vectoriales), el más empleado es el operador (∇) *nabla*, definido por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Como se ve, nabla no es un verdadero vector, sino un símbolo que solo adquiere significado físico cuando se aplica a funciones, de x , y , z . Indica, simplemente, una operación de cálculo.

a) *Nabla aplicado a una función escalar [a = a (x, y, z)]*

$$\nabla_a = \frac{\partial a}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \nabla_a = \mathbf{grad\ a}$$

b) *Nabla aplicado en una función vectorial $\vec{v} = \vec{v} (x, y, z)$, “escalarmente”.*

$$\nabla \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \nabla \vec{V} = \mathbf{div\ V}$$

c) *Nabla aplicado a una función vectorial $\vec{v} = \vec{v} (x, y, z)$, “vectorialmente”.*

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \Rightarrow \nabla \times \vec{V} = \text{rot } \vec{V}$$

5.2.- APLICACIONES DEL OPERADOR NABLA.-

NOTA 39: En términos generales, y teniendo en cuenta la operación de derivación que nabra implica, se tendrá:

$$\nabla * (S \circ T) = \nabla * (S_c \circ T) + \nabla * (S \circ T_c)$$

representando por S_c y T_c valores constantes.

En el caso en que S y T sean funciones vectoriales, las operaciones $(*)$ y (\circ) serán productos escalares, vectoriales, mixtos, dobles, etc. En estos casos ha de tenerse cuidado al operar de respetar sus propiedades. Además, ha de tenerse siempre presente que el operador nabra nunca puede quedar al final de una expresión y que tampoco puede quedar delante de una constante.

a) *Funciones constantes:*

$$\varphi = \text{cte.} \Rightarrow \nabla \varphi_c = \mathbf{0} \rightarrow \text{grad } \varphi_c = \mathbf{0}$$

$$\vec{V} = \text{cte.} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = \mathbf{0} \rightarrow \text{div } \vec{V}_c = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \mathbf{0} \rightarrow \text{rot } \vec{V}_c = \mathbf{0}$$

b) *Función suma de otras:*

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi + \psi) &= \nabla\varphi + \nabla\psi & \rightarrow & \quad \mathbf{grad}(\varphi + \psi) = \mathbf{grad}\varphi + \mathbf{grad}\psi \\ \nabla \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) &= \nabla \cdot \vec{V}_1 + \nabla \cdot \vec{V}_2 & \rightarrow & \quad \mathbf{div}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \mathbf{div}\vec{V}_1 + \mathbf{div}\vec{V}_2 \\ \nabla \times (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) &= \nabla \times \vec{V}_1 + \nabla \times \vec{V}_2 & \rightarrow & \quad \mathbf{rot}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \mathbf{rot}\vec{V}_1 + \mathbf{rot}\vec{V}_2 \end{aligned}$$

c) Función producto de funciones $(\varphi \cdot \psi)$, $(\varphi \cdot \vec{v})$, $(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$, $(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)$:

$$\begin{aligned} - \nabla \cdot (\varphi \cdot \psi) &= \nabla \cdot (\varphi_{\mathbf{C}} \cdot \psi) + \nabla \cdot (\varphi \cdot \psi_{\mathbf{C}}) \\ &\quad \nabla \cdot (\varphi_{\mathbf{C}} \cdot \psi) = \varphi_{\mathbf{C}} \cdot \nabla \cdot \psi = \varphi \cdot \nabla \cdot \psi \\ &\quad \nabla \cdot (\varphi \cdot \psi_{\mathbf{C}}) = \psi_{\mathbf{C}} \cdot \nabla \cdot \varphi = \psi \cdot \nabla \cdot \varphi \\ \nabla \cdot (\varphi \cdot \psi) &= \varphi \nabla \cdot \psi + \psi \nabla \cdot \varphi \quad \rightarrow \quad \mathbf{grad}(\varphi \cdot \psi) = \varphi \mathbf{grad}\psi + \psi \mathbf{grad}\varphi \end{aligned}$$

- $\nabla \times (\varphi \cdot \psi)$ **no tiene sentido**

$$\begin{aligned} - \nabla \cdot (\varphi \vec{v}) &= \nabla \cdot (\varphi_{\mathbf{C}} \cdot \vec{v}) + \nabla \cdot (\varphi \cdot \vec{v}_{\mathbf{C}}) \\ &\quad \nabla \cdot (\varphi_{\mathbf{C}} \cdot \vec{v}) = \varphi_{\mathbf{C}} \cdot \nabla \cdot \vec{v} = \varphi \cdot \nabla \cdot \vec{v} \\ &\quad \nabla \cdot (\varphi \cdot \vec{v}_{\mathbf{C}}) = \nabla \cdot \varphi \cdot \vec{v}_{\mathbf{C}} = \vec{v}_{\mathbf{C}} \cdot \nabla \cdot \varphi = \vec{v} \cdot \nabla \cdot \varphi \\ \nabla \cdot (\varphi \vec{v}) &= \varphi \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi \quad \rightarrow \quad \mathbf{div}(\varphi \vec{v}) = \varphi \mathbf{div}\vec{v} + \vec{v} \mathbf{grad}\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \nabla \times (\varphi \vec{v}) &= \nabla \times (\varphi_{\mathbf{C}} \vec{v}) + \nabla \times (\varphi \cdot \vec{v}_{\mathbf{C}}) \\ &\quad \nabla \times (\varphi_{\mathbf{C}} \vec{v}) = \varphi_{\mathbf{C}} \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \varphi (\nabla \times \vec{v}) \\ &\quad \nabla \times (\varphi \cdot \vec{v}_{\mathbf{C}}) = -\vec{v}_{\mathbf{C}} \times \nabla \varphi = \nabla \varphi \times \vec{v}_{\mathbf{C}} = \nabla \varphi \times \vec{v} \\ \nabla \times (\varphi \vec{v}) &= \varphi (\nabla \times \vec{v}) + \nabla \varphi \times \vec{v} \quad \rightarrow \quad \mathbf{rot}(\varphi \vec{v}) = \varphi \mathbf{rot}\vec{v} + (\mathbf{grad}\varphi) \times \vec{v} \end{aligned}$$

$$- \nabla \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \nabla (\vec{v}_{1C} \cdot \vec{v}_2) + \nabla (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_{2C})$$

(utilizando la propiedad del doble producto vectorial)

$$\nabla \cdot (\vec{v}_{1C} \cdot \vec{v}_2) = (\vec{v}_{1C} \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_{1C} \times (\nabla \times \vec{v}_2) = (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times (\nabla \times \vec{v}_2)$$

$$\nabla \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_{2C}) = (\vec{v}_{2C} \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_{2C} \times (\nabla \times \vec{v}_1) = (\vec{v}_2 \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \times (\nabla \times \vec{v}_1)$$

$$\nabla \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_2 \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times (\nabla \times \vec{v}_2) + \vec{v}_2 \times (\nabla \times \vec{v}_1)$$

$$- \nabla \times (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \quad \text{no tiene sentido.}$$

$$- \nabla \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \nabla \cdot (\vec{v}_{1C} \times \vec{v}_2) + \nabla \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_{2C})$$

(utilizando la propiedad del producto mixto)

$$\nabla \cdot (\vec{v}_{1C} \times \vec{v}_2) = -\vec{v}_{1C} \cdot (\nabla \times \vec{v}_2) = -\vec{v}_1 \cdot (\nabla \times \vec{v}_2)$$

$$\nabla \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_{2C}) = \vec{v}_{2C} \cdot (\nabla \times \vec{v}_1) = \vec{v}_2 \cdot (\nabla \times \vec{v}_1)$$

$$\nabla \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = -\vec{v}_1 \cdot (\nabla \times \vec{v}_2) + \vec{v}_2 \cdot (\nabla \times \vec{v}_1) \quad \Rightarrow \quad \text{div} (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = -\vec{v}_1 \text{ rot } \vec{v}_2 + \vec{v}_2 \text{ rot } \vec{v}_1$$

$$- \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \nabla \times (\vec{v}_{1C} \times \vec{v}_2) + \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_{2C})$$

(utilizando la propiedad del doble producto vectorial)

$$\nabla \times (\vec{v}_{1C} \times \vec{v}_2) = -(\vec{v}_{1C} \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_{1C} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}_2) = -(\vec{v}_1 \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot (\nabla \cdot \vec{v}_2)$$

$$\nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_{2C}) = -\vec{v}_{2C} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}_1) + (\vec{v}_{2C} \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \cdot (\nabla \cdot \vec{v}_1) + (\vec{v}_2 \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_1$$

$$\nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = -(\vec{v}_1 \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot (\nabla \cdot \vec{v}_2) - \vec{v}_2 \cdot (\nabla \cdot \vec{v}_1) + (\vec{v}_2 \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_1$$

$$\Rightarrow \quad \text{rot} (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \text{ div } \vec{v}_2 - \vec{v}_2 \text{ div } \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \cdot \vec{v}_2$$

5.3.- COMBINACIÓN DE OPERADORES NABLA.-

- $\nabla(\nabla\varphi) = \text{grad}(\text{grad}\varphi) = \text{no tiene sentido.}$

- $\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \text{grad}(\text{div}\vec{v}) =$

$$= \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}$$

- $\nabla(\nabla \times \vec{v}) = \text{grad}(\text{rot}\vec{v}) = \text{no tiene sentido.}$

- $\nabla \cdot (\nabla\varphi) = \text{div}(\text{grad}\varphi) = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi \quad (\text{laplaciana de } \varphi)$

- $\nabla \times (\nabla\varphi) = \text{rot}(\text{grad}\varphi) = [\nabla, \nabla, \varphi] = \mathbf{0}$

- $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) = \text{div}(\text{div}\vec{v}) = \text{no tiene sentido.}$

- $\nabla \times (\nabla \cdot \vec{v}) = \text{rot}(\text{div}\vec{v}) = \text{no tiene sentido.}$

- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \text{div}(\text{rot}\vec{v}) = [\nabla, \nabla, \vec{v}] = \mathbf{0}$

- $\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = -(\nabla \cdot \nabla)\vec{v} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \nabla) + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \nabla = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \nabla)$
 $\text{rot}(\text{rot}\vec{v}) = \text{grad}(\text{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v} \quad (\Delta\vec{v} \text{ laplaciana de } \vec{v})$

NOTA 40: Los valores de la Laplaciana escalar y vectorial, en coordenadas cartesianas, son los siguientes:

- $\text{Lap}\varphi = \Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \text{div grad}\varphi = \text{div} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

- $\text{Lap}\vec{v} = \Delta\vec{v} = \text{grad div}\vec{v} - \text{rot rot}\vec{v}$

En efecto, si $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

$$\text{rot}\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{v} = & \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} \right) \vec{j} + \\ & + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial y} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

Sumando y restando dentro de cada paréntesis :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{v} = & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right] \vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right] \vec{j} + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \vec{k} = \\ = & \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{v} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \text{div } \vec{v} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \text{div } \vec{v} \vec{k} - \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \vec{k} \right) \end{aligned}$$

$$\text{rot rot } \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \Delta \vec{v}$$

$$\text{siendo } \Delta \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \text{rot rot } \vec{v}$$

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \vec{i} + \Delta v_y \vec{j} + \Delta v_z \vec{k}$$

6.- INTRODUCCIÓN A LAS ONDAS MECÁNICAS.-

- Como se sabe, una región del espacio donde a cada punto de la misma se le puede hacer corresponder, según una cierta propiedad, un escalar o un vector, constituye, respectivamente, un campo escalar o un campo vectorial.

Matemáticamente:

$$U = f(x, y, z) \dots \dots \text{campo escalar}$$

$$\vec{V} = f(x, y, z) \dots \dots \text{campo vectorial}$$

Existen muchos tipos de campos, escalares y vectoriales, de acuerdo con la propiedad que representan.

Ejemplo de los primeros son la distribución de temperatura en la atmósfera, o en el interior de una barra de acero; la distribución de presiones en la atmósfera o en el interior de un tubo de órgano; etc...

Ejemplo de los segundos pueden ser las acciones sobre una carga eléctrica en reposo (*campo electrostático*); las acciones sobre una carga eléctrica en movimiento (*campo electromagnético*); la acción mutua entre masas (*campo gravitatorio*); las tensiones en el interior de una pieza metálica (*campo de tensiones*); las velocidades en el interior de un fluido en movimiento (*campo de velocidades*); etc...

Como se ve, unos campos pueden considerarse abiertos (prácticamente ilimitados) y otros son campos confinados (limitados a un volumen considerado).

- Cuando en uno cualquiera de estos campos se introduce una perturbación en uno o varios puntos del mismo, la experiencia enseña que esta “*modificación*” se va trasladando a otros puntos del campo, conformando lo que se denomina una “***onda de propagación***”.

La intensidad de la perturbación propagada, y la velocidad con la que esta se desplaza a lo largo del campo, dependen de la modificación (excitación) introducida, de las características del medio (el vacío o una barra metálica, por ejemplo), de los obstáculos (físicos) que la onda encuentra en su camino y de la presencia de otras ondas simultáneas.

De esta manera, lo que antes era un campo estacionario, ahora se convierte en otro “*no estacionario*”.

Matemáticamente:

$$U = f(x, y, z, t) \dots \text{campo escalar no estacionario}$$

$$\vec{V} = f(x, y, z, t) \dots \text{campo vectorial no estacionario}$$

El estudio de las ondas de propagación en campos se encamina a conocer la amplitud de las variaciones habidas en los diferentes puntos (x, y, z) , y en cada instante de tiempo t (en cada punto), es decir, su variación espacial y temporal, así como la velocidad con la que se desplaza la propia perturbación (velocidad en cada punto y en cada instante t).

- Desde el punto de vista del medio en el que tiene existencia física el campo, y a través del cual se transmite la perturbación, los campos (escalares y vectoriales) pueden dividirse en dos grupos: campos que están soportados por un medio elástico (un metal, un gas, etc...) y aquellos otros que no lo están (el vacío, por ejemplo).

Ejemplo de los primeros son el campo de tensiones en el seno de un metal, o el de presiones en un tubo de órgano, o el de presiones (o alturas) en un estanque con agua (o el mar), etc...

Ejemplo de los segundos pueden ser los campos eléctricos, magnéticos, electromagnéticos, gravitatorios, etc...

- En el área de la Ingeniería Mecánica quedan incluidos los primeros (que serán los abordados en este trabajo), que dan lugar a las que se denominan "**ondas mecánicas**".

De acuerdo con lo expuesto hasta ahora, para que aparezca en un campo una onda mecánica tiene que haber una fuente perturbadora (*foco emisor*), y un medio con dos propiedades: *masa y elasticidad*.

El foco emisor introduce sobre el medio una cantidad de energía (desde el exterior), en forma de movimiento, fuerza impulsiva (*choque*), fuerza permanente, calor, aumento de presión, etc...

Esta acción exterior modifica el estado inicial de las masas (en el punto, o puntos, de aplicación de dicha acción), desplazándolas, mientras que la elasticidad del medio tiene un doble efecto: por un lado, el movimiento de una masa tiende a "*arrastrar*" a las

contiguas, y al mismo tiempo tienden a devolverlas a la situación inicial tan pronto desaparezca la perturbación.

En resumen, la energía exterior introducida en un punto del campo (*perturbación*) desplaza una o varias masas del mismo. Estas, a su vez, desplazan (*arrastran*) a las vecinas, mientras que las primeras tienden a recuperar su posición (si cesó la acción exterior). De esta forma, la perturbación va “*desplazándose*” a lo largo del campo, constituyendo una “**onda mecánica**”.

NOTA 41: El nombre de onda proviene de la forma que algunos medios adoptan cuando se propaga la perturbación (ondas en un estanque, o en una cuerda, por ejemplo).

- Para conocer algunos detalles generales de las ondas puede ser de utilidad analizar un caso típico (y fácilmente reproducible), cual es la onda producida en una cuerda que descansa sobre una superficie plana, al aplicar sobre uno de sus extremos una fuerza (ascendente o descendente) de corta duración (como se ve en la figura **113**) (vulgarmente conocida como “*latigazo*”).

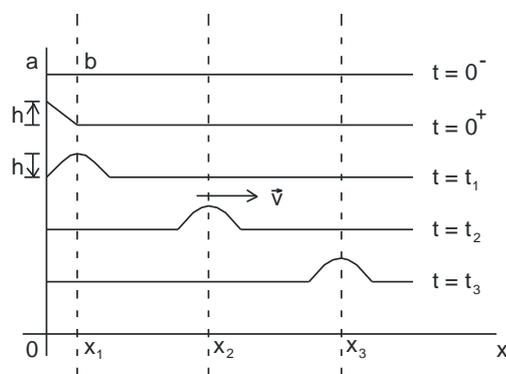


Fig. 113

Cuando al tramo \overline{ab} de una cuerda se le aplica un fuerte “tirón” hacia arriba y luego hacia abajo (hasta colocarlo en la posición inicial), y ninguno más, puede observarse como se forma una onda en la cuerda, cuya amplitud depende de la amplitud inicial (h), y que se desplaza hacia la derecha con una velocidad constante \vec{v} (conocida como “*pulso*”), (que más adelante se verá que depende de la naturaleza del medio de propagación, (cuerda de cáñamo, o de nylon, por ejemplo) y de la tensión de la cuerda, pero no de la acción perturbadora).

Si en lugar de una sola subida y bajada rápidas del extremo \overline{ab} de la cuerda, se le diesen tres, a intervalos de tiempo entre la primera y la segunda de s_1 segundos, y de

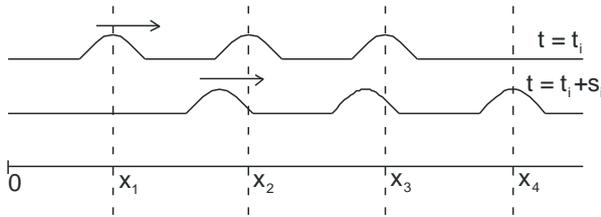


Fig. 114

s_2 segundos entre la segunda y la tercera, (fig. 114) el resultado sería el desplazamiento por la cuerda de tres ondas, es decir, de un **“tren de pulsos”**. (Como se verá más adelante, las amplitudes de los pulsos pueden ser diferentes, dependiendo de las alturas h iniciales, pero la velocidad de las tres será la misma).

Otro ejemplo fácil de materializar en la práctica sería el de la aparición y propagación de ondas en una cuerda tensada, y en la que a uno de sus extremos se le aplica un movimiento vertical de tipo armónico, entre las alturas h y $-h$, como se ve en la fig. 115.

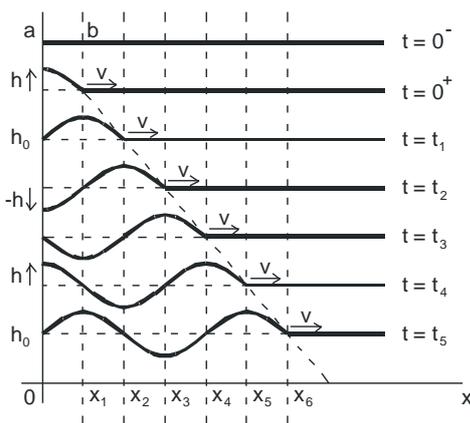


Fig. 115

Si la fuerza de variación senoidal aplicada en el extremo a de la cuerda se mantiene en el tiempo, el resultado es un tren continuo de ondas senoidales que se mueve de izquierda a derecha con velocidad \vec{v} . (Conocido como **“tren de ondas”**).

En cada punto x_i de la cuerda, esta oscilará por encima y por debajo de su posición de equilibrio, de manera que el gráfico *desplazamiento-tiempo*, en ese punto, también será de tipo senoidal (figura 116)

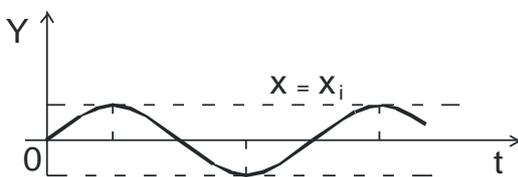


Fig. 116

(Obsérvese que las longitudes de las ondas son diferentes en ambos casos).

(Todas estas cuestiones serán analizadas con todo detalle más adelante).

- Otro aspecto que puede observarse fácilmente en una experiencia práctica es la pérdida de altura del pulso que se transmite, lo que se conoce como **“amortiguamiento” de la onda**. (fig. 117).

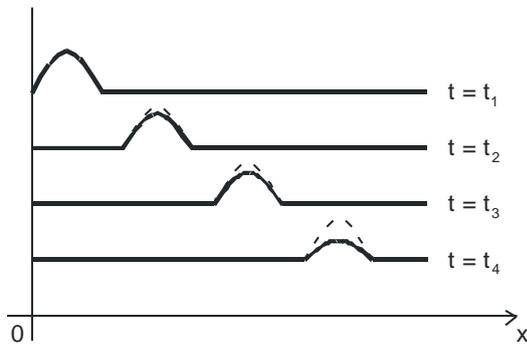


Fig. 117

Esto se debe, en el caso de la cuerda, a fenómenos de rozamientos internos (*histeréticos*) en el seno del material, así como otros con el aire circundante, que van absorbiendo la energía de la onda y disminuyendo, en consecuencia, su altura.

- En el ejemplo que se viene analizando se observa un aspecto esencial de las ondas mecánicas, cual es la inexistencia de desplazamiento del medio en el sentido de “*transporte de masas*”.

En efecto, lo que se desplaza es la perturbación, no las partículas de la cuerda, que solo se limitan a oscilar alrededor de su posición de equilibrio.

Por tanto, una onda no implica transporte de materia, pero sí transporte de energía.

(En el caso de la cuerda, la energía suministrada en su extremo *a* es “transportada” hasta el otro extremo por la onda, donde puede realizar un trabajo hacia un medio exterior a la misma).

NOTA 42: En los medios elásticos, las fuerzas de recuperación, que tienden a llevar las masas a su posición de equilibrio tan pronto cesa la perturbación, son del tipo $F = -k \cdot \delta$, siendo *k* el coeficiente de rigidez, típico de cada material, y δ el desplazamiento habido alrededor de la posición de equilibrio.

Ello quiere decir que si la perturbación introducida induce tensiones superiores al límite elástico, si se producirá un auténtico “*transporte de material*”. (Un ejemplo típico de este comportamiento es la explosión de una bomba en el aire, que origina un claro desplazamiento de esta).

- En el ejemplo de la cuerda se observa como la onda se mueve en un solo plano (el vertical en este caso), y que además, la dirección de la propagación (de la velocidad de onda \vec{v}) es perpendicular a la dirección en que oscila cada punto de la cuerda, que es vertical.

Se trata, pues, de una onda unidireccional y transversal.

Generalizando estos conceptos, puede hacerse una clasificación de las ondas, según el número de dimensiones en las que se propagan: *unidimensionales*, *bidimensionales* y *tridimensionales*; y según la relación entre la dirección de la propagación de la energía (velocidad de la onda) y la del movimiento de los puntos del medio (alrededor de la posición de equilibrio) en ondas longitudinales, transversales y mixtas.

El medio de propagación tiene gran importancia de cara a la aparición de un tipo u otro de onda.

En efecto, las ondas longitudinales se forman en medios capaces de transmitir tensiones de *tracción-compresión*, mientras que las transversales se forman en medios capaces de transmitir esfuerzos de flexión.

Ejemplo de las primeras es la transmisión de la energía de un golpe en el extremo de una barra de acero, o la transmisión de una onda de presión en el interior de un cilindro cuando un émbolo da un impulso de presión en uno de sus extremos.

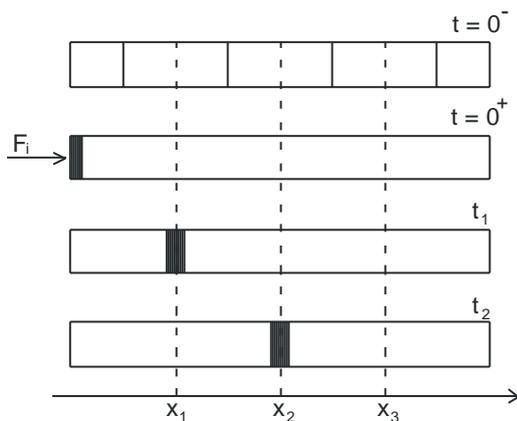


Fig. 118

En la figura 118 se observa una barra metálica con una distribución homogénea de tensiones en su interior.

Al someterla a un impacto de módulo F_i (fuerza durante un muy corto intervalo de tiempo), la zona próxima se ve fuertemente comprimida (aumenta el valor de la tensión).

Esta sección comprime a la adyacente por la derecha, mientras que recupera su posición inicial por la izquierda (una vez que haya cesado la acción F_i).

Así, la onda de tensión va desplazándose de izquierda a derecha, con la velocidad \vec{v} , que como puede verse, tiene la misma dirección que los desplazamientos de las partículas.

Ejemplo de las segundas son las ondas transmitidas a través de cables y cuerdas, superficie de líquidos, etc... Se caracterizan por presentar zonas elevadas (*crestas*) y otras hundidas (*valles*).

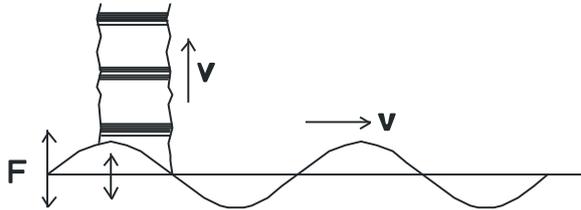


Fig. 119

En la figura 119 puede verse una onda de este tipo, en la que la dirección de la propagación es perpendicular a la de los desplazamientos de las partículas.

Si se tratase de una cuerda metálica, su movimiento origina presiones (o depresiones) sobre el aire que la rodea, creando en consecuencia, ondas de presión longitudinales sobre este (se moverán hacia arriba y hacia abajo con la velocidad \vec{v}').

Puede observarse también que las ondas longitudinales pueden transmitirse por gases, líquidos o sólidos (todos reaccionan frente a tracciones o compresiones), mientras que las transversales solo pueden transmitirse a través de sólidos.

En otras palabras, sobre los líquidos y gases no pueden aparecer ondas transversales.

7.- ESTUDIO GENERAL DE LAS ONDAS UNIDIRECCIONALES.-**7.1.- FORMULACIÓN MATEMÁTICA: ECUACIÓN DE ONDA**

En la figura 120 se ha representado una función $\xi = f(x)$, en la que la variable dependiente ξ puede representar la tensión (σ) en el interior de un sólido, la presión (p) en un gas, la altura (h) sobre un valor de referencia, etc. (incluyendo la intensidad del campo eléctrico, o magnético, gravitatorio, etc.)

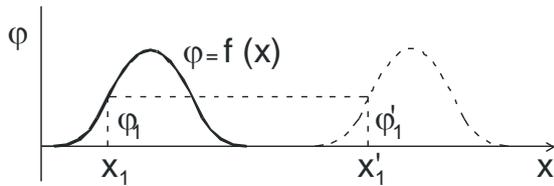


Fig. 120

Si se reemplaza x por $(x - e)$ o $(x + e)$, siendo e un número entero, es evidente que las formas de las curvas $\xi = f(x)$; $\xi = f(x - e)$; $\xi = f(x + e)$ son completamente idénticas. Solo habrá cambiado su posición relativa sobre el eje OX .

Si tomamos $e = vt$, siendo v la velocidad de desplazamiento de la función ξ a lo largo del eje OX , y t es el tiempo, se obtendrá una curva “viajera”, es decir, una “onda de propagación”.

En este caso, la función ξ tendrá la forma:

$$\xi(x, t) = f(x - vt) \quad \text{o} \quad \xi(x, t) = f(x + vt)$$

Tomando la expresión con signo “menos”, el valor de la función en el instante t será

$$\xi_1 = f(x_1 - vt), \quad \text{mientras que el valor de la función un intervalo } \Delta t \text{ posterior será}$$

$$\xi_1' = f[x_1' - v(t + \Delta t)].$$

Si no hay deformación de la función, siempre será $\xi_1 = \xi_1'$, es decir:

$$x_1 - vt = x_1' - v(t + \Delta t)$$

simplificando,

$$x_1' - x_1 = v \Delta t \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x_1' - x_1}{\Delta t}$$

de donde se deduce que v representa la velocidad de avance de la onda en el sentido positivo de x .

Igualmente habríamos obtenido que la función $\xi = (\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x} + \mathbf{e})$, o $\xi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x} + \mathbf{v}t)$ representa el movimiento de la onda hacia la izquierda.

En consecuencia, la expresión $\xi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x} \pm \mathbf{v}t)$ describe un fenómeno físico que “viaja”, se propaga sin deformación a lo largo del eje \mathbf{x} , en sentido positivo, negativo o ambos simultáneamente. (fig. 121a y 121b)

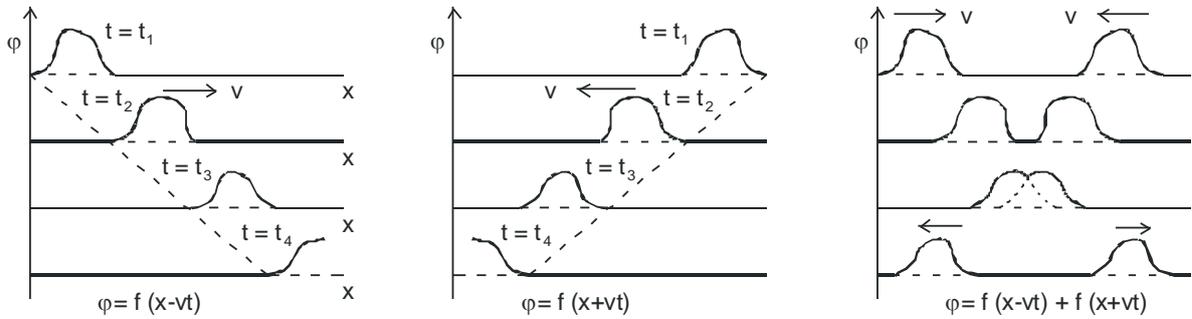


Fig. 121

NOTA 43: En la figura 9c puede observarse la suma de las dos ondas cuando se encuentran.

Este fenómeno, que será estudiado más adelante, se denomina “interferencia”.

Para simplificar los cálculos se supondrá conocida la función de onda que liga las variables ξ , \mathbf{x} , t y \mathbf{v} y se demostrará que una función del tipo $\xi = f(\mathbf{x} \pm \mathbf{v}t)$ es solución de la misma.

La ecuación que describe el movimiento de una onda plana que se propaga en una dirección con la velocidad \mathbf{v} y sin distorsión, viene dada por:

$$\frac{\partial^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^2}$$

NOTA 44: Para simplificar la nomenclatura, no se escribirá $\xi(\mathbf{x}, t)$, sino solo ξ .

En efecto, derivando dos veces la función $\xi = f(\mathbf{x} \pm \mathbf{v}t)$ se tiene,

$$\text{llamando } \mathbf{u} = \mathbf{x} \pm \mathbf{v}t \quad \Rightarrow \quad \xi = f(\mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \pm \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{d\xi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} = \frac{d\xi}{du}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d\xi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{d\xi}{du}$$

Derivando de nuevo, queda:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} = \frac{d^2 \xi}{du^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \cdot \frac{d^2 \xi}{du^2} \cdot (\pm v) = v^2 \cdot \frac{d^2 \xi}{du^2}$$

Eliminando $\frac{d^2 \xi}{du^2}$ entre ambas expresiones, queda:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathbf{x}^2} \quad (\text{Ecuación diferencial lineal de segundo orden}).$$

NOTA 45: Como se observa, la solución de esta ecuación diferencial es la suma de dos ondas que se propagan en sentidos contrarios.

Si una onda se propaga en un solo sentido, la solución será la ecuación con signo “más” solamente.

Pero si se tuviera una onda incidente que se propaga hacia la derecha y otra reflejada que se propaga hacia la izquierda, debe emplearse la solución general

$$\xi = f(\mathbf{x} - vt) + f(\mathbf{x} + vt)$$

NOTA 46: Las expresiones anteriores corresponden a ondas unidireccionales, que se desplazan a lo largo de una dirección OX.

Más adelante se expondrán algunas consideraciones relativas a ondas bidimensionales y tridimensionales.

7.2.- MOVIMIENTO ONDULATORIO ARMÓNICO Y/O PERIÓDICO

En el caso de que la función $\xi(\mathbf{x}, t)$ sea armónica, puede escribirse:

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \xi_0 \text{sen } k(\mathbf{x} - vt)$$

En esta expresión k tiene un significado especial. En efecto, reemplazando el valor de \mathbf{x} por el de $\mathbf{x} + 2\pi/k$ se obtiene el mismo valor para la función:

$$\begin{aligned} \xi\left(\mathbf{x} + \frac{2\pi}{k} - vt\right) &= \xi_0 \text{sen } k\left(\mathbf{x} + \frac{2\pi}{k} - vt\right) = \\ &= \xi_0 \text{sen } [k(\mathbf{x} - vt) + 2\pi] = \\ &= \xi_0 \text{sen } k(\mathbf{x} - vt) = \xi(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

En consecuencia, $\frac{2\pi}{k}$ es el “período espacial” de la onda armónica, y se denomina λ . (la curva se repite cada valor de \mathbf{x} igual a $\lambda = \frac{2\pi}{k}$).

NOTA 47: En el caso de ondas transversales de tipo armónico, la longitud de onda es la distancia entre dos crestas (o dos valles) consecutivos.

En las ondas longitudinales, λ es la distancia entre dos compresiones máximas consecutivas (o dos dilataciones – tracciones).

La expresión $\xi(\mathbf{x}, t) = \xi_0 \text{sen } \frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{x} - vt)$ representa una onda armónica moviéndose hacia la derecha según OX con la velocidad v .

Si ahora se observa la evolución de la función $\xi(\mathbf{x}, t)$ en un punto \mathbf{x} fijo, es decir, el comportamiento temporal de la función ξ en cada punto, se tienen los nuevos conceptos de período T y frecuencia ν .

Período es el tiempo (en segundos) que tarda el punto en realizar una oscilación completa (desde su posición de equilibrio hasta la máxima amplitud, luego a la mínima y finalmente de nuevo a la de equilibrio).

Frecuencia será el número de períodos completos en un segundo.

NOTA 48: En este tipo de movimientos, la frecuencia y el período coinciden con las del foco emisor, siempre que no exista amortiguamiento en el medio.

Las tres magnitudes, longitud de onda λ , frecuencia ν y período T , están relacionadas entre sí, y con la velocidad v , por la expresión:

$$v = \lambda \cdot \nu = \frac{\lambda}{T} \quad (\text{siendo } \nu = \frac{1}{T})$$

En efecto, como ν es el número de oscilaciones en 1 segundo, y cada oscilación da lugar a una onda de longitud λ , en t segundos, aparecerán $\nu \cdot t$ ondas, las cuales ocupan un espacio de $\nu \cdot t \cdot \lambda$ metros.

Por otra parte, la longitud $\nu \cdot t \cdot \lambda$ es igual al espacio recorrido con la velocidad v , es decir, $v \cdot t$.

Igualando ambas longitudes: $\nu \cdot t \cdot \lambda = v \cdot t \Rightarrow \lambda = \frac{v}{\nu} = v \cdot T$

Como se ve, la longitud de onda es la distancia que avanza el movimiento ondulatorio en un período. De acuerdo con estos parámetros, la función armónica puede escribirse también:

$$\xi = \xi_0 \text{ sen } 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

La representación gráfica de esta función pone de manifiesto la doble periodicidad del movimiento ondulatorio armónico: una en el tiempo, dada por el período T , y otra en el espacio, dada por la longitud de onda λ .

Ambas están relacionadas por la velocidad de propagación:

$$\lambda = v \cdot T$$

En la figura 122 se ha representado una onda armónica, de longitud λ , y que avanza con la velocidad v , en diferentes intervalos de tiempo:

$$t_0; t_0 + \frac{T}{4}; t_0 + \frac{T}{2}; t_0 + \frac{3T}{4}; t_0 + T.$$

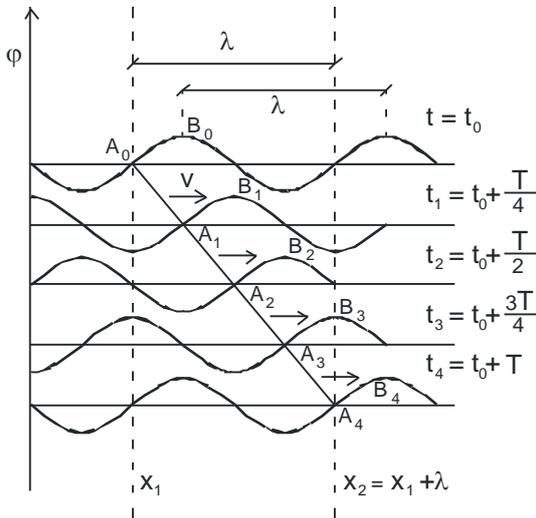


Fig. 122

En las figuras 122 y 123 se aprecian claramente las dos periodicidades: una en el espacio, dada por la longitud de onda λ , y otra en el tiempo, dada por el período T .

Ambas están relacionadas por la expresión:

$$\lambda = v \cdot t$$

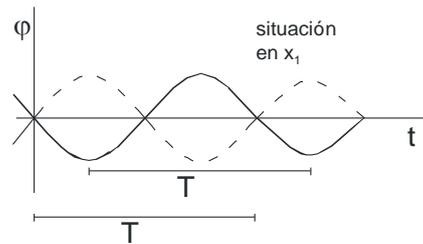


Fig. 123

NOTA 49: Es fácil comprobar que la ecuación de onda se satisface para una onda senoidal $\xi = \xi_0 \text{ sen } k(x - vt)$.

En efecto, derivando dos veces, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= k \xi_0 \cos k(x - vt) & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k^2 \xi_0 \text{ sen } k(x - vt) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -kv \xi_0 \cos k(x - vt) & \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -k^2 v^2 \xi_0 \text{ sen } k(x - vt) \end{aligned}$$

Por tanto,
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

En el caso de ondas periódicas, estas pueden considerarse como suma de ondas armónicas, de acuerdo con el análisis de *Fourier*.

Si $\xi = f(x)$ es una función periódica en el espacio (fig. 124), de período λ , se tendrá:

$$\xi = f(x) = f(x + \lambda)$$

Por lo tanto, aplicando el desarrollo de *Fourier*:

$$\xi = f(x) = a_0 + a_1 \cos kx + a_2 \cos 2kx + \dots + a_n \cos nkx + b_1 \operatorname{sen} kx + b_2 \operatorname{sen} 2kx + \dots + b_n \operatorname{sen} nkx$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

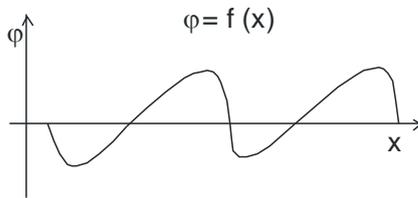


Fig. 124

Si $\xi = f(x - vt)$ es un movimiento ondulatorio periódico en el tiempo, se repite en los instantes $T, 2T, 3T, \dots, \mu T$ (fig. 125).

Es decir,

$$\xi = f(x - vt) = f[x - v(t \pm T)] = f(x - vt \mp vT)$$

(En un instante de tiempo dado, el valor de ξ es el mismo cuando se aumenta o disminuye $vT, 2vT, 3vT, \dots$).

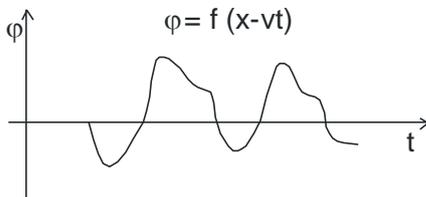


Fig. 125

Aplicando el desarrollo de *Fourier* a la ecuación $\xi = f(x - vt)$ se tiene:

$$\xi = a_0 + a_1 \cos k(x - vt) + a_2 \cos 2k(x - vt) + \dots + a_n \cos nk(x - vt) + b_1 \operatorname{sen} k(x - vt) + b_2 \operatorname{sen} 2k(x - vt) + \dots + b_n \operatorname{sen} nk(x - vt)$$

siendo

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \cos nkx dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \operatorname{sen} nkx dx$$

NOTA 50:

La expresión $\xi(\mathbf{x}, t) = \xi_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ puede escribirse también

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \xi_0 \operatorname{sen}(k\pi - \omega t)$$

en donde $\omega = k \cdot v = \frac{2\pi v}{\lambda}$, siendo ω la “frecuencia circular” de la onda.

NOTA 51:

En el caso de la función $\xi = \xi_0 \operatorname{sen} \omega t$, la ω tiene un significado físico.

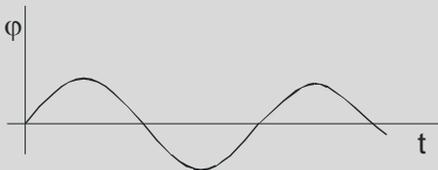
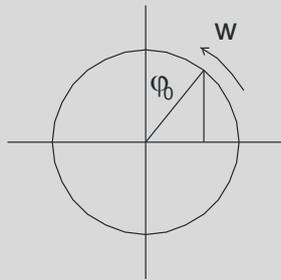


Fig. 126

En efecto, ω es la velocidad angular que se imprime al vector giratorio de módulo ξ_0 , tal que su proyección sobre el eje vertical ξ es, en todo momento, el valor

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen} \omega t$$

7.3.- CASOS PARTICULARES DE INTERÉS EN INGENIERÍA MECÁNICA

7.3.1.- ONDAS ELÁSTICAS EN PIEZAS METÁLICAS

7.3.1.1.- ONDAS LONGITUDINALES

El fenómeno de propagación de ondas en el seno de un metal puede comprenderse intuitivamente si se analiza el comportamiento de una barra metálica de sección constante y longitud infinita, como se ve en la figura 127, sometida a una fuerza impulsiva de magnitud F_0 .

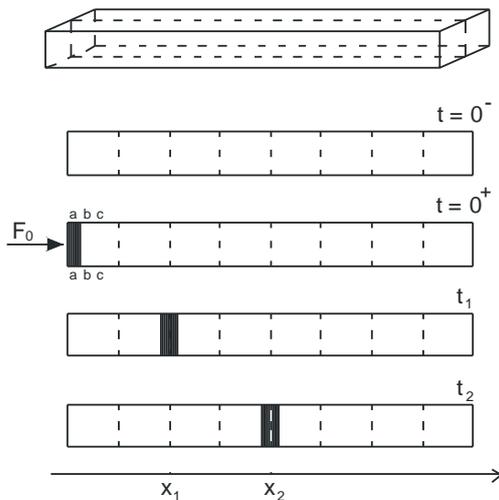


Fig. 127

Antes del impacto ($t = 0^-$), el estado de las tensiones en el interior de la barra es homogéneo y nulo (no hay zonas comprimidas ni tensionadas)

En el momento del impacto ($t = 0^+$) se produce una fuerte compresión en la cara izquierda (sección **a-a**), mientras que el resto de la pieza continúa igual que estaba.

Una vez que cesa el impacto, la zona comprimida **a-a** presiona sobre la sección próxima **b-b**, comprimiéndola también.

Además, la sección **a-a** comienza a descomprimirse, tendiendo a recuperar su situación primitiva. Este fenómeno *compresión – descompresión* va propagándose a lo largo de toda la barra, de izquierda a derecha, constituyéndose lo que se denomina una *onda elástica*.

Cualquier partícula en el interior de la barra oscila a derecha e izquierda, alrededor de su posición de equilibrio.

Como, además, la dirección de la propagación de la onda, y la de las oscilaciones de las partículas alrededor de su posición de equilibrio, coinciden, se trata de una onda longitudinal.

A continuación va a estudiarse este fenómeno con más detalle, determinando la ecuación de onda y la velocidad de propagación.

NOTA 52:

Antes de comenzar el estudio de estas ondas es necesario tener claros algunos conceptos básicos, relativos al comportamiento elástico de los materiales metálicos.

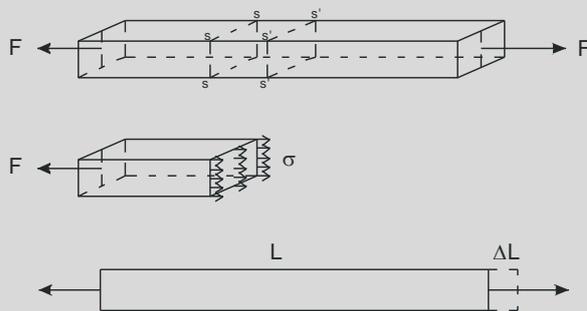


Fig. 128

En la barra sometida a una fuerza de tracción, como la de la figura 128, al suponer un corte de la misma, el equilibrio de su parte izquierda se establece con la fuerza exterior F y las tensiones σ que la parte derecha ejerce sobre la izquierda.

Estas tensiones σ son vectores normales a la superficie (en este caso) y cuyo módulo vale

$$\sigma = F/A \quad \left(\frac{N}{m^2} \right)$$

Estos valores son idénticos para todas las secciones s - s ; s' - s' (también en este caso).

Por otro lado, bajo la acción de la fuerza F la barra, de longitud L , se alarga una distancia ΔL , denominándose ε el alargamiento unitario

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (\text{adimensional}).$$

NOTA 53:

Experimentalmente se ha comprobado en metales y otros materiales elásticos que existe una proporcionalidad entre la tensión σ y el

alargamiento unitario ε . (Ley de Hooke).

La constante de proporcionalidad es el módulo de elasticidad E (también conocido como módulo de *Young* Y)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

En el caso de una onda elástica que se desplaza por el interior de una barra, las tensiones σ y los alargamientos unitarios ε , no son constantes en toda su longitud. Es más, varían con el tiempo y a lo largo de toda la barra.

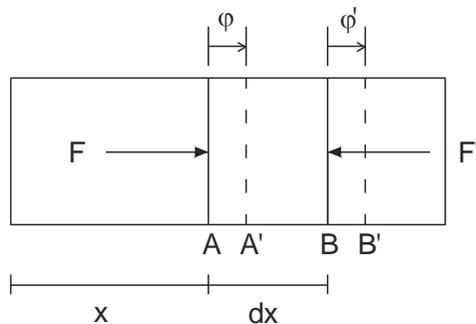


Fig. 129

Al llegar la onda de compresión a la sección **A-A** (fig. 129), la fuerza sobre la misma es F , y sobre otra sección próxima **B-B** (a la distancia dx) será F' (siendo $F' < F$).

La sección **A-A** es desplazada la distancia ξ (hasta **A'-A'**), mientras que la sección **B-B** es desplazada hasta la **B'-B'** (ξ'). Luego la distancia entre A' y B' (en el estado de deformación) será $dx + (\xi' - \xi) = dx + d\xi$

La deformación de la barra en el tramo dx será $d\xi$, por lo que el alargamiento

unitario será $\varepsilon = \frac{d\xi}{dx}$

Aplicando la ley de *Hooke*, y despejando la fuerza, se tiene:

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

(1)

(siendo A el área de la sección)

(se ha puesto la derivada parcial porque F depende de x y de t).

Por otra parte, del equilibrio de fuerzas (dinámico) sobre la masa $dm = \rho A dx$

(siendo ρ la densidad) y $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ la aceleración, se tiene:

$$F - F' = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = (\rho A dx) \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}} \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son las ecuaciones del campo elástico.

Derivando la (1) respecto de x y sustituyendo en la (2) se tiene la ecuación de onda:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = EA \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$

Ecuación similar a la ya conocida y que demuestra que el campo de deformación ξ se propaga a lo largo de la barra con la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Igualmente, también se puede encontrar una relación similar para las fuerzas F , llegándose a la expresión:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

indicando que el campo de fuerzas F se propaga a lo largo de la barra con la misma velocidad v que el de deformación.

NOTA 54:

Desde el punto de vista de la propagación de ondas en campos, en este caso coexisten dos campos vectoriales en el seno de la barra: el campo de deformaciones ξ y el campo de fuerzas F (que se ejerce sobre cada sección). Tanto ξ como F son funciones de la posición x y del tiempo t .

NOTA 55:

Si la acción exterior que actúa sobre la barra (o sobre los campos ξ y F) es de tipo armónico, el resultado es un tren de ondas que se propaga a lo largo de la barra, como se ve en la figura 130.

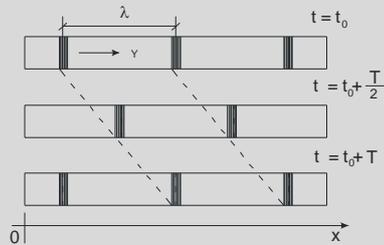


Fig. 130

Tanto para ξ como para F existe una doble periodicidad, en el espacio λ (longitud de onda) y en el tiempo T (período).

NOTA 56:

Las ondas longitudinales en barras pueden “visualizarse” sustituyendo la masa total por un conjunto de masas “puntuales” y la elasticidad del material por un conjunto de “resortes” de masa despreciable. (fig. 131)

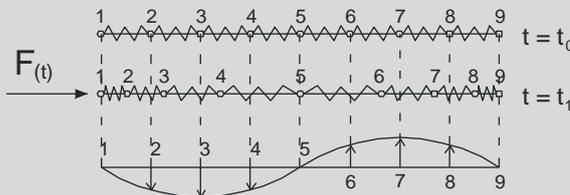


Fig. 131

Cuando sobre la esfera 1 se aplica una fuerza armónica, el movimiento que ésta adquiere se traslada a la 2 por medio del resorte, y de ésta a la 3 y así sucesivamente, con un cierto retraso temporal que dependerá de la distancia a la esfera 1.

En $t = t_1$, la posición de las esferas puede ser la mostrada en la figura. Puede verse que las esferas 1, 5 y 9 se encuentran en la misma posición ($\xi = 0$); las esferas 2, 3 y 4 están desplazadas hacia la izquierda (valores de ξ negativos), mientras que las esferas 6, 7 y 8 están desplazadas hacia la derecha (valores positivos). Graficando estos desplazamientos, se obtiene una representación visual de la onda longitudinal.

- En el caso de resortes sometidos a fuerzas exteriores de tracción o compresión, se produce un fenómeno similar al de las barras, propagándose una onda longitudinal como se aprecia en la figura 132.

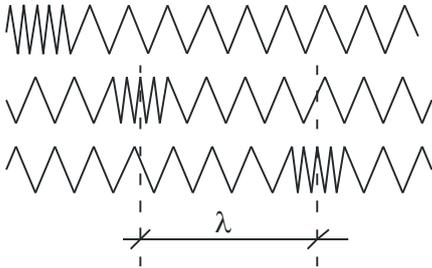


Fig. 132

En este caso, el módulo de elasticidad del resorte (K) sustituye al módulo de elasticidad del material (E), siendo

$$F = K \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

Considerando un trozo de resorte de longitud dx , su masa será $m \cdot dx$ (siendo m la masa por unidad de longitud).

Siguiendo el mismo procedimiento anterior se obtiene:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

La velocidad de propagación de la onda será en este caso $v = \sqrt{K/m}$

NOTA 57:

No debe confundirse el módulo de elasticidad del resorte K con la rigidez k .

En efecto, $F = k \cdot x$ siendo x el alargamiento del material (*barra*) al aplicar la fuerza F .

En el caso de un resorte “estirado” $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\Delta L}{L}$ con lo cual $F = K \cdot \frac{\Delta L}{L}$.

Comparando ambas expresiones, dado que en este caso $x \equiv \Delta L$, se tiene:

$$K = k \cdot L$$

Por consiguiente, la velocidad de propagación de la onda también puede expresarse:

$$v = \sqrt{\frac{k \cdot L}{m}}$$

7.3.1.2.- ONDAS TRANSVERSALES

La figura 133 representa una barra de longitud infinita y sección circular (**A**), sometida a una fuerza perturbadora impulsiva en el plano vertical (**F**) en el extremo **a – a**.

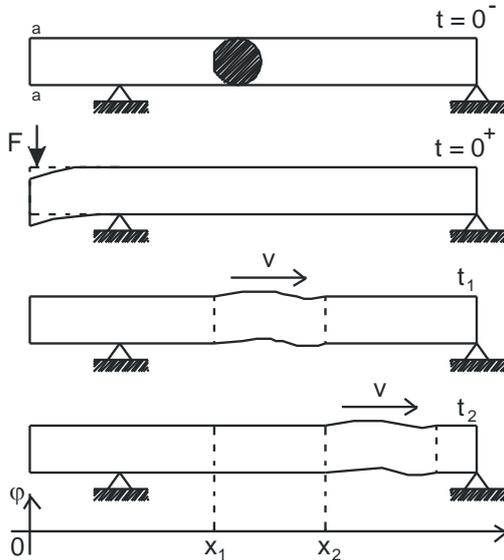


Fig. 133

La deformación producida en esta sección se va trasladando a lo largo de la barra, como se ve en la figura, moviéndose las partículas de la barra deformada hacia arriba y hacia abajo, alrededor de la posición de equilibrio.

Se supone que esta deformación ocurre en el plano vertical, mientras que la onda de deformación progresa a lo largo de la barra.

Como la dirección de los movimientos de las partículas y la de propagación de la onda tienen direcciones perpendiculares, se trata de una onda transversal.

NOTA 58:

Antes de continuar con el estudio de las ondas transversales en barras es conveniente recordar algunos conceptos relativos al comportamiento de los materiales elásticos sometidos a fuerzas de cortadura.

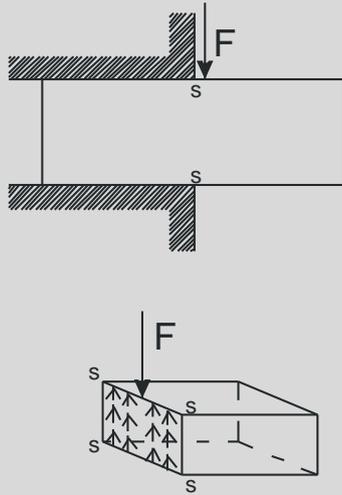


Fig. 134

En la barra sometida a una fuerza de este tipo, representada en la figura 134, al suponer un corte en la misma por la sección $s - s$, la condición de equilibrio de la parte derecha, sometida a la fuerza F , exige la existencia de unas tensiones cortantes τ , que no son más que las acciones de la parte izquierda sobre la parte derecha. Estas tensiones τ son vectores paralelos a la superficie y cuyo módulo vale: $\tau = \frac{F}{A} \text{ (N/m}^2\text{)}$

Por otro lado, bajo la acción de la fuerza F se produce una deformación transversal (paralela a la sección $s - s$).

A la deformación transversal unitaria se le denomina γ .

Experimentalmente se ha comprobado en metales y otros materiales elásticos que existe una proporcionalidad entre las tensiones τ y los alargamientos unitario γ .

La constante de proporcionalidad es el *Módulo de Elasticidad Transversal* G , de manera que:

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

La figura 135 representa un trozo de la barra deformada, y dentro de ella una rebanada de espesor dx y un desplazamiento vertical ξ .

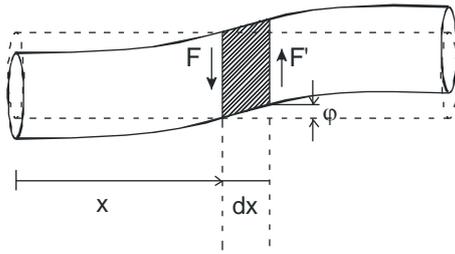


Fig. 135

(Lógicamente, ξ es función de x , pues en caso contrario solo habría un desplazamiento de toda la barra paralelo a sí misma).

La deformación transversal unitaria será en este caso:

$$\gamma = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

La ecuación $\mathbf{G} = \frac{\tau}{\gamma}$ queda en este caso:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1)$$

Por otra parte, del equilibrio de fuerzas (*dinámico*) sobre la masa $dm = \rho \mathbf{A} dx$ (ρ es la densidad) y $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ la aceleración vertical, se tiene:

$$\mathbf{F}' - \mathbf{F} = d\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dx = (\rho \mathbf{A} dx) \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \rho \mathbf{A} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son las ecuaciones del campo elástico en este caso.

Derivando (1) respecto de x y sustituyendo en (2) se tiene la ecuación de onda:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{G}}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Ecuación similar a la ya conocida y que señala que el campo de deformación

se desplaza con la velocidad $\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{G}}{\rho}}$.

- Otro ejemplo de propagación de ondas transversales en materiales elásticos se encuentra en barras sometidas a pares de torsión. En este caso no se producen desplazamientos paralelos ni perpendiculares al eje de la barra, sino solo rotaciones alrededor de este eje, sin cambio de forma.

El resultado de la aplicación de un par (*impulsivo, senoidal o de cualquier otro*

tipo) es la aparición de una onda de torsión, que se propaga a lo largo de toda la barra, y en dirección paralela a su eje. (fig. 136)

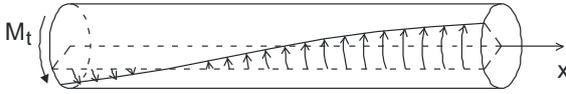


Fig. 136

Dado que en el fenómeno de torsión intervienen también las tensiones cortantes τ y las deformaciones unitarias γ , la ecuación de onda y la velocidad de propagación son las mismas:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

7.3.2.- ONDAS EN CUERDAS TENSADAS

La transmisión de ondas en cuerdas tensadas ya se vio intuitivamente en la introducción.

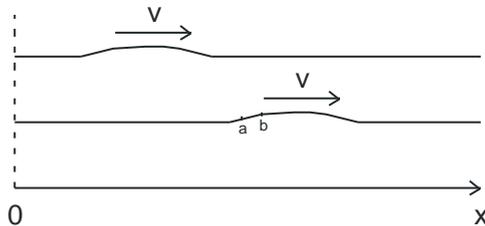


Fig. 137

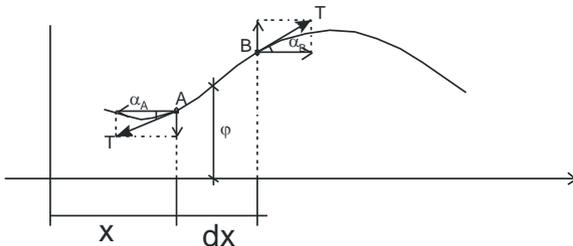


Fig. 138

En la figura 137 se hace un recordatorio del mismo, representando un pulso que se propaga por una cuerda tensa de longitud infinita (para evitar fenómenos de reflexión).

Como la dirección del movimiento de las partículas de la cuerda es vertical, y el desplazamiento de la onda, horizontal, se trata de una onda transversal.

La figura 138 representa la posición y fuerzas actuantes sobre un tramo **A – B** de la cuerda, cuya tensión **T** en todos los tramos de la misma, pero no así sus componentes.

En particular, las componentes verticales: $F_{VA} = T \text{ sen } \alpha_A$ y $F_{VB} = T \text{ sen } \alpha_B$ implican una fuerza vertical no nula sobre el tramo $A - B$, de valor:

$$F_V = T (\text{sen } \alpha_A - \text{sen } \alpha_B)$$

Si la curvatura no es muy grande, los senos se pueden reemplazar por las tangentes:

$$F_V = T (\text{tag } \alpha_A - \text{tag } \alpha_B) = T \cdot d(\text{tag } \alpha) = T \frac{\partial}{\partial x} (\text{tag } \alpha) dx$$

(poniendo derivada parcial pues $\text{tag } \alpha$ depende de x y de t).

Como $\text{tag } \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, queda al sustituir:

$$F_V = T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = T \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

Esta fuerza, por la condición de equilibrio dinámico, ha de ser igual a la masa de la cuerda por su aceleración. Si m_l es la densidad lineal de la cuerda (*masa por unidad de longitud*), se tendrá:

$$(m_l \cdot dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m_l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$

Que es la ecuación de propagación de una onda, cuya velocidad es $v = \sqrt{\frac{T}{m_l}}$.

Como se ve, en este caso se tiene un solo campo, cual es el de los desplazamientos ξ y además, la velocidad de propagación de la onda depende de la tensión de la cuerda (*a más tensión, mayor velocidad*).

NOTA 59:

La fuerza resultante según OX es:

$$F_h = T \cos \alpha_A - T \cos \alpha_B$$

Para ángulos pequeños, $\cos \alpha_A \approx \cos \alpha_B \approx 1$, con lo cual $F_h = 0$.

NOTA 60:

Se ha visto que las ondas en cuerdas son transversales, es decir, ξ y v (o ξ y OX) son perpendiculares. Pero como se ve en la figura 27, pueden haber infinitas direcciones de ξ perpendiculares a OX .

Si se toma un sistema coordenado de referencia tridimensional, en el que el eje OX se haga coincidir con la dirección del vector v (o con el eje de la cuerda), los desplazamientos ξ pueden tener componente según OY y OZ .

Mientras la perturbación se propaga la cuerda puede “retorcerse”.

Si los desplazamientos estuvieran siempre contenidos en el plano XOY (como es el ejemplo que se ha venido analizando anteriormente), se dice que la onda esta “*polarizada linealmente*” (el plano formado por ξ y v se le denomina “*plano de polarización*”).

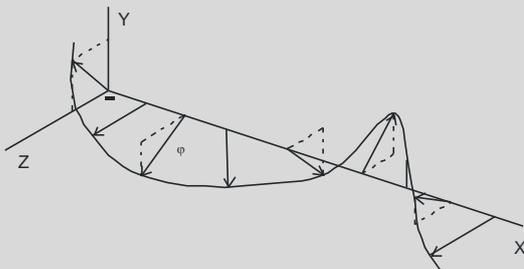
NOTA 61:

Fig. 139

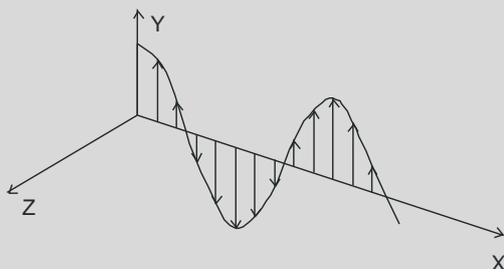


Fig. 140

En la figura 139 se ha hecho una representación tridimensional de una onda polarizada linealmente.

Lógicamente, una onda transversal puede considerarse como la combinación de dos ondas polarizadas linealmente y de direcciones perpendiculares.

Puede darse el caso de una onda en la que ξ tenga un módulo constante, y solo cambie su dirección (de manera que su extremo se encuentre siempre sobre un cilindro), como se ve en la figura 141.

Se trata de una onda “*circularmente*”

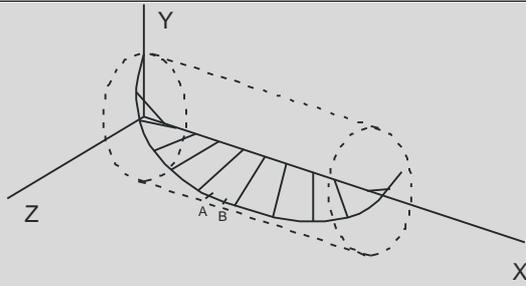


Fig. 141

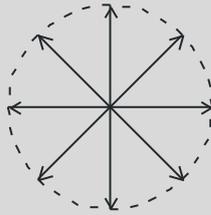


Fig. 142

polarizada". En ella, cada tramo $A - B$ de la cuerda se mueve en un círculo alrededor del eje OX .

En la práctica, cuando una cuerda se excita con un foco emisor que se mueve en el plano XY se produce una onda polarizada linealmente. Igualmente, dos focos emisores moviéndose en direcciones perpendiculares dan lugar a ondas no polarizadas. Si el foco describe una circunferencia, (con amplitud constante) el resultado es una onda polarizada circularmente.

NOTA 62:

Obviamente, solo en las ondas transversales tiene sentido hablar de polarización.

NOTA 63:

La figura 143 representa un “filtro” para una onda polarizada (como es el caso de la cuerda que se viene analizando).

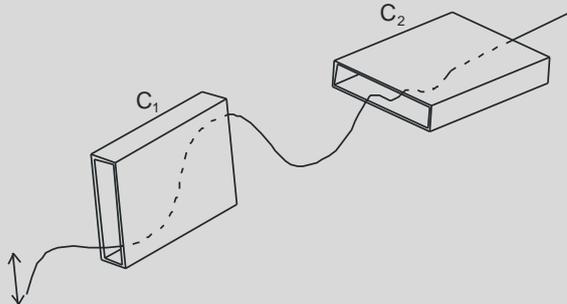


Fig. 143

El “filtro” es una caja abierta por ambos lados.

Cuando está situada en la posición C_1 , la cuerda puede oscilar libremente en su interior, y la caja no interfiere sobre la cuerda.

Si se sitúa formando un ángulo α con el plano de polarización, la caja actuará reduciendo la amplitud de vibración de la cuerda.

Si el ángulo α es de 90° (caja perpendicular al plano de polarización), se impedirá totalmente la propagación de la onda.

Este sistema permite “polarizar” en un plano una onda que tenga componentes en dos planos perpendiculares.

7.3.3.- ONDAS EN GASES ENCERRADOS EN TUBOS

El fenómeno de la propagación de ondas producidas por una perturbación en el seno de un medio compresible (gas, como el aire, por ejemplo) encerrado en un tubo (de longitud infinita para evitar fenómenos de reflexión), puede entenderse de forma intuitiva.

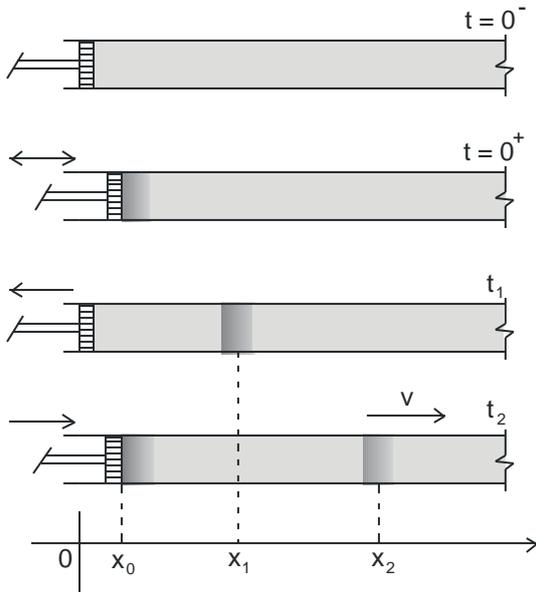


Fig. 144

En efecto, sea el tubo lleno de gas de la figura 144, y supóngase que éste está sometido al empuje de un émbolo (perturbación), en forma impulsiva o con movimiento armónico.

En el primer caso, se trasladará un pulso de presión a lo largo del tubo, y en el segundo caso un tren de ondas (como es el caso de la figura).

Se trata, como puede apreciarse, de una onda longitudinal, y como se verá más adelante, su velocidad de propagación depende solo de la naturaleza del medio, y no de la variación de la acción perturbadora.

NOTA 64:

En condiciones de equilibrio (en el ejemplo de la figura, $t = 0^-$), la presión p_0 y la densidad ρ_0 son las mismas en todo el tubo.

Pero cuando el gas es comprimido por el pistón, no solo aumenta su presión, sino que también se modifica su densidad, circunstancia ésta que hay que tener en cuenta a la hora de analizar la propagación de las ondas en este medio.

En la figura se aprecia que en el instante $t = 0^+$, el émbolo produce la compresión de las capas de aire próximas a él. Estas capas de aire presionan a las vecinas, desplazándose la onda de presión a la derecha, mientras que las capas de la izquierda van siendo descomprimidas. Se producen así, dentro del tubo, unas zonas de mayor presión (que la inicial) y otras de menor presión,

que se van moviendo hacia la derecha con la velocidad \mathbf{v} .

En la figura 145 se ha representado un tramo del tubo relleno de aire, y un volumen diferencial en el mismo $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$.

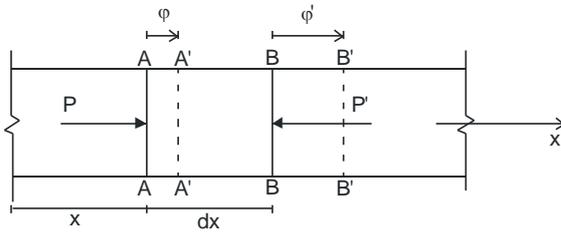


Fig.145

Inicialmente, ρ_0 y ρ_0 son los valores de la presión y la densidad.

Si la presión se modifica, un volumen elemental $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ variará. La cara \mathbf{AA} se desplazará hasta \mathbf{AA}' (distancia ξ), mientras que la cara \mathbf{BB} pasará a \mathbf{BB}' (distancia ξ').

El espesor del volumen elemental, después de la deformación, es:

$$d\mathbf{x} + (\xi' - \xi) = d\mathbf{x} + d\xi$$

Sin embargo, debido al cambio de densidad (pasa de ρ_0 a ρ), la masa del gas encerrado que inicialmente era $\rho_0 \mathbf{A} d\mathbf{x}$ pasa ahora a ser $\rho \mathbf{A}(d\mathbf{x} + d\xi)$.

Como la masa ha de conservarse, tiene que cumplirse:

$$\rho \mathbf{A}(d\mathbf{x} + d\xi) = \rho_0 \mathbf{A} d\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}\right) = \rho_0$$

$$\text{de donde} \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}} \right) = \rho_0 \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}\right)^{-1}$$

(Se ha puesto derivada parcial, pues ξ depende de \mathbf{x} y también de t).

NOTA 65:

Recordatorio:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

En este caso, como $\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}$ es muy pequeño, pueden despreciarse infinitésimos

de segundo orden, quedando:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}\right) \quad (1)$$

Por otro lado, la presión p y la densidad ρ están relacionadas por la ecuación de estado (genéricamente, $p = f(\rho)$).

NOTA 66:

Recordatorio del desarrollo en serie de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_0 + \dots + \frac{1}{n!} (x - x_0)^n \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_0$$

Si $x - x_0 \ll 1$, puede simplificarse:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_0$$

En nuestro caso:

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0$$

Denominando a $\rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 = K_v$ el módulo de elasticidad volumétrico, queda:

$$p = p_0 - K_v \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \quad (2) \quad (N/m^2)$$

(Expresión equivalente a la ley de Hooke para los fluidos)

Sustituyendo (1) en (2), queda:

$$p = p_0 - K_v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3)$$

(Expresión que relaciona la presión en un punto con la deformación en ese mismo punto).

Teniendo ahora en cuenta el movimiento de la masa $\rho_0 A dx$ y su aceleración

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, se tiene:

- Fuerza a la izquierda de la cara $A \rightarrow p \cdot A$
- Fuerza a la derecha de la cara $A' \rightarrow p' \cdot A$
- Fuerza resultante en la dirección $OX \rightarrow -A \cdot dp \quad (dp = p' - p)$

Aplicando $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, queda:

$$-\mathbf{A} d\mathbf{p} = (\rho_0 \mathbf{A} d\mathbf{x}) \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} \right)$$

o también:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}} \quad (4)$$

Derivando la ecuación (3) respecto de \mathbf{x} se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{K}_v \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathbf{x}^2}$$

y sustituyéndola en (4) se obtiene la ecuación de onda (ya conocida) que relaciona el campo de presiones con el de desplazamientos:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{K}_v}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathbf{x}^2}}$$

En este caso, la velocidad de propagación de la onda de presión es:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{K}_v}{\rho_0}}$$

Igualmente, también puede encontrarse una ecuación similar para el campo de presiones:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{K}_v}{\rho_0} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}^2}}$$

También podría calcularse una expresión similar para el campo de densidades:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{K}_v}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mathbf{x}^2}}$$

(Recuérdese que tanto ξ como ρ y \mathbf{p} dependen de \mathbf{x} y de t).

NOTA 67:

Desde el punto de vista de la propagación de ondas en campos, en este caso pueden suponerse tres tipos: dos campos escalares, el de presiones y el de densidades, y uno vectorial, el de deformaciones (alrededor de la posición de equilibrio de cada partícula)

En consecuencia, en el seno del tubo de gas se propagan tres tipos de ondas: una de desplazamientos, otra de presión y otra de densidad (todos ellos alrededor del valor de equilibrio, sin perturbación).

La onda asociada al desplazamiento ξ es longitudinal, mientras que las otras dos, al no ser vectores y no tener direcciones asociadas, no podría asegurarse con total precisión.

(Sin embargo, en este caso particular de fluido confinado en un tubo, sí podría decirse que las ondas de presión y densidad son también longitudinales.

NOTA 68:

El movimiento ondulatorio en gases es un proceso adiabático (no hay intercambio de calor entre elementos de volumen del gas), por lo que puede ponerse:

$$p = C \rho^\gamma \quad (\text{para el aire, } \gamma = 1,4)$$

(C = capacidad calorífica)

Entonces,
$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma C \rho^{\gamma-1} \Rightarrow K_v = \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 = \gamma C \rho_0^\gamma = \gamma \rho_0$$

con lo cual se obtiene la velocidad de propagación (de cualquiera de las tres ondas), por la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

En gases ideales, $p = \rho RT / M$, siendo $R = 8,31 \text{ J/mol}$, M la masa molecular y T la temperatura, queda:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

En el aire, para $T = 273^\circ \text{ K}$ (0° C), $v = 331,5 \text{ m/s}$

7.3.4.- ONDAS SUPERFICIALES EN LÍQUIDOS

Las ondas que se forman en un estanque al arrojar sobre él un objeto, las ondas que el viento forma en el mar (*oleaje*), o las ondas creadas artificialmente para simular el oleaje, son ejemplos típicos de ondas superficiales en líquidos.

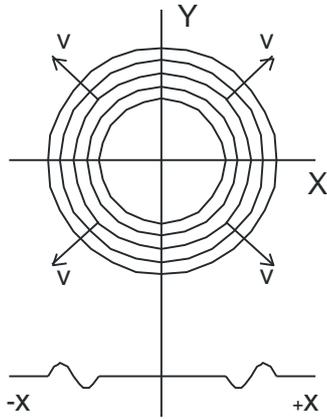


Fig. 146

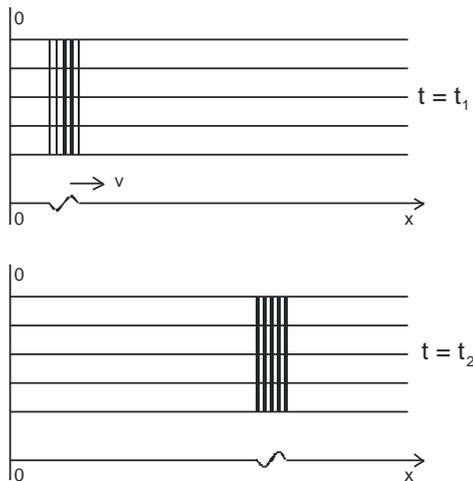


Fig. 147

A pesar de la facilidad con que se forman, la gran visibilidad que presentan y lo familiarizado que todo el mundo está con ellas, su complejidad es muy elevada desde el punto de vista de la comprensión física del problema y de su formulación matemática.

Para empezar, las ondas que se forman en un estanque (*fig.146*) al arrojar una piedra son *bidimensionales* (se propagan en un plano, en todas direcciones, con geometría circular). No son, por tanto, ondas unidireccionales, por lo que no pueden ser estudiadas como tales (su análisis será realizado más adelante).

En este punto se van a estudiar las ondas que presentan un avance lineal, como pueden ser las ondas marinas. (*fig.147*)

En la formación de ondas superficiales en líquidos intervienen dos tipos de acciones: las fuerzas gravitatorias, (el peso del líquido por encima de la posición de equilibrio, que tiende a "*bajarlo*"); y las fuerzas de tensión superficial (que originan fuerzas "*hacia arriba*" en las zonas deprimidas de la onda).

Un descenso brusco a lo largo de una línea **OO** desplaza hacia abajo un conjunto de partículas de líquido. Este descenso induce una subida de una masa de agua semejante, formándose la cresta de la onda inicial.

A partir de aquí, las zonas elevadas presionan hacia abajo a las vecinas, produciendo un valle, mientras que las fuerzas de tensión superficial tienden a tirar hacia arriba, rellenando estos valles.

Estos fenómenos se van sucediendo a partir de la línea **OO** donde actuó el foco emisor, produciendo una onda (en forma de pulso, en el caso de la figura) que se va propagando, de manera lineal, con velocidad **v**.

En la figura 148, puede verse esta onda para diferentes valores de **x** y de **t**.

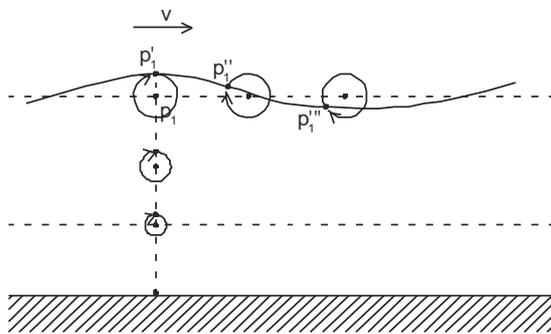


Fig. 148

También se ha representado en la figura el movimiento de las partículas de agua en el interior de un líquido sobre el que se desplaza una onda superficial.

En este caso, las partículas no se desplazan perpendicularmente arriba y abajo, sino que describen pequeños círculos, tanto menores cuanto más lejos se encuentran de la superficie (evidentemente, las partículas en contacto con el fondo no se mueven).

En la figura, la partícula superficial **p₁** (en reposo, antes de llegar la onda), ocupa la posición **p'₁** cuando se encuentra en la cresta. Cierta tiempo después ocupará las posiciones **p''₁**, **p'''₁** y así sucesivamente, describiendo el círculo de mayor radio.

Igualmente, pero con diámetros menores, ocurre con las partículas sumergidas.

Un caso más simple (y más fácil de estudiar) ocurre cuando el líquido está encerrado en un canal, como se ve en la figura 149, de profundidad **h** y ancho **L**, y la onda que recorre la superficie tiene una amplitud pequeña (comparada con la profundidad **h**) y una longitud de onda grande (comparada también con **h**).

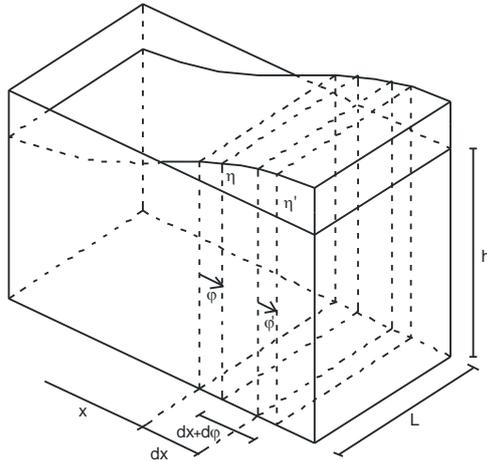


Fig. 149

Un volumen elemental $h \cdot L \cdot dx$ sufre pequeños desplazamientos verticales y horizontales, como se aprecia en la figura.

El ancho de la sección pasa de dx a $dx + d\xi$ y la altura de h a $h + \eta$.

La incompresibilidad del líquido hace que:

$$\begin{aligned} L h dx &= L (h + \eta) (dx + d\xi) \\ &= L (h dx + \eta dx + h d\xi + \eta d\xi) \end{aligned}$$

Si se supone η muy pequeño frente a h , el término $\eta d\xi$ puede despreciarse, con lo cual:

$$\eta dx + h d\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}} \quad (1)$$

(Expresión que liga los desplazamientos verticales η con los horizontales ξ , en la superficie de un líquido por el que se desplaza una onda).

Como la altura del líquido en el lado derecho del volumen elemental (η') es mayor que el izquierdo (η), la presión p' es mayor que la p , con lo que la fuerza neta hacia la derecha vale:

$$p A - p' A = -(\bar{p}' - \bar{p}) A = -A d\bar{p}$$

(la barra encima indica valores medios en toda el área)

La ecuación de equilibrio dinámico puede escribirse en este caso:

$$-A d\bar{p} = (\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \boxed{\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}} \quad (2) \quad (\text{siendo } \rho \text{ la}$$

densidad)

Como $p = \rho g \eta$ (siendo η la altura), queda al sustituir:

$$d\bar{p} = \rho g (\eta' - \eta) = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} dx$$

que puede transformarse en:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} = \rho \mathbf{g} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}}$$

Sustituyendo en (2), queda:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathbf{t}^2} = -\mathbf{g} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} \quad (3)$$

Derivando respecto de x la ecuación (1) y queda:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathbf{x}^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (3), queda:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathbf{t}^2} = \mathbf{g} \mathbf{h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathbf{x}^2}} \quad (4)$$

Que es la ecuación de una onda (en el campo de los desplazamientos horizontales ξ), que se desplaza con la velocidad:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{g} \mathbf{h}}$$

Igualmente podría haberse obtenido la ecuación de onda para el campo de desplazamientos verticales η , quedando:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{t}^2} = \mathbf{g} \mathbf{h} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{x}^2}}$$

En el caso de que la onda superficial no esté confinada en un canal (con las condiciones restrictivas señaladas: gran longitud de onda comparada con \mathbf{h}), el comportamiento es bastante más complejo, y la ecuación de onda resultante, algo más compleja.

Tal ecuación, sin embargo, se satisface para ondas armónicas de longitud de onda λ y velocidad \mathbf{v} , dada esta por la expresión:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{g}\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}\right) \operatorname{tagh} \frac{2\pi h}{\lambda}} \quad (5) \quad (\operatorname{tagh} = \text{tangente hiperbólica})$$

(en donde \mathbf{g} es la aceleración de la gravedad, λ la longitud de onda, τ la tensión superficial y ρ la densidad).

Cuando la profundidad h es muy grande comparada con la longitud de onda, $2\pi h/\lambda$ es mucho mayor de 1, el valor de la tangente hiperbólica se aproxima a 1, y queda la expresión más sencilla:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{g}\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}} \quad (6)$$

Cuando la profundidad h es muy pequeña comparada con la longitud de onda, $2\pi h/\lambda$ se aproximará a cero, y la tagh se aproxima al ángulo $\left(\operatorname{tagh} \frac{2\pi h}{\lambda} \cong \frac{2\pi h}{\lambda}\right)$, con lo que queda:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{g}\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}\right) \cdot \frac{2\pi h}{\lambda}} \quad (7)$$

Si λ es grande, y como τ es pequeño, puede despreciarse el término $2\pi h/\lambda$, con lo cual queda:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{g}\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi h}{\lambda}} = \sqrt{\mathbf{g}h} \quad (8)$$

(Expresión similar a la calculada para los canales).

Como puede verse, la velocidad de propagación (excepto en el último supuesto), depende de la longitud de onda λ , cosa que no ocurría en otros medios. Como $\mathbf{v} = \nu \cdot \lambda$, siendo ν la frecuencia, se deduce que en este tipo de medios la velocidad de propagación depende de la frecuencia.

Ello implica que si el movimiento ondulatorio es el resultado de la superposición de varios armónicos (movimiento periódico), de distintas frecuencias, la velocidad de propagación será distinta para cada uno de ellos, lo cual originará la distorsión de la onda original.

Al fenómeno se le llama “**dispersión**” y se dice que el medio es “**dispersivo**”.

NOTA 69:

Si en la expresión (6) de la velocidad de onda, se supone que λ es grande, el término $2\pi \tau/\rho\lambda$ puede despreciarse, con lo cual quedaría:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

En este caso, la velocidad de propagación depende de λ , pero no de la naturaleza del líquido (no depende de τ ni de ρ).

Además, a mayor longitud de onda, mayor velocidad de propagación. Se denominan “**ondas gravitacionales**”

(Por esta razón, un viento fuerte y constante soplando sobre la superficie del mar produce ondas de gran longitud).

Si λ es pequeña, puede despreciarse el término $g\lambda/2\pi$, con lo que queda:

$$v = \sqrt{\frac{2\pi \tau}{\rho\lambda}}$$

En este caso, a mayor longitud de onda, menor velocidad.

Se denominan “**ondas de rizado o capilares**”.

(Son las ondas producidas por brisas o ráfagas de viento soplando sobre la superficie del mar).

8.- ONDAS EN DOS Y TRES DIMENSIONES.-

8.1.- ESTUDIO GENERAL

Según se ha visto, la función $\xi = f(\mathbf{x} - \mathbf{vt})$ representa un movimiento ondulatorio que se propaga en el sentido positivo del eje \mathbf{OX} .

Sin embargo, si la perturbación física introducida en el campo (escalar o vectorial) dada por la magnitud ξ se extiende a todo el espacio, se comprende fácilmente que la anterior ecuación toma el mismo valor para todos los puntos de un espacio tridimensional cuya abcisa sea \mathbf{x} .

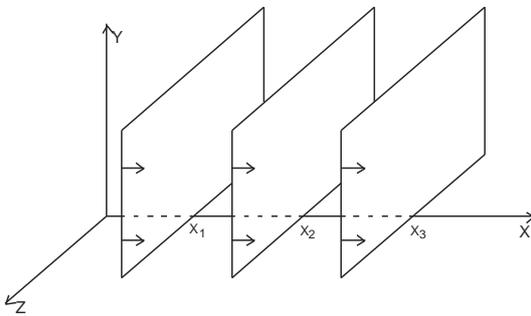


Fig. 150

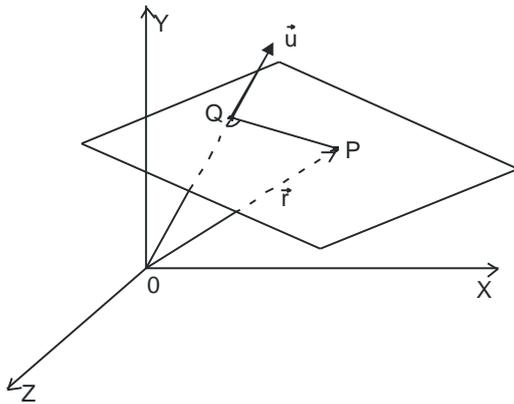


Fig. 151

En otras palabras, la función $\xi = f(\mathbf{x} - \mathbf{vt})$ describe una onda plana que se propaga paralelamente al eje \mathbf{x} (frente de onda). (fig. 150)

Como lo característico de este tipo de ondas es la dirección (y el módulo) de la velocidad de propagación, puede definirse un versor \vec{u} , paralelo a \vec{v} (y perpendicular al plano de propagación) que permita escribir la ecuación de la onda plana con independencia de la orientación de los ejes coordenados.

En la figura 151, si \vec{u} es el versor que representa la dirección de la propagación de la onda plana, y \vec{r} es el vector de posición de cualquier punto del plano, el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{r}$ será la distancia del punto 0 , origen de la onda, al plano de onda (lo que se denominaba en la figura anterior $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$).

Por lo tanto, la ecuación $\xi = f(\mathbf{x} - \mathbf{vt})$, escrita con referencia a un eje dado \mathbf{OX} , puede escribirse $\xi = f(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \mathbf{vt})$ escrita con referencia a una dirección cualquiera dada por el versor $\vec{\mathbf{u}}$. La ecuación anterior representa, pues, una onda plana que se propaga en la dirección $\vec{\mathbf{u}}$.

En el caso de que la onda fuese de tipo armónico,

$$\xi = \xi_0 \text{ sen } k (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \mathbf{vt}) \quad \text{siendo } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Definiendo el vector $\vec{\mathbf{k}} = k \vec{\mathbf{u}}$ como vector de propagación, y teniendo en cuenta que $\mathbf{w} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, queda:

$$\xi = \xi_0 \text{ sen } (\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \mathbf{wt})$$

NOTA 70:

Las ondas planas, aún cuando contienen las tres coordenadas x, y, z , son en realidad unidireccionales, ya que la propagación es según una dirección única y la situación física es la misma en todos los puntos del plano.

- Cuando la onda se propaga en una superficie, y en todas sus direcciones, como es el caso de superficie de líquidos, placas, etc..., (fig.152) se trata de una onda bidimensional. En este caso la ecuación de la onda será del tipo:

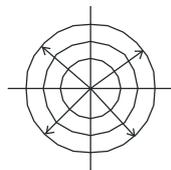


Fig. 152

$$\frac{\partial^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial y^2} \right)$$

- En el caso más general, la ecuación de onda en un espacio tridimensional viene dada por la expresión:

$$\frac{\partial^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2} \right)$$

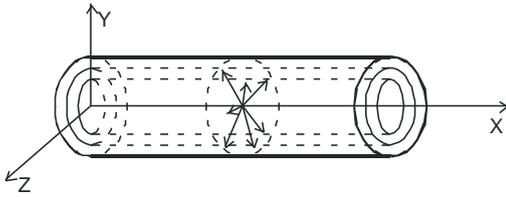


Fig. 153

Este será el caso de “*ondas cilíndricas*” (fig.153) (en las que el frente de onda es una superficie cilíndrica paralela a un eje, por ejemplo X , y las ondas se propagan en todas las direcciones perpendiculares a este eje); o de las “*ondas esféricas*” (fig.154), donde el frente de onda es una esfera con centro en el foco emisor.

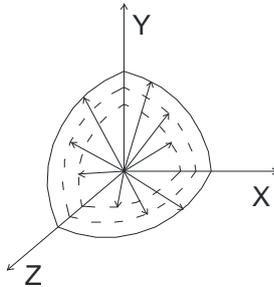


Fig. 154

NOTA 71:

Cuando una onda originada en un punto se propaga en todas las direcciones con la misma velocidad se dice que el medio es “*isótropo*” y la onda resultante es “*esférica*”.

En caso contrario, se dice que el medio es “*anisótropo*” (como es el caso de un gas con gradientes de temperatura, o un sólido sometido a deformaciones antes de provocarle la perturbación, o un cristal, que tiene diferentes propiedades elásticas, según sea la dirección, etc...)

NOTA 72:

También puede ocurrir en ondas esféricas que la amplitud de la misma no sea igual en todas las direcciones, por efectos debidos a la fuente de perturbación.

(Por ejemplo, se percibe un sonido más intenso colocándose frente a un altavoz que lateralmente a él.)

8.2.- ONDAS EN PLACAS ELÁSTICAS

La figura 155 representa una porción de membrana delgada y tensa, con forma rectangular, siendo “ q ” la carga por unidad de longitud que existe sobre los bordes de la membrana (y en cualquier otra área que se considere en su interior).

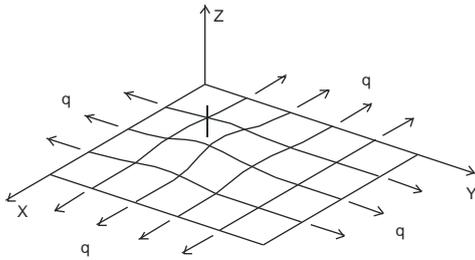


Fig. 155

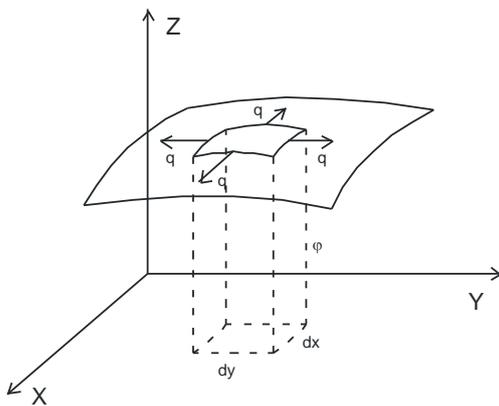


Fig. 156

Si se introduce una perturbación que provoque una deformación de la membrana perpendicular a su superficie, se producirá sobre la misma una onda que se propaga a lo largo de ella, es decir, una *onda superficial*.

Suponiendo una superficie elemental $dx dy$ que se desplaza hacia arriba la cantidad ξ (la cual será función de x y de y). (fig.156)

Sobre los bordes de esta área actúan las fuerzas elementales $q dx$ y $q dy$, en módulos, $q dx$ y $-q dy$, pero diferentes direcciones (no son vectores alineados).

El resultado una fuerza neta vertical diferente de cero.

En un plano YOZ que pase por el centro de la sección elemental se tiene: (fig.157)

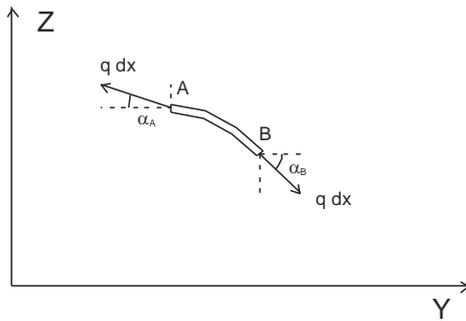


Fig. 157

$$F_{V(Y)} = q dx (\text{sen } \alpha_A - \text{sen } \alpha_B)$$

Para ángulos muy pequeños puede ponerse

$$\begin{aligned} F_{V(Y)} &= q dx (\text{tag } \alpha_A - \text{tag } \alpha_B) \\ &= q dx \cdot d(\text{tag } \alpha) \\ &= q dx \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\text{tag } \alpha) dy \end{aligned}$$

Como $\text{tag } \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial y}$, queda:

$$F_{V(Y)} = q dx \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dy = q \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dx dy$$

Análogamente, para un plano XOZ que pase por el centro de la sección elemental puede escribirse:

$$F_{V(X)} = q \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx dy$$

Por tanto, la fuerza neta vertical, será:

$$F_V = F_{V(X)} + F_{V(Y)} = q \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) dx dy$$

Si la masa por unidad de área de la membrana es m_a , la ecuación de equilibrio dinámico ($F = m \cdot a$) conduce a:

$$q \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) dx dy = (m_a dx dy) \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Simplificando queda la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{q}{m_a} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

viene dada la velocidad de propagación de la onda por la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{q}{m_a}}$$

8.3.- ONDAS ESFÉRICAS EN FLUIDOS

- Como un ejemplo intuitivo de este tipo de ondas, supóngase una onda de presión en el seno de un fluido homogéneo o isótropo.

Por comparación con una onda plana, podría suponerse $p - p_0 = f(r - vt)$, siendo p_0 la presión normal (no perturbada) y r el equivalente a x en la onda plana.

Pero esto no es así, puesto que cuando una onda esférica se propaga, el frente de onda se amplía continuamente (la superficie de las esferas es cada vez mayor), lo cual exige que la amplitud de la onda de presión vaya disminuyendo con la distancia (a razón de $1/r$), de manera que en este caso:

$$p - p_0 = \frac{1}{r} f(r - vt)$$

La velocidad de propagación viene dada por la misma expresión que para las ondas planas:

$$v = \sqrt{\frac{K_v}{\rho_0}}$$

Si la onda de presión es de tipo armónico, y p_0 es el valor de la amplitud en el foco emisor, se tiene para el valor de la presión en cualquier punto:

$$p = p_0 + \frac{p_0}{r} \text{sen}(kr - wt)$$

9.- TRANSMISIÓN DE ENERGÍA EN LAS ONDAS

- Hasta ahora se ha visto como en la propagación de una onda, producida por una perturbación exterior, a través de un campo (escalar o vectorial) definido por una propiedad física (desplazamiento, tensión, presión, etc...), no existe transporte de materia, dado que las partículas (átomos, moléculas, masas) solo se desplazan alrededor de su posición de equilibrio. Lo que sí se “transporta” es cantidad de movimiento, o también, energía.

La onda, por tanto, transporta energía de un punto a otro del campo.

- En el caso de una onda longitudinal en una barra elástica, si \mathbf{F} es la fuerza que actúa sobre un área cualquiera \mathbf{A} , la cual se desplaza la cantidad $d\xi$, en un tiempo dt , cuando a ella llegue la perturbación, la potencia desarrollada valdrá:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (1) \quad (\text{siendo } W \text{ la energía})$$

Si al lado izquierdo de la barra se le suministra una energía en forma de golpe fuerte en un tiempo muy corto (impulso), el resultado será una onda en forma de pulso que recorre la barra de izquierda a derecha. Si no hubiera amortiguamiento, el extremo derecho de la barra podría ejecutar un trabajo sobre el exterior, idéntico al introducido en el sistema por el impulso inicial.

Obviamente, si se suministra energía de manera continua en el lado izquierdo (por ejemplo, por aplicación de una fuerza de tipo armónico), el resultado es la formación de una onda continua también de tipo armónico, que se propaga a lo largo de toda la barra. La energía introducida en la cara izquierda de la barra puede ser cedida al exterior por la cara derecha.

Si la onda de desplazamiento (alrededor de la posición de equilibrio) es de tipo armónico, es decir:

$$\xi = \xi_0 \text{ sen}(kx - wt)$$

Derivando respecto de t :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -w \xi_0 \text{ cos}(kx - wt)$$

Como $F = E \cdot A \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$, queda: $F = E \cdot A \cdot k \xi_0 \cos(kx - \omega t)$

Como $w = kv$ y $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, queda al sustituir en (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= E A w k \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \\ &= (\rho v^2) \cdot A \cdot \left(\frac{w^2}{v}\right) \cdot \xi_0^2 \cdot \cos^2(kx - \omega t) \\ &= v A \rho w^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

La presencia del factor $\cos^2(kx - \omega t)$ asegura un valor de W siempre positivo, pero variable. Es decir, $\frac{\partial W}{\partial t}$ es una "onda de energía".

La potencia media será:

$$\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial t}\right) = v A \rho w^2 \xi_0^2 \overline{\cos^2(kx - \omega t)}$$

Como el valor medio de $\cos^2 x$ es $\frac{1}{2}$, queda:

$$\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial t}\right) = v A \left(\frac{1}{2} \rho w^2 \xi_0^2\right)$$

Llamando $D_E = \frac{1}{2} \rho w^2 \xi_0^2$ la energía por unidad de volumen, o densidad de energía (por similitud con la energía de un oscilador armónico), queda:

$$\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial t}\right) = v A D_E \quad (1)$$

Como v es la velocidad de propagación, $v \cdot D_E$ es el flujo de energía por unidad de área y unidad de tiempo.

La ecuación (1) representa la energía media que la onda traslada a lo largo de la barra.

Se define la intensidad de la onda como el flujo de energía por unidad de área y de tiempo.

$$I = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial t}\right) = v \cdot D_E \quad (2)$$

- En el caso de ondas de presión en el seno del gas encerrado en un

tubo, se tenía:

$$\xi = \xi_0 \text{ sen}(kx - wt)$$

Como $p = p_0 - K_v \frac{\partial \xi}{\partial x}$, queda al sustituir:

$$p - p_0 = -K_v \cdot k \cdot \xi_0 \cdot \cos(kx - wt)$$

Llamando $P_0 = K_v \cdot k \cdot \xi_0$ y teniendo en cuenta que $v = \sqrt{\frac{K_v}{\rho_0}}$,

queda:

$$P_0 = v^2 \rho \cdot k \cdot \xi_0$$

Como también $k = w \cdot v = 2\pi v$, queda $P_0 = v \rho_0 w \xi_0 = 2\pi v \rho_0 v \xi_0$

En este caso, la densidad de energía de la onda vale:

$$D_E = \frac{1}{2} \rho_0 w^2 \xi_0^2 = 2\pi^2 \rho_0 v^2 \xi_0^2 = \frac{P_0^2}{2 v^2 \rho_0}$$

Siendo la intensidad de la onda: $I = \frac{P_0^2}{2 v \rho_0}$

- En el caso de ondas de presión esféricas, en las que $\xi = \frac{1}{r} \xi_0 \cos(kx - wt)$ y $\xi_0 = \frac{P_0}{v \rho_0 w}$, la amplitud de la onda es ahora $\frac{\xi_0}{r}$.

La energía por unidad de volumen será:

$$D_E = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 w^2 \xi_0^2}{r^2} = \frac{P_0}{2 v^2 \rho_0 r^2} \quad (\text{disminuye en } \frac{1}{r^2})$$

El flujo de energía a través de una esfera de área $A = 4\pi r^2$ por unidad de tiempo, es:

$$\left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \right) = v (4\pi r^2) \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_0 w^2 \xi_0^2}{r^2} \right) = 2\pi v \rho_0 w^2 \xi_0^2 = \frac{2\pi P_0^2}{\rho_0 v}$$

(Como se ve, el flujo de energía es independiente del radio. En efecto, el principio de conservación de la energía exige que, en promedio, la cantidad de energía que fluya en la unidad de tiempo, a través de cualquier esfera concéntrica, sea la misma.)

La intensidad de energía de la onda esférica será:

$$I = \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}_E = \frac{P_0}{2 \mathbf{v} \rho_0 r^2} = \frac{I_0}{r^2}$$

siendo $I_0 = \frac{P_0}{2 \rho_0 \mathbf{v}}$ la intensidad en las proximidades de la fuente perturbadora.

10.- MODIFICACIONES EN LA PROPAGACIÓN DE ONDAS.-**10.1.- INTRODUCCIÓN. TEOREMAS DE HUYGENS Y MALUS.-**

- Hasta ahora se ha visto la formación y propagación de ondas en medios homogéneos, isotrópicos, indefinidos y libres de obstáculos. En todos los casos estudiados se ha visto, además, que la velocidad de propagación depende de algunas propiedades físicas del medio por el que se propaga la onda (densidad, módulo de elasticidad, etc...).

Precisamente, esta última circunstancia, así como el hecho de que una onda puede propagarse desde un medio hasta otro diferente (por ejemplo, pasar de propagarse en el aire a propagarse en el agua, o pasar de propagarse en un metal con un módulo de elasticidad E_1 , a otro con un módulo de elasticidad diferente E_2 , etc.), o encontrar obstáculos físicos en su camino (una pared con ranura en una onda de presión, por ejemplo), o incluso encontrarse en presencia de otras ondas en el mismo medio, espacio y tiempo, introducen nuevos aspectos en el movimiento de las ondas que es preciso analizar con todo detalle.

En este contexto, tres son los fenómenos principales que van a ser analizados: el debido a la propagación de una onda en medios distintos, que da lugar a los fenómenos de *reflexión* y *refracción*; el debido a la coexistencia con otras ondas, que da lugar a los fenómenos de *interferencia*; y los debidos a la presencia de obstáculos, que da lugar al fenómeno de *difracción*.

- Como se ha visto, el movimiento ondulatorio más general puede representarse por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right)$$

donde ξ puede ser el desplazamiento (de átomos, moléculas o partículas alrededor de la posición de equilibrio), o variaciones de la tensión (tracción – compresión) en el seno de un metal, o variaciones de la presión de un gas (alrededor de la presión anterior a la perturbación), o del valor del campo electromagnético, etc...

Si se conoce la fuente que produce la onda se podría, en principio, seguir su propagación por diferentes medios, o su modificación ante un obstáculo, tomando en consideración todos estos factores.

Para ello sería preciso resolver la ecuación diferencial anterior en cada caso, es decir, obtener soluciones del tipo:

$$\xi(\vec{r}, t)$$

teniendo en cuenta todas y cada una de las “condiciones de contorno” (naturaleza y posición de las fuentes, superficies de las discontinuidades entre medios diferentes, naturaleza y posición de los obstáculos, etc...).

La solución de las ecuaciones diferenciales puede obtenerse, en ciertas condiciones, si se conocen los valores de la función $\xi(\vec{r}, t)$ sobre una superficie cerrada S .

Suponiendo las fuentes q_1, q_2, q_3, \dots la onda en un punto tal como el P será el resultado de la acción conjunta de todas ellas. (fig. 158)

Si en lugar de las fuentes se conocieran los valores de $\xi(\vec{r}, t)$ en todos los puntos de una superficie S , arbitraria y cerrada, también podría calcularse el valor de ξ en P , aún sin conocer nada de las fuentes.

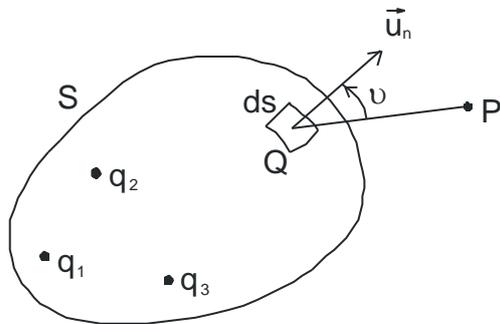


Fig. 158

Matemáticamente se pueden representar estos conceptos del modo siguiente:

Si $\xi(\vec{r}, t)$ representa la función de onda en el punto Q de la superficie arbitraria S en el instante t , y r representa la distancia del elemento de superficie ds alrededor de Q y el punto P , la perturbación en P puede escribirse:

$$\xi_P(t) = \oint_S g(\theta) \cdot \frac{1}{r} \cdot f(r - vt) ds$$

En efecto, $\frac{1}{r} \cdot f(r - vt)$ representa una onda esférica emitida por la superficie elemental ds en el instante $(t - r/v)$ y que llega a P en el instante t . (r/v es, por consiguiente, el tiempo de propagación de la onda desde ds a P).

El factor $\mathbf{g}(\theta)$ es un factor direccional, que permite asignar diferentes amplitudes de onda a distintas direcciones de propagación.

(Cuando $d\mathbf{s}$ es perpendicular a la dirección de propagación \vec{u}_n ,

$\mathbf{g}(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$, de modo que la amplitud máxima ($\mathbf{g} = 1$) corresponde a

$\theta = 0$ (propagación hacia delante) y la amplitud mínima ($\mathbf{g} = 0$) a $\theta = \pi$ (propagación hacia atrás).

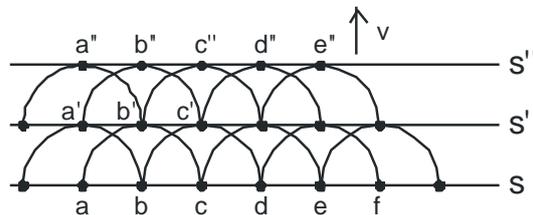
En definitiva, puede obtenerse el valor de la onda en el punto P y en el instante t , como resultado de sumar las perturbaciones producidas por infinitas "fuentes secundarias" $d\mathbf{s}$, situadas sobre una superficie cerrada y arbitraria S .

- Principio de Huygens:

El desarrollo matemático anterior lo tradujo Huygens en un enunciado muy simple, que permite visualizar el paso de una onda de un medio a otro, o su comportamiento ante un obstáculo.

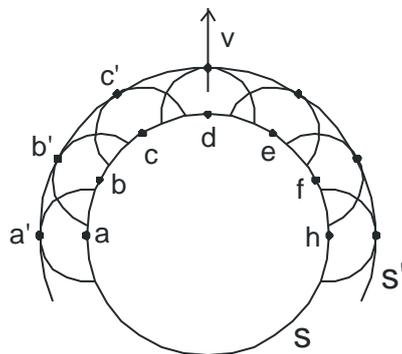
"En la propagación de una onda, cualquier punto alcanzado por ésta se convierte en foco emisor de nuevas ondas".

(Físicamente, este principio es solo aplicable a ondas mecánicas).



onda plana Fig. 159

Según se vio, una onda plana se expresa por una función $f(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$, siendo \vec{u} el versor de propagación de la onda.



onda esférica Fig. 160

La superficie de onda, o frente de onda, la forman todos los puntos en los que $(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$ tienen el mismo valor en un instante t , esto es:

$$\vec{u} \cdot \vec{r} - vt = cte. \quad (\text{para } t = t)$$

lo que quiere decir que para un valor de t , el frente de onda es un plano perpendicular al versor \vec{u} . (fig. 159)

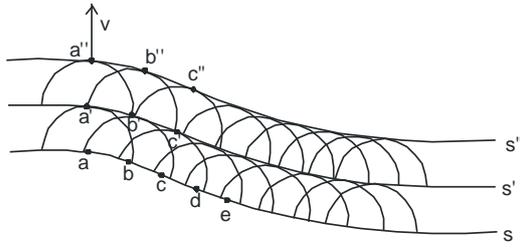


Fig. 161

(Análogamente, para ondas esféricas los frentes de onda vienen dados por

$$r - vt = \text{cte.}$$

que para un t dado, corresponde a una esfera). (fig. 160)

Teniendo todo esto en cuenta, es fácil visualizar el avance de un frente de ondas por aplicación del principio de *Huygens*.

En efecto, si S es un frente de ondas en un instante t_1 (fig. 161), y se considera que cada punto de esta superficie a, b, c, d, \dots (alcanzado por la onda) se convierte en centro emisor de nuevas ondas secundarias, trazando semicircunferencias (esferas, en el espacio) de igual radio con centro en cada punto alcanzado, la envolvente de todos estos círculos es el nuevo frente de onda, (correspondiente a un instante $t' = t_1 + \Delta t$).

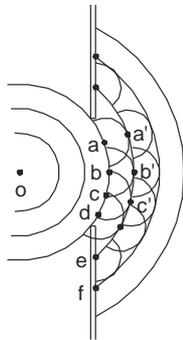


Fig. 162

En el caso de la onda de la figura 162, que se encuentra un obstáculo (en forma de orificio) en su camino, la construcción de *Huygens* permite visualizar la propagación de la onda detrás del obstáculo (y en este caso, el fenómeno de *difracción* que se verá más adelante).

En efecto, los puntos de la abertura a, b, c , generan un nuevo frente de onda. Cuando este alcance el punto e (del campo, no de la placa) se generará una onda secundaria, que junto con los a', b', c' , dará lugar a un nuevo frente de onda, y así sucesivamente.

NOTA 73:

Si el campo representado fuera el de oscilaciones de la presión del aire producida por una fuente perturbadora en O (campo sonoro), es evidente que el sonido también se escucha en puntos detrás de la placa, como en e y en f .

Se comprende fácilmente esta situación si se observa que las variaciones de presión del aire situado en el borde d del orificio necesariamente han de propagarse en todas las direcciones, y en particular, en la dirección $d \rightarrow e \rightarrow f$.

- Teorema de Malus:

Onda arbitraria:

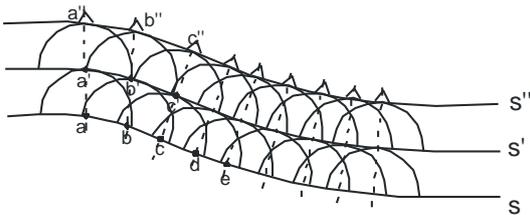


Fig. 163

Malus desarrolló otra herramienta para visualizar la propagación de una onda por un medio. Para ello denominó “rayo” a las líneas perpendiculares a los frentes de onda en cada punto, (en las figuras 163, 164 y 165, las líneas de trazos), y pueden considerarse las direcciones de propagación de la onda.

Onda plana:

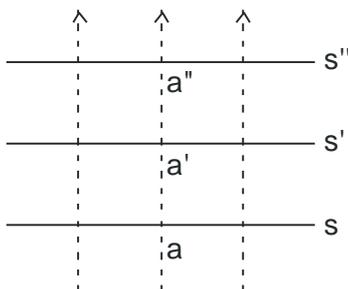


Fig. 164

Los puntos de diferentes superficies de onda unidos por un mismo rayo se llaman “puntos correspondientes”, (en las figuras, a, a' y a'' ; b, b' y b'' ; etc.)

Por la construcción efectuada es evidente que el tiempo requerido para que la onda viaje de S a S'' debe ser el mismo cualquiera que sea el rayo elegido para medirlo, o lo que es igual, “el tiempo que separa puntos correspondientes de dos superficies de

Onda esférica:

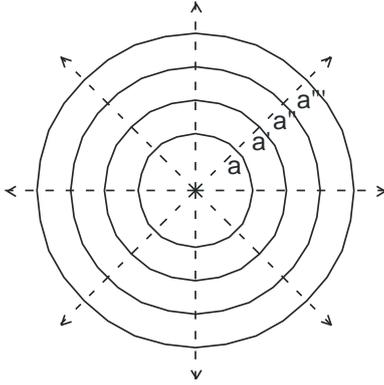


Fig. 165

onda es el mismo para todos los puntos correspondientes”.

Según lo anterior, las distancias aa'' , bb'' , etc... dependerán de la velocidad de propagación de la onda en cada punto.

Si el medio es isótropo y homogéneo, la velocidad es la misma en todos los puntos, en todas las direcciones, y en consecuencia, las superficies de onda serán paralelas y los rayos rectilíneos.

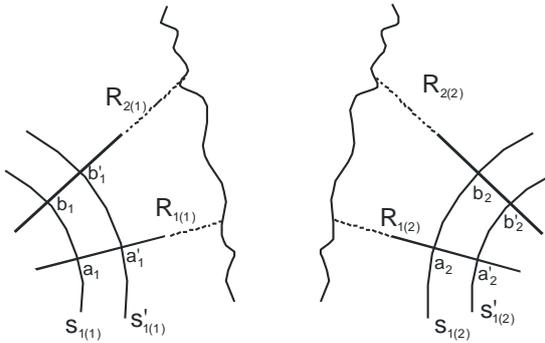


Fig. 166

En la figura 166 se ha representado una onda S que se propaga en un medio (1) (con dos superficies de onda $S_{1(1)}$ y $S'_{1(1)}$ y dos rayos $R_{1(1)}$ y $R_{2(1)}$) y luego la situación de las mismas ondas cuando se propagan en un medio adyacente (2) (con dos superficies de onda $S_{1(2)}$ y $S'_{1(2)}$ y dos rayos $R_{1(2)}$ y $R_{2(2)}$).

Los puntos correspondientes son a_1, a'_1 y b_1, b'_1 en el medio (1) y a_2, a'_2 y b_2, b'_2 en el medio (2).

En cada medio, los rayos siempre son líneas rectas, perpendiculares a las superficies de onda, como se ve en la figura.

Malus reflejó esta situación diciendo:

“La relación de ortogonalidad entre rayos y superficies de onda se conserva a través de todo el proceso de la propagación de la onda”.

Esto implica, además, que el tiempo transcurrido para que la onda se propague de a_1 a a_2 (que son puntos correspondientes) es el mismo que el requerido para ir de b_1 a b_2 (que también son puntos correspondientes).

10.2.- REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS.-

10.2.1.- REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS EN DOS DIRECCIONES.

ONDAS PLANAS.-

- La experiencia enseña que cuando una onda incide sobre la superficie de separación de dos medios, (con diferentes velocidades de propagación en cada uno de ellos), se generan dos ondas. Una de ellas retrocede hacia el medio de donde proviene, denominada “onda reflejada”, y la otra penetra en el segundo medio, y se denomina “onda refractada”. (fig. 167)

El modelo geométrico de *Huygens* permite interpretar fácilmente ambos fenómenos, en el caso de ondas planas.

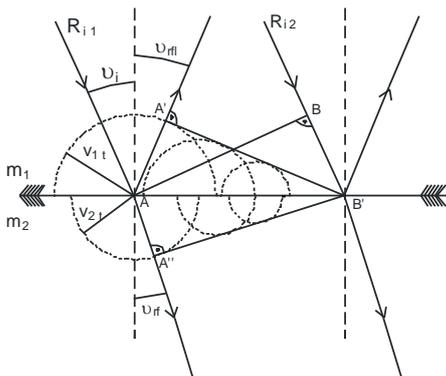


Fig. 167

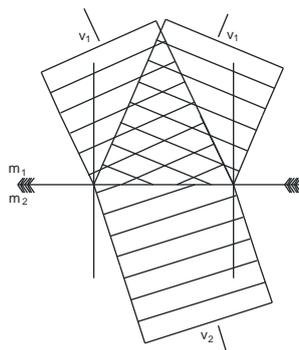


Fig. 168

En efecto, en la figura se ha representado una onda incidente plana, dada por dos rayos R_{i1} y R_{i2} , y una superficie de onda dada por la línea AB . Cuando la superficie de onda alcanza la superficie de separación en el punto A , esta se convierte en foco emisor de ondas secundarias, una hacia el interior del medio **(1)**, con velocidad v_1 (igual que la que traía), y otra hacia el interior del miembro **(2)**, con velocidad v_2 . Los sucesivos puntos de la superficie de onda incidente van alcanzando la superficie de separación y se van convirtiendo en emisores secundarios.

Transcurridos t segundos, la envolvente de las ondas secundarias en el medio **(1)** es un “frente de ondas reflejado”, representado por la línea $A'B'$, mientras

que la correspondiente al frente de onda refractado queda representado por la línea $A''B'$.

Los triángulos $AA'B'$ y ABB' son iguales. (La hipotenusa AB' es común, y los catetos AA' y BB' son iguales a $v_1 \cdot t$, que no es más que la distancia que en t segundos recorre la onda incidente en el medio (1)).

Por tanto, se tendrá la siguiente relación entre ángulos:

$$\angle A'AB' = \frac{\pi}{2} - \theta_{rfl} = \angle AB'B = \frac{\pi}{2} - \theta_i$$

Es decir,

$$\theta_{rfl} = \theta_i$$

(El ángulo del rayo reflejado con la normal a la superficie de separación es igual al de incidencia con la misma normal)

Por otra parte, en los triángulos rectángulos $AA'B'$ y $AA''B'$ se cumple que:

$$\operatorname{sen} \angle BAB' = \frac{BB'}{AB'} \quad \operatorname{sen} \angle AB'A'' = \frac{AA''}{AB'}$$

Dividiendo ambas expresiones, queda:

$$\frac{\operatorname{sen} \angle BAB'}{\operatorname{sen} \angle AB'A''} = \frac{BB'}{AA''}$$

Como $\angle BAB' = \theta_i$; $\angle AB'A'' = \theta_{rfr}$; $BB' = v_1 \cdot t$; $AA'' = v_2 \cdot t$, queda finalmente:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_{rfr}} = \frac{v_1}{v_2} \quad (\text{Ley de Snell de la refracción})$$

Al cociente $\frac{v_1}{v_2}$, que es constante para cualquier superficie de separación entre estos dos medios m_1 y m_2 , se denomina “índice de refracción relativo”, y se representa por n_{21} .

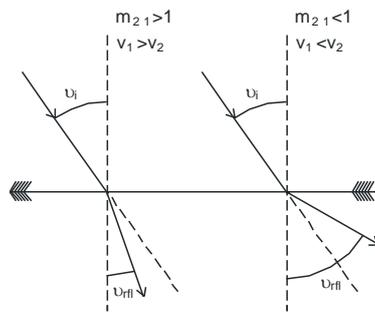


Fig. 169

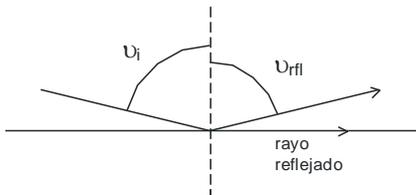


Fig. 170

En la figura 169 pueden verse los rayos refractados para $n_{21} < 1$ y $n_{21} > 1$.

Cuando $\text{sen } \theta_i = n_{21}$, resulta $\theta_{rfr} = 1$

(o $\theta_{rfr} = \frac{\pi}{2}$). Esto indica que el rayo

refractado es paralelo a la superficie. A este ángulo θ_i se le llama “ángulo crítico” y se designa por λ . (fig. 170)

En este caso se produce una “reflexión total”

10.2.2.- REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS EN TRES DIRECCIONES.**ONDAS ESFÉRICAS.**

En la figura 171 se ha representado una onda esférica, generada en la fuente O , por medio de sucesivas superficies de onda.

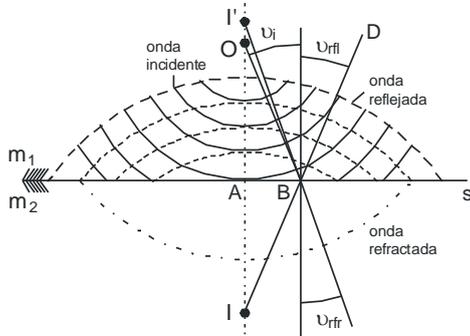


Fig. 171

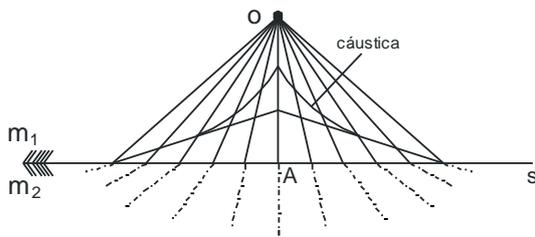


Fig. 172

Al llegar estas superficies de onda a la superficie de separación S , entre los medios 1 y 2 , cada punto emite ondas secundarias, tanto hacia el interior del medio 1 (onda reflejada) como hacia el interior del medio 2 (onda refractada).

Se ha dibujado uno de los infinitos rayos que representan la onda incidente, OB . Si $n_{21} > 1$ se verificará:

$$\theta_i = \theta_{rfl} \quad \frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_{rfr}} = n_{21}$$

El rayo reflejado BD intercepta a la normal AO en el punto I . Como los triángulos OAB y IAB son rectángulos, y los ángulos en O y en I son iguales, se deduce que $AO = AI$.

Como B es un punto elegido arbitrariamente sobre la superficie S , se deduce que todos los rayos reflejados pasan por el punto I , simétrico del O respecto de la superficie S .

En consecuencia, las superficies de onda reflejadas son esferas y además simétricas respecto de las incidentes.

La envolvente de los rayos refractados forman una superficie cónica denominada "cáustica". (fig.172)

El rayo refractado intercepta a la normal en un punto tal como el I' de donde se obtiene:

$$\text{tag } \theta_{rfr} = \frac{AB}{AI'}. \text{ Como } \text{tag } \theta_i = \frac{AB}{AD}, \text{ se tiene:}$$

$$\frac{\text{tag } \theta_i}{\text{tag } \theta_{rfr}} = \frac{AI}{AO} \rightarrow AI = AO \frac{\text{tag } \theta_i}{\text{tag } \theta_{rfr}}$$

La ley de Snell requiere que $\text{sen } \theta_i / \text{sen } \theta_{rfr}$ sea constante e igual a n_{21} . Pero en este supuesto, $\text{tag } \theta_i / \text{tag } \theta_{rfr}$ no puede ser constante.

Por consiguiente, los rayos refractados (sus prolongaciones) no pasan por el mismo punto. En otras palabras, las ondas refractadas no son esféricas.

- Puede realizarse una generalización, en forma analítica, de estas leyes de reflexión y refracción, para ondas en tres dimensiones.

Sean:

$$\xi_i = \xi_{oi} \cdot \text{sen}(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - wt) \quad (1) \text{ onda incidente}$$

$$\xi_{rfr} = \xi_{0rfr} \cdot \text{sen}(\vec{k}_{rfr} \cdot \vec{r} - wt) \quad (2) \text{ onda refractaria}$$

$$\xi_{rfl} = \xi_{0rfl} \cdot \text{sen}(\vec{k}_{rfl} \cdot \vec{r} - wt) \quad (3) \text{ onda reflejada}$$

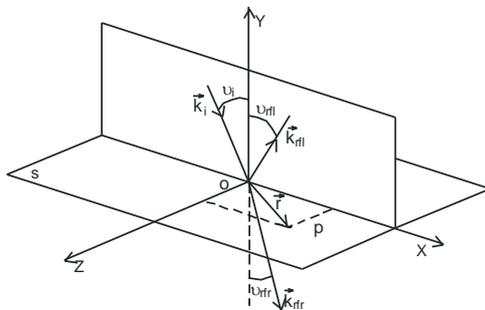


Fig. 173

Cualquiera que sea la propiedad física descrita por ξ (tensión, presión, desplazamiento, etc...), su valor en la superficie de separación de los dos medios tiene que ser la misma.

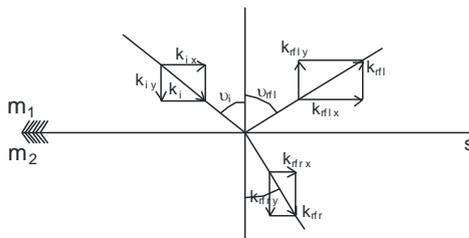


Fig. 174

Pero en el medio (1), la perturbación estará provocada por la superposición de las ondas incidente y reflejada, mientras que en el medio (2), solo se tiene la onda refractada.

En consecuencia, en la superficie de separación se tendrá:

$$\xi_i + \xi_{rfl} = \xi_{rfr} \quad (4)$$

Para que esta ecuación se cumpla en todos los puntos de la superficie, y en el mismo instante, las fases de las ecuaciones 1, 2 y 3 han de ser iguales, es decir:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} - wt = \vec{k}_{rfr} \cdot \vec{r} - wt = \vec{k}_{rfl} \cdot \vec{r} - wt \quad (5)$$

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_{rfr} \cdot \vec{r} = \vec{k}_{rfl} \cdot \vec{r} \quad (6)$$

Si se eligen los ejes coordenados como se ve en la figura 61, es decir, el plano **XOZ** coincidiendo con la superficie de separación **S**, y la dirección de incidencia con el plano **XY**, se tiene:

$$\vec{r} = x \vec{i} + z \vec{k} \quad (\text{por estar } \vec{r} \text{ en el plano } ZOZ \equiv S)$$

$$\vec{k}_i = k_{i,x} \vec{i} + k_{i,y} \vec{j} \quad (\text{por estar en el plano } YOZ)$$

$$\vec{k}_{rfl} = k_{rfl,x} \vec{i} + k_{rfl,y} \vec{j} + k_{rfl,z} \vec{k} \quad (\text{no se sabe en que plano esta})$$

$$\vec{k}_{rfr} = k_{rfr,x} \vec{i} + k_{rfr,y} \vec{j} + k_{rfr,z} \vec{k} \quad (\text{idem})$$

Sustituyendo la ecuación (5), y ejecutando el producto escalar, se tiene:

$$k_{i,x} \cdot x = k_{rfl,x} \cdot x + k_{rfl,z} \cdot z = k_{rfr,x} \cdot x + k_{rfr,z} \cdot z$$

Para que estas igualdades sean válidas en todo el plano **ZOX**, tiene que cumplirse:

$$k_{i,x} = k_{rfl,x} = k_{rfr,x} \quad (7)$$

$$k_{rfl,z} = k_{rfr,z} = 0 \quad (8)$$

La ecuación (7) indica que los vectores \vec{k}_{rfl} y \vec{k}_{rfr} no tienen componentes según el eje **Z**, es decir, que están en el plano **XY**. En la figura 62, se tiene:

$$k_{i,x} = k_i \cdot \text{sen } \theta_i$$

$$k_{rfl,x} = k_{rfl} \cdot \text{sen } \theta_{rfl}$$

$$k_{rfr,x} = k_{rfr} \cdot \text{sen } \theta_{rfr}$$

Además, también puede ponerse $k_i = k_{rfl} = \frac{w}{v_1}$; $k_{rfr} = \frac{w}{v_2}$

Sustituyendo en estas expresiones, se obtiene:

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_{rfl}}{v_2} = \frac{\text{sen } \theta_{rfr}}{v_1}$$

De donde se deduce que: $\text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_{rfl} \rightarrow \theta_i = \theta_{rfl} \rightarrow \frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_{rfl}} = \frac{v_1}{v_2}$

(Como se ve, las mismas leyes que las obtenidas aplicando las construcciones de *Huygens* y *Malus*).

NOTA 74:

El cumplimiento de la ecuación (5) implica que la ecuación (4) se reduce a:

$$\xi_{0i} + \xi_{0rfl} = \xi_{0rfr}$$

que relaciona las amplitudes de las tres ondas.

(Esta ecuación, por si sola, no permite hallar ξ_{0rfl} y ξ_{0rfr} a partir de ξ_{0i} .

Sin embargo, introduciendo algunas condiciones de contorno que han de cumplirse en la superficie de separación, si podrían calcularse estas amplitudes.

10.2.3.- REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS UNIDIRECCIONALES.**CASO DE CUERDAS TENSADAS NO HOMOGÉNEAS.**

- En el punto 2.3.2. se estudió la formación y transmisión de ondas en cuerdas tensadas y homogéneas, es decir, de un solo material y de una sección constante.

En este punto se va a analizar el comportamiento de las ondas en una cuerda no homogénea, bien por secciones diferentes, con el mismo material, o bien por estar construida con materiales diferentes, aún cuando tenga la misma sección.

NOTA 75:

Antes de acometer el estudio de la transmisión de ondas en cuerdas tensadas no homogéneas es conveniente analizar el fenómeno de reflexión de ondas en cuerdas tensadas homogéneas, en dos supuestos: Cuerda unida a una pared (*extremo fijo*) y cuerda unida a una argolla deslizante (*extremo libre*).

La diferencia entre una y otra es que la onda reflejada se invierte en el primer caso, mientras que no lo hace en el segundo.

(En el primer caso, la onda se refleja en un medio de masa infinita, y en el

segundo, en uno de masa despreciable). (fig. 175)

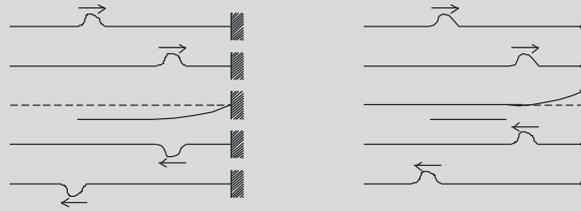


Fig. 175

Si ahora se supone una sola cuerda, con dos tramos, de igual sección y diferentes materiales, el primero de densidad lineal m_{l1} y el otro m_{l2} , siendo $m_{l1} < m_{l2}$ (que supone, como se vio en el punto 2.3.2. que $v_1 < v_2$), la situación es la reflejada en la figura 176.

Como se ve, cuando el pulso alcanza el tramo m_{l2} se produce simultáneamente una reflexión y una refracción.

La onda refractada es la que se transmite al tramo m_{l2} , y no sufre cambio de signo, mientras que la onda reflejada, que ahora retrocede por el tramo m_{l1} , si cambia de signo.

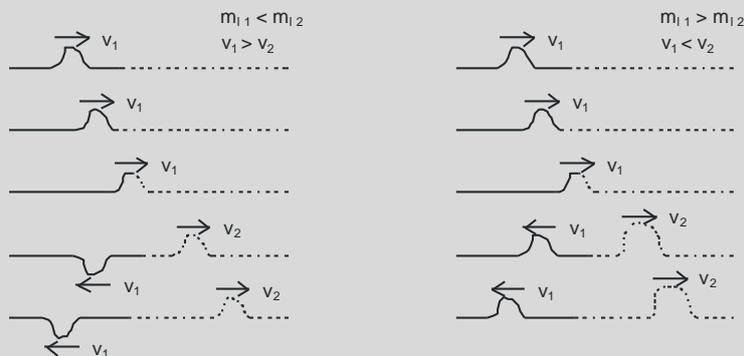


Fig. 176

Por el contrario, si $m_{l1} > m_{l2}$, cuando el pulso alcanza el tramo m_{l2} también se produce una onda refractada (de igual signo) y otra reflejada, que en este caso también tiene el mismo signo, como se ve en la figura 176.

(La refracción completa (sin reflexión) tiene lugar cuando $v_1/v_2 = 1$, y la reflexión completa (sin refracción), cuando $v_1/v_2 = 0$ o infinito).

(Se observa también como cuando $m_{1,1} > m_{1,2}$, el tramo más denso de la cuerda posee más energía, de manera que la onda refractada alcanza una gran amplitud, mientras que la onda reflejada tiene una onda más pequeña).

(Por razones obvias, a la onda refractada se le denomina comúnmente “onda transmitida”).

Todos los aspectos señalados gráficamente pueden ser formulados y analizados matemáticamente, como se verá a continuación.

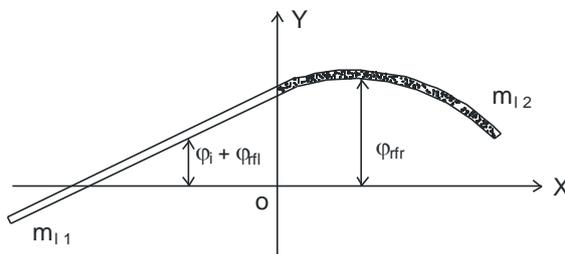


Fig. 177

La figura 177 representa un tramo de cuerda de diferentes materiales (diferentes densidades lineales $m_{1,1} > m_{1,2}$).

Se eligen los ejes de coordenadas de manera que el origen coincida con el punto de transición.

La cuerda está sometida a una tensión T .

La onda incidente viene dada por:

$$\xi_i = \xi_{0i} \text{ sen}(wt - k_i x)$$

A partir del punto de discontinuidad se produce una onda refractada (transmitida) dada por la expresión:

$$\xi_{rfr} = \xi_{0rfr} \text{ sen}(wt - k_2 x)$$

Y una onda reflejada por:

$$\xi_{rfl} = \xi_{0rfl} \text{ sen}(wt + k_i x) \quad (\text{Obsérvese el signo + que indica el retroceso de la onda}).$$

El desplazamiento vertical en cualquier punto del tramo $m_{1,1}$ viene dado por:

$$\xi = \xi_i + \xi_{rfl}$$

En el tramo $m_{1,2}$, se tendrá $\xi = \xi_{rfr}$

En el punto O , debe cumplirse $\xi_i + \xi_{rfl} = \xi_{rfr}$. Como además, $x = 0$, puede ponerse:

$$\xi_{0i} \text{ sen } wt + \xi_{0rfl} \text{ sen } wt = \xi_{0rfr} \text{ sen } wt$$

$$\xi_{0i} + \xi_{0rfl} = \xi_{0rfr} \quad (1)$$

(Ecuación similar a la ya conocida para ondas en tres dimensiones).

Como se vio en el punto 2.3.2. la fuerza vertical en cualquier punto del tramo $m_{1,1}$ vale:

$$F_y = T \text{ sen } \alpha \approx T \text{ tag } k = T \frac{\partial \xi_i}{\partial x} = T \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi_{rfl}}{\partial x} \right)$$

Sustituyendo:

$$F_y = T k_1 [-\xi_{0i} \cos(wt - k_1 x) + \xi_{0rfl} \cos(wt + k_1 x)]$$

De igual forma, la fuerza vertical en cualquier punto del tramo $m_{1,2}$ será:

$$F_y = T \frac{\partial \xi_{rfr}}{\partial x} = -T k_2 \xi_{0rfr} \cos(wt - k_2 x)$$

En el punto de unión, las fuerzas verticales han de ser las mismas y $x = 0$, con lo cual:

$$k_1 (\xi_{0i} - \xi_{0rfl}) = k_2 \cdot \xi_{0rfr} \quad (2)$$

(Una segunda condición que han de satisfacer las tres amplitudes)

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2), queda:

$$\xi_{0rfr} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \xi_{0i} \quad (3) \quad y \quad \xi_{0rfl} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \xi_{0i} \quad (4)$$

(Las ecuaciones (3) y (4) permiten calcular las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida, en función de la amplitud de la onda incidente).

Como $k = \frac{w}{v}$, queda:

$$\xi_{0rfr} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} \xi_{0i} \quad y \quad \xi_{0rfl} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \xi_{0i}$$

Como en las cuerdas $v = \sqrt{\frac{T}{m_l}}$, puede ponerse también:

$$\xi_{0rfr} = \frac{2\sqrt{m_{l1}}}{\sqrt{m_{l1}} + \sqrt{m_{l2}}} \xi_{0i} \quad y \quad \xi_{0rfl} = \frac{\sqrt{m_{l1}} - \sqrt{m_{l2}}}{\sqrt{m_{l1}} + \sqrt{m_{l2}}} \xi_{0i}$$

Llamando $\mathbf{C}_{rfl} = \xi_{0rfl} / \xi_{0i}$ coeficiente de reflexión y $\mathbf{C}_{rfr} = \xi_{0rfr} / \xi_{0i}$ coeficiente de refracción, queda:

$$\mathbf{C}_{rfr} = \frac{2\sqrt{m_{l1}}}{\sqrt{m_{l1}} + \sqrt{m_{l2}}} \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_{rfl} = \frac{\sqrt{m_{l1}} - \sqrt{m_{l2}}}{\sqrt{m_{l1}} + \sqrt{m_{l2}}}$$

Se observa que \mathbf{C}_{rfr} es siempre positivo, mientras que \mathbf{C}_{rfl} puede ser positivo o negativo, dependiendo de que $m_{l1} > \text{ó} < m_{l2}$

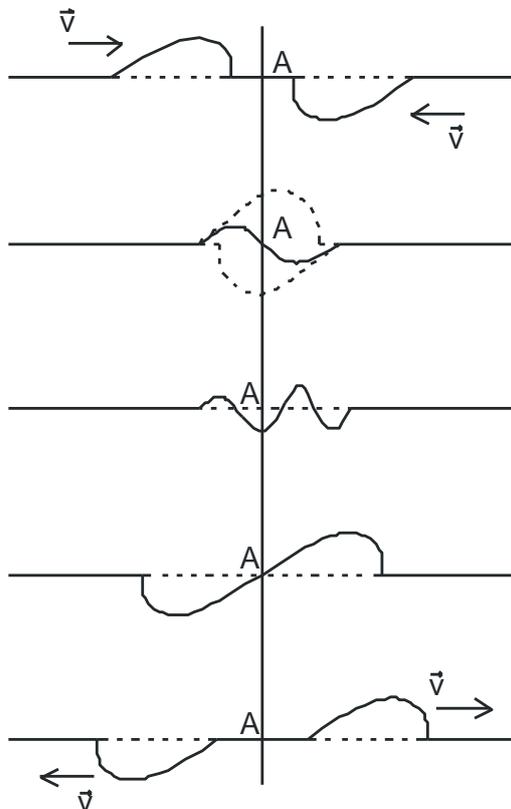
10.3.- INTERFERENCIA EN ONDAS.-**10.3.1.- INTERFERENCIA EN ONDAS UNIDIRECCIONALES.**

Fig. 178

La figura 178 representa dos ondas (pulsos) que se desplazan por el mismo medio (una cuerda), en direcciones contrarias. Ambas tienen la misma amplitud e igual velocidad.

Cuando las dos ondas se encuentran, la onda resultante es la suma algebraica de los desplazamientos individuales (superposición).

Esta superposición de los dos movimientos ondulatorios recibe el nombre de *interferencia*.

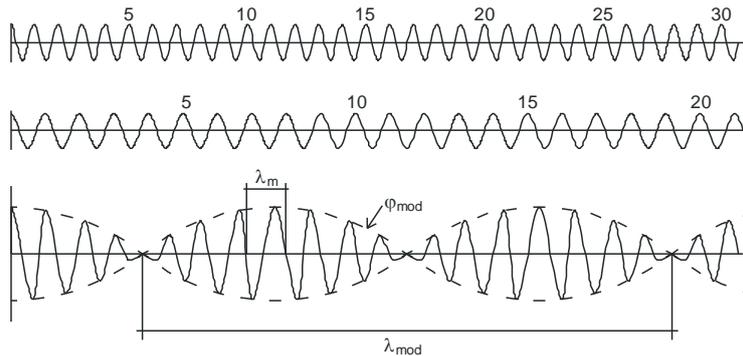
Como se aprecia en la figura, no hay modificación en ambas ondas. La forma (y la energía) de las ondas del “*encuentro*” es exactamente la misma después del “*encuentro*”

Intuitivamente se comprende que si las ondas que se encuentran tienen su amplitud positiva (o ambas negativas), la amplitud resultante será mayor que la de cada onda por separado (interferencia constructiva).

Por el contrario, cuando las amplitudes de las dos ondas tienen amplitudes diferentes (como es el caso de la figura), la magnitud del desplazamiento resultante es menor que el de cualquiera de ellas, y se trata de una interferencia destructiva.

Al igual que en los dos pulsos de la figura, la interferencia se produce entre dos trenes de ondas, y la misma será función de la amplitud de cada uno, de las frecuencias respectivas y del desfase entre ellas.

La figura 179 representa dos ondas (trenes de ondas) de igual amplitud que se desplazan de izquierda a derecha y que se encuentran en fase (igual ordenada ξ) para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ y sus frecuencias $\omega_1 > \omega_2$ son ligeramente diferentes.



(Obsérvese el desfase producido por las frecuencias diferentes $\omega_2 > \omega_1$).

Fig. 179

Si se supone que ambas ondas son armónicas, los respectivos desplazamientos vienen dados por:

$$\xi_1 = \xi_{o1} \cdot \text{sen}(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{x})$$

$$\xi_2 = \xi_{o2} \cdot \text{sen}(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{x})$$

$$\text{siendo : } \mathbf{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad \mathbf{v}_1 = \frac{\omega_1}{\mathbf{k}_1}$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\omega_2}{\mathbf{k}_2}$$

La onda resultante vale:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_{o1} \text{sen}(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{x}) + \xi_{o2} \text{sen}(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{x})$$

$$\text{Como } \xi_{o1} = \xi_{o2} = \xi_o, \text{ queda: } \xi = \xi_o [\text{sen}(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{x}) + \text{sen}(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{x})]$$

$$\text{Recordando que } \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2},$$

la expresión anterior puede ponerse:

$$\xi = 2\xi_o \cdot \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right] \cdot \text{sen}\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right]$$

Llamando $\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ y $k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$ los valores medios de ω y k .

Llamando también $\omega_{mod} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ frecuencia angular de la modulación y

$k_{mod} = \frac{k_1 - k_2}{2}$ número de onda de la modulación, queda finalmente:

$$\xi = 2\xi_o \cos(\omega_{mod} t - k_{mod} x) \cdot \text{sen}(\omega_m t - k_m x)$$

Si se llama:

$$\xi_{mod} = 2\xi_o \cos(\omega_{mod} t - k_{mod} x)$$

queda:

$$\xi = \xi_{mod} \cdot \text{sen}(\omega_m t - k_m x)$$

Expresión que indica que la onda resultante de la interferencia es también una onda armónica de frecuencia la media de ω_1 y ω_2 y de número de onda también la media entre k_1 y k_2 .

Su amplitud es variable, y viene dada por ξ_{mod} .

(La onda resultante se dice que esta “*modulada en amplitud*”).

NOTA 76:

La velocidad de la onda armónica resultante, llamada “*velocidad de fase*”, es:

$$v_{fase} = v_f = \frac{\omega_m}{k_m}$$

La velocidad de la onda envolvente, denominada “*velocidad de grupo*”, viene dada por:

$$v_{grupo} = v_g = \frac{\omega_{mod}}{k_{mod}}$$

Los puntos con $\xi = 0$ se denominan “**nodos**” y los puntos de ξ máxima se denominan “**vientres**” (o “**antinodos**”).

NOTA 77:

Si además de ser $\xi_{01} = \xi_{02}$ fuese también $\omega_1 = \omega_2$, entonces $\omega_{mod} = 0$, con lo cual $v_{grupo} = 0$, es decir, la “**onda modulada**” no se desplazaría.

El desfase inicial produciría una onda modulada, pero que ahora se vería “**estacionaria**”.

Dos ondas que dan lugar a una onda resultante de este tipo se dice que son “**coherentes**”.

Cuando el diagrama de interferencia no es estacionario se dice que las ondas que se interfieren son “**incoherentes**”.

Cuando la diferencia entre ω_1 y ω_2 es pequeña, la velocidad de fase y la velocidad de grupo son iguales.

En efecto:

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{d\omega}{dk}$$

Como $\omega = k v_f$, se tiene:

$$v_g = \frac{d(k v_f)}{dk} = v_f \frac{dk}{dk} + k \cdot \frac{dv_f}{dk} = v_f + k \frac{dv_f}{dk}$$

Si la v_f es independiente de la longitud de onda, o sea, de k , entonces

$$\frac{dv_f}{dk} = 0$$

y queda: $v_g = v_f$

NOTA 78:

Si ω_1 y ω_2 son muy diferentes, o el medio en que se transmiten las dos ondas es “dispérsico” (la velocidad v depende de λ), la velocidad de grupo será diferente a la velocidad de fase.

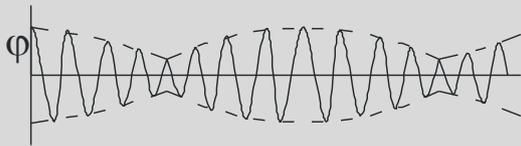
NOTA 79:

Fig. 180

Obviamente, si las amplitudes de ξ_1 y ξ_2 no fueran iguales, la “onda modulada” no presentaría valores de amplitud nulos. (fig. 180)

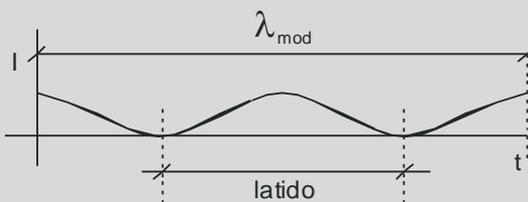
NOTA 80:

Fig. 181

Como la intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de su amplitud, la onda modulada presenta un diagrama de I frente a t como se ve en la figura 181. Los incrementos de intensidad se denominan “batidos”. El período de los batidos es $2 \cdot \lambda_{mod}$.

NOTA 81:

El fenómeno de “batido” se emplea para afinar cuerdas de piano (que como se ha visto, genera una onda sonora en el aire que la rodea, al vibrar).

Para ello, se dispone de un diapasón que vibra en una frecuencia conocida ω_1 . Para afinar la cuerda, se va actuando sobre esta

(tensándola) y se hace vibrar.

Cuando el oído percibe el sonido resultante (del diapasón y de la cuerda) como una sucesión de latidos (sonidos que van creciendo y que luego vuelven a desaparecer), puede asegurarse que la frecuencia de la cuerda ω_2 difiere en menos de 10 Herzios de la del diapasón.

10.3.2.- INTERFERENCIAS EN ONDAS DE DOS Y TRES DIMENSIONES.-

La figura 182 muestra la propagación de dos ondas planas, sobre la superficie de un líquido, ambas de igual amplitud, frecuencia, longitud y fase.

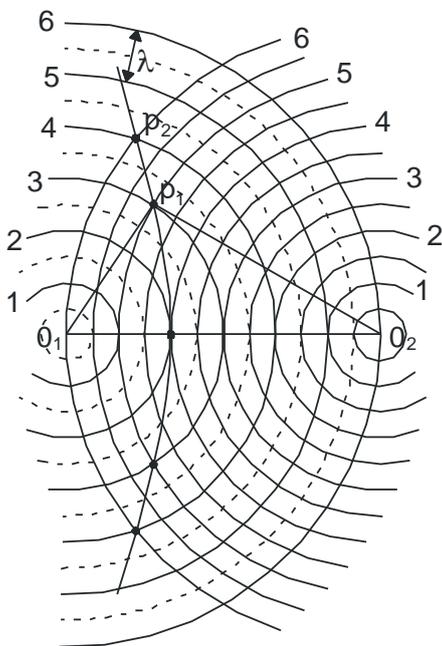


Fig. 182

Las líneas llenas representan las crestas (*amplitud máxima*) y las líneas de trazos, los valles (*amplitud mínima*).

Intuitivamente se comprende que en los puntos donde se interfieren dos crestas (*frentes de onda*) la amplitud de la onda resultante es máxima, mientras que en los puntos donde interfiere una cresta con un valle, la amplitud resultante es cero.

En un punto tal como P_1 coincide la cresta $n^{\circ} 3$ de la onda emitida por el foco O_1 con la cresta $n^{\circ} 5$ de la onda emitida por el foco O_2

En ese punto se alcanzará un máximo (*interferencia constructiva*).

La diferencia entre ambos números de onda es 2, o lo que es lo mismo:

$$PO_1 - PO_2 = \Delta r = 2\lambda$$

Si ahora se supone un punto tal como P_2 , con 4 crestas desde O_1 y 6 crestas desde O_2 , es decir, con una diferencia también de 2λ , también se tendrá una interferencia constructiva.

Es fácil de comprobar, en forma gráfica, que todos los puntos cuyos números de cresta difieran en 2λ se encuentran sobre una hipérbola. Y lo mismo ocurriría con los puntos que difieran en 3λ , 4λ , $n\lambda$.

Obviamente, en los puntos en que coinciden dos valles se tendrán unos valores mínimos (también distribuidos en hipérbolas).

En los puntos en que coincide una cresta con un valle, se obtiene una amplitud resultante nula. En esos puntos se verifica que la diferencia entre los números de crestas vale:

$$\Delta r = \frac{\lambda}{2}$$

La línea que los une es también una hipérbola.

Supónganse dos ondas que se propagan en el espacio de forma esférica, de tipo senoidal y de igual frecuencia ω . Supóngase también que los dos focos emisores están en fase, y sus amplitudes son las mismas.

En cualquier punto del espacio que diste r_1 del foco emisor O_1 y r_2 del foco emisor O_2 , las amplitudes vienen dadas por:

$$\xi_1 = \frac{\xi_0}{r_1} \text{sen}(w t - k r_1)$$

$$\xi_2 = \frac{\xi_0}{r_2} \text{sen}(w t - k r_2)$$

Teniendo en cuenta que las amplitudes disminuyen con el factor $1/r$, puede escribirse también:

$$\xi_1 = \xi_{01} \cdot \text{sen}(w t - k r_1)$$

$$\xi_2 = \xi_{02} \cdot \text{sen}(w t - k r_2)$$

Si ξ es una propiedad escalar, tal como una presión, la amplitud de la onda interferida será:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_{01} \text{sen}(w t - k r_1) + \xi_{02} \text{sen}(w t - k r_2)$$

El desfase entre las dos ondas en un punto cualquiera del espacio vendrá dado por:

$$\delta = \mathbf{k} r_1 - \mathbf{k} r_2 = \mathbf{k} (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) \quad (1)$$

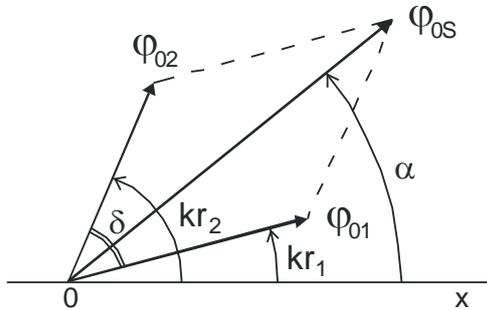


Fig. 183

La amplitud ξ_{0s} y la fase α del movimiento ondulatorio resultante de la suma de dos movimientos armónicos de igual dirección y frecuencia, puede hallarse en forma gráfica, como se ve en la figura 183.

$$\xi_{0s} = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2 \xi_{01} \xi_{02} \cdot \cos \delta}$$

Como se ve, ξ_{0s} está comprendida entre $\xi_{01} + \xi_{02}$ y $\xi_{01} - \xi_{02}$, dependiendo del desfase δ (función de las distancias r_1 y r_2 a las fuentes).

Si $\cos \delta = 1$ ó $\delta = 2n\pi$ (n un número entero y positivo) se tendrá una interferencia constructiva.

Si $\cos \delta = -1$ ó $\delta = (2n + 1)\pi$, se tendrá una interferencia destructiva.

Teniendo en cuenta la **Ec (1)**, también puede ponerse:

- Si $\frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = 2n\pi$ ó $r_1 - r_2 = n\lambda$, interferencia constructiva.
- Si $\frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = (2n + 1)\pi$ ó $r_1 - r_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$, interferencia destructiva.

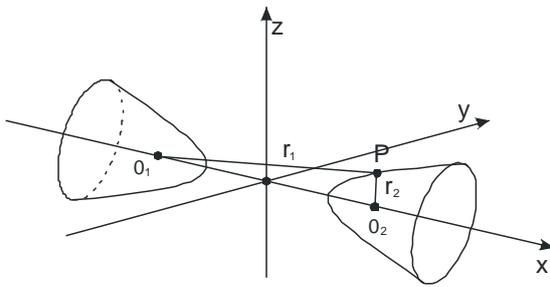


Fig. 184

Como se sabe, $r_1 - r_2 = \text{cte.}$ define un hiperboloide en el espacio, de focos O_1 y O_2 (donde se encuentran las fuentes) (fig.184)

Las superficies de interferencia constructiva se denominan **ventrales** y las de interferencia destructiva, **nodales**.

NOTA 82:

Puede observarse que en cada punto del espacio, la amplitud ξ_{0s} y el desfase α son constantes. Por consiguiente, no se percibe una “onda progresiva”, sino “estacionaria”.

El motivo es que las dos fuentes tienen la misma frecuencia, y además, están en fase. Se dice que son coherentes. Si las fuentes son “incoherentes” (diferentes frecuencias y fases), entonces no se percibirían unas ondas “estacionarias”.

11.- ONDAS ESTACIONARIAS.-

11.1.- INTRODUCCIÓN A LAS ONDAS ESTACIONARIAS.-

- En el punto **5.2.3.** se vio cómo un pulso que viaja por una cuerda sujeta a una pared, se reflejaba en ésta, retrocediendo, pero invertido (*y con la misma amplitud*).

También se vio que si el extremo de la cuerda estaba libre, el pulso se refleja en su extremo, retrocediendo, pero ahora sin invertirse.

- En el punto **5.3.1.** se vio cómo se interferían dos pulsos que viajan por una cuerda en sentido contrario, así como también la interferencia entre dos ondas sinusoidales que se transmiten por una cuerda en la misma dirección.

Este estudio se hizo extensivo a interferencias de ondas que se propagan en dos y tres direcciones.

- En todos esos casos se suponía que las ondas se propagaban en medios ilimitados, o "*medios abiertos*", los cuales se dan muy pocas veces en la práctica.

Cuando las ondas que se propagan están confinadas en medios limitados, donde aparecen reflexiones o puntos que no pueden oscilar (*puntos fijos en una cuerda, por ejemplo*), aparecen interferencias de la onda consigo misma (*onda directa con la onda reflejada, por ejemplo*), que da lugar a una onda que aparentemente no se propaga, conocida como "*onda estacionaria*".

- En este punto se va a abordar el estudio de estas ondas estacionarias (*concretamente las de tipo armónico*), tanto en una como en dos y tres direcciones.

NOTA 83:

Cuando en una habitación se hace vibrar la cuerda de una guitarra, esta transmite su oscilación al aire circundante, produciendo una onda sonora. Estas ondas alcanzan el techo y las paredes, y son reflejadas sobre el interior de la habitación, produciéndose fenómenos de interferencia que pueden dar lugar a la aparición de ondas estacionarias.

Sin embargo, si se construyeran todas las paredes, techo y piso de un material que absorbiera las ondas sonoras, este fenómeno no se produciría, y la habitación actuaría como un medio de propagación abierto o ilimitado.

Estas cámaras se llaman “*anecoicas*”, mientras que las que no absorben nada, reflejan el 100% de la onda incidente, se denominan “*cámaras reverberantes*”.

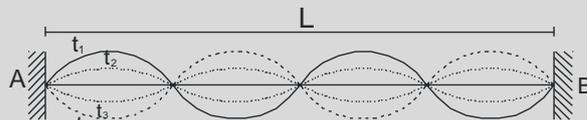
NOTA 84:

Fig. 185

En la figura 185 se ha representado una cuerda de guitarra sujeta por sus dos extremos y vibrando en el “cuarto armónico” (más adelante se verá qué significa este término). Aparentemente la cuerda presenta tres puntos de amplitud (desplazamiento ξ) nula (*nodos*) y cuatro puntos de amplitud máxima (*vientres*).

En cada punto x de la cuerda, la amplitud ξ oscila entre $-\xi_x$ y $+\xi_x$, pero no se aprecia ninguna onda viajera.

Las líneas de trazos representan diferentes posiciones de la cuerda en varios instantes de tiempo (t_1, t_2, t_3, t_4).

Esta onda estacionaria es el resultado de una onda viajera que se desplaza desde A hacia B y de otra onda, la reflejada, que se desplaza de B hacia A .

Es lógico intuir que para una longitud de cuerda dada L , no todas las longitudes de onda (de las infinitas posibles) pueden “rebotar” en los dos extremos y dar lugar a una onda estacionaria.

NOTA 85:

En ingeniería mecánica, las ondas estacionarias que aparecen sobre elementos metálicos, denominadas “vibraciones”, tienen una enorme importancia, tanto por ser causa de roturas de tales elementos, como por ser básicos (su conocimiento) para el mantenimiento y control de muchas máquinas.

11.2.- ONDAS ESTACIONARIAS UNIDIRECCIONALES.-

La figura 186 representa una cuerda tensada fija en 0 (coincidiendo en reposo con el eje OX) y una onda armónica inducida sobre ella por un foco emisor no representado, que viaja de derecha a izquierda (representada por la línea continua).

La línea de trazos representa la onda reflejada, que viaja de izquierda a derecha.

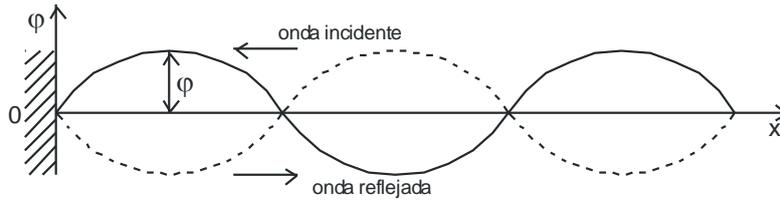


Fig. 186

La ecuación de la onda incidente es:

$$\xi = \xi_0 \text{sen}(w t + k x)$$

La onda reflejada tiene por ecuación:

$$\xi = \xi'_0 \text{sen}(w t - k x)$$

La onda resultante vendrá dada por:

$$\xi = \xi_0 \text{sen}(w t + k x) + \xi'_0 \text{sen}(w t - k x) \quad (1)$$

En el punto 0 se tendrá ($x = 0$):

$$\xi_{x=0} = (\xi_0 + \xi'_0) \text{sen } w t$$

Como 0 es un punto fijo $\xi_{x=0} = 0$, luego $\xi'_0 = -\xi_0$.

(Lo cual significa que la onda cambia de fase (π) cuando se refleja en el extremo fijo).

La ecuación (1) puede escribirse:

$$\xi = \xi_0 [\text{sen}(w t + k x) - \text{sen}(w t - k x)] \quad (2)$$

Recordando que $\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \text{cos } \frac{\alpha + \beta}{2}$, queda en este caso:

$$\xi = 2 \xi_0 \operatorname{sen} kx \cdot \cos \omega t \quad (3)$$

Como se ve, ya no aparecen las expresiones $(\omega t \pm kx)$, es decir, no se trata de una onda viajera.

La ecuación (3) representa un movimiento armónico de frecuencia circular ω , cuya amplitud $A = 2 \cdot \xi_0 \cdot \operatorname{sen} kx$ depende de x .

Las variables x y t están separadas. La amplitud tiene un valor diferente (y único) en cada punto.

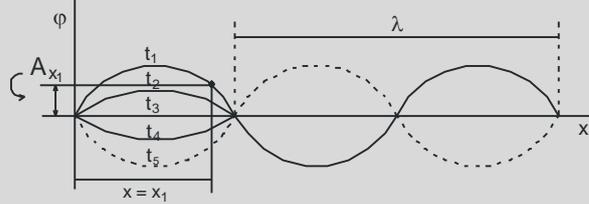
NOTA 86:

Fig. 187

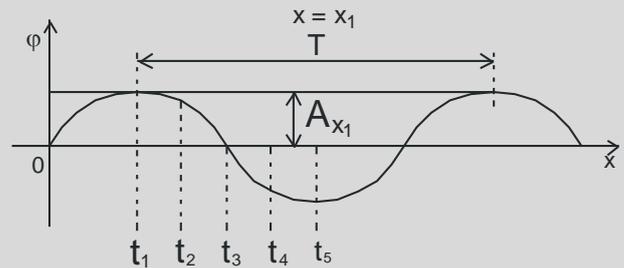


Fig. 188

La figura 187 representa la onda “espacial”, estacionaria, y la figura 188 la onda temporal, trazada para $x = x_1$, (amplitud A_{x_1}).

La amplitud $A = 2 \cdot \xi_0 \cdot \operatorname{sen} kx$ es cero para $x = 0$ y para $kx = n\pi$, siendo n un número entero.

(La amplitud es cero para valores de $x = \frac{n \cdot \pi}{k} = \frac{n \cdot \pi}{2\pi / \lambda} = \frac{1}{2} n\lambda$).

Estos son los nodos de la onda estacionaria, los cuales están separados por la distancia $\frac{1}{2} \lambda$.

NOTA 87:

Recordando que en cuerdas tensadas, de tensión T y masa por unidad de longitud m_l , la velocidad de propagación de la onda es $v = \sqrt{\frac{T}{m_l}}$ y que

$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega}$, queda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{T}{m_l}}$$

Como se ve, pueden obtenerse tantos valores de λ como valores de ω se fijan.

a) Cuerda con los dos extremos fijos:

Si ahora se supone que la cuerda se fija en otro punto $x = L$, entonces este punto será otro nodo, y se debe satisfacer la condición $k \cdot L = n \cdot \pi$,

$$\text{o también: } L = \frac{1}{2} n \lambda \rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Esta segunda condición limita las longitudes de las ondas estacionarias que pueden aparecer en una cuerda de longitud L sujeta por sus dos extremos, a los siguientes valores:

$$\lambda = \frac{2L}{n} = 2L; \frac{2L}{2}; \frac{2L}{3}; \frac{2L}{4}; \dots$$

En función de esto, los valores de ω también vienen limitados:

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{T}{m_l}} \Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{2L} \sqrt{\frac{T}{m_l}}; \omega_2 = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{m_l}}; \omega_3 = \frac{3\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{m_l}}; \dots$$

$$\text{O en Hertzios} \quad \nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m_l}}; \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{m_l}}; \dots$$

La frecuencia más baja se denomina “fundamental”. Las demás, múltiplos de la fundamental, se denominan “armónicos”.

Puede decirse que las frecuencias y longitudes de onda (de la onda estacionaria) están “*cuantizadas*”, y que esta cuantización es el resultado de las condiciones de contorno impuestas a la cuerda (aún cuando su número es infinito).

La forma de la onda armónica para cada frecuencia se denomina “*modo*”.

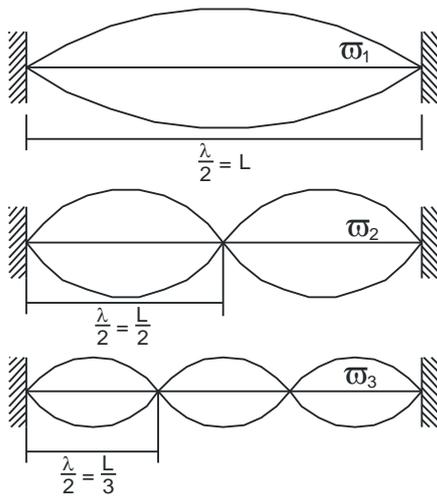


Fig. 189

En la figura 189 se han representado los tres primeros modos de la onda estacionaria sobre una cuerda de longitud L sujeta por sus dos extremos.

(El modo fundamental y los dos primeros armónicos)

b) Cuerda con un extremo fijo y otro libre:

NOTA 88:

Físicamente, una cuerda con un extremo fijo y otro libre, tensada a la tensión T , excitada por una fuerza armónica, y de longitud L , puede construirse como se ve en la figura 190.

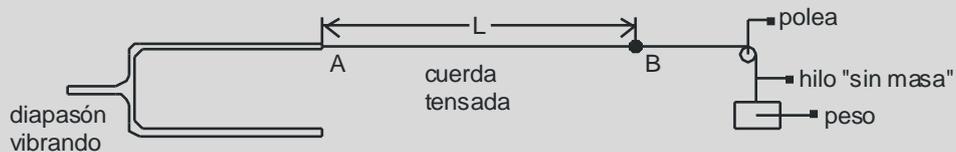


Fig. 190

En este caso, al estar el extremo B libre, la onda incidente no cambia de fase, es decir:

$$\xi'_{0(B)} = \xi_{0(B)}$$

En consecuencia, la ecuación suma de la onda incidente y la reflejada puede escribirse:

$$\xi = \xi_0 [\text{sen}(wt + kx) + \text{sen}(wt - kx)]$$

Teniendo en cuenta que $\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2}$, queda:

$$\xi = 2 \xi_0 \cdot \text{sen } wt \cdot \cos(-kx) = 2 \xi_0 \cos kx \cdot \text{sen } wt$$

Esta ecuación representa un movimiento armónico de frecuencia circular ω y cuya amplitud $A = 2 \xi_0 \cos kx$ depende de x .

La amplitud será cero para:

$$\cos kx = 0 \rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Las longitudes de onda correspondientes a estos modos serán:

$$\lambda = \frac{4x}{2n+1}$$

Sustituyendo x por L se obtienen las longitudes de onda estacionarias que pueden aparecer en este caso:

$$\lambda = \frac{4L}{2n+1} \quad \lambda_1 = 4L; \quad \lambda_2 = \frac{4L}{3}; \quad \lambda_3 = \frac{4L}{5}; \dots$$

Con lo cual los valores de las frecuencias serán:

$$v_1 = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{T}{m_l}}; \quad v_2 = \frac{3}{4L} \sqrt{\frac{T}{m_l}}; \quad v_3 = \frac{5}{4L} \sqrt{\frac{T}{m_l}}$$

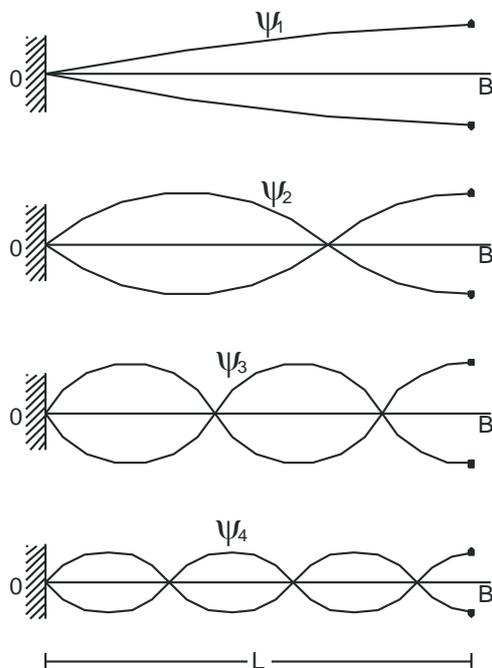


Fig. 191

Como puede verse en la figura 191, en todas las frecuencias se encuentra un vientre en el extremo B .

En el primer modo, la onda estacionaria tiene una longitud cuatro veces mayor que la longitud de la cuerda, y el único nodo es el punto fijo 0 .

11.3.- ONDAS ESTACIONARIAS BIDIMENSIONALES (ONDAS EN MEMBRANAS FINITAS).

En la figura puede verse una membrana rectangular, de lados a y b , con sus bordes fijos.

Cualquier acción exterior sobre la membrana origina ondas que se propagan en todas las direcciones y se reflejan en los bordes, originándose las correspondientes interferencias y en último termino, dará lugar a ondas estacionarias.

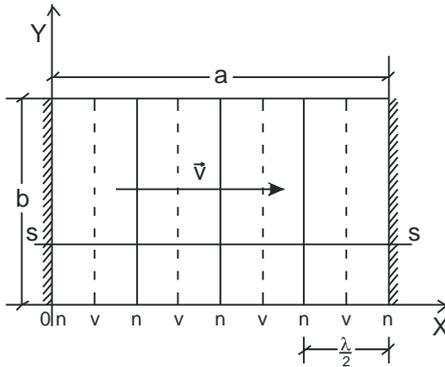


Fig. 192

En la fig. 192 se representa la placa fija en sus bordes paralelos al eje OY y libres en los otros dos. También se representa una onda plana que se propaga paralela al eje OY , con la velocidad v .

En cualquier sección perpendicular al plano XOY , como la SS , se tiene el equivalente a una cuerda tensada fija por sus extremos.

Esta onda viene dada por la ecuación: $\xi = \xi_0 \cdot \text{sen } kx \cdot \text{sen } wt$

y las longitudes de las ondas estacionarias vienen dadas por:

$$\lambda = \frac{2a}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Los nodos de los sucesivos cortes SS conforman una "línea nodal" y los vientres, las "líneas ventrales".

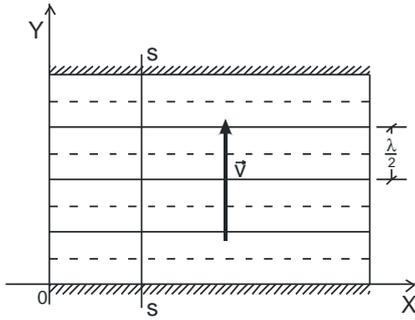


Fig. 193

En la figura 193 se representa una onda plana que se propaga en dirección paralela al eje **OX**, con la velocidad **v**.

En cualquier sección perpendicular al plano **XOY**, tal como la **SS**, se tiene el equivalente a una cuerda tensada y fija por sus extremos.

Esta onda viene dada por la ecuación:

$$\xi = \xi_0 \cdot \text{sen } ky \cdot \text{sen } \omega t$$

y las longitudes de las ondas estacionarias posibles, vienen dadas por:

$$\lambda = \frac{2b}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Igual que en el caso anterior, se encuentran las líneas nodales y las ventrales.

Supóngase ahora que la membrana está fija en los cuatro bordes y una onda plana que se propaga por ella en la dirección **PQ** (fig. 194).

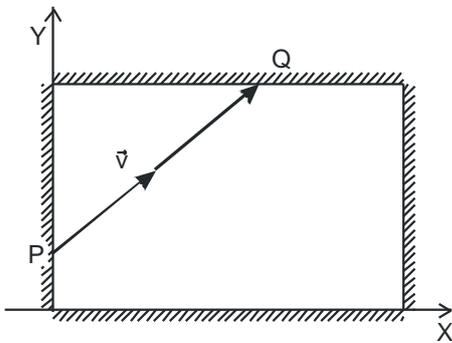


Fig. 194

Según se vio en el punto 3.1., si la onda es senoidal puede representarse por la expresión:

$$\xi = \xi_0 \cdot \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \xi_0 \cdot \text{sen}[(k_x \cdot x + k_y \cdot y) - \omega t]$$

(habiendo eliminado el término según **z** por tratarse de una onda plana).

A efectos de utilizar la misma formulación, puede ponerse:

$$\xi = \xi_0 \cdot \text{sen}[\omega t - (k_x \cdot x + k_y \cdot y)]$$

Las cantidades k_x y k_y son las componentes cartesianas del vector \vec{k} , paralelo a la línea de propagación de la onda (**PQ**). Como se sabe

$$k = 2\pi / \lambda = \omega / v = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

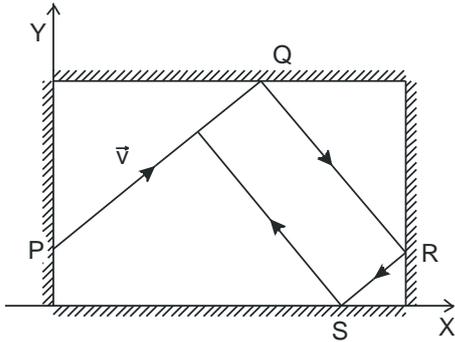


Fig. 195

Para cada rayo como el **PQ** (de componentes k_x, k_y) hay uno reflejado **QR** (de componentes $k_x, -k_y$), y de este, otro reflejado **RS** (de componentes $-k_x, -k_y$), y de este, otro, etc. (fig. 195). Solo que de S en adelante empiezan a ser paralelos, es decir, no se encuentran nuevas combinaciones de k_x y k_y .

Esto implica que en el conjunto de la membrana hay un sistema de cuatro ondas (debidas a la reflexión en los cuatro lados).

En la interferencia de estas cuatro ondas ha de ocurrir que $\xi = 0$ para $x = 0; x = a; y = 0; y = b$.

La amplitud de la onda resultante vendrá dada por:

$$\xi = \xi_0 \cdot \text{sen} [wt - (k_x \cdot x + k_y \cdot y)] + \xi'_0 \cdot \text{sen} [wt - (k_x \cdot x - k_y \cdot y)] + \xi''_0 \cdot \text{sen} [wt - (-k_x \cdot x - k_y \cdot y)] + \xi'''_0 \cdot \text{sen} [wt - (-k_x \cdot x + k_y \cdot y)] \quad (1)$$

Como para $x = 0, \xi = 0$, queda:

$$\xi = (\xi_0 + \xi'''_0) \text{sen}(wt - k_y \cdot y) + (\xi'_0 + \xi''_0) \text{sen}(wt + k_y \cdot y) = 0$$

con lo cual ha de cumplirse:

$$\xi_0 + \xi'''_0 = 0 \quad \text{y} \quad \xi'_0 + \xi''_0 = 0$$

Igualmente, $\xi = 0$ para $y = 0$

$$\xi = (\xi_0 + \xi'_0) \text{sen}(wt - k_x \cdot x) + (\xi''_0 + \xi'''_0) \text{sen}(wt + k_x \cdot x) = 0$$

que conduce a:

$$\xi_0 + \xi'_0 = 0 \quad \text{y} \quad \xi''_0 + \xi'''_0 = 0$$

Usando todas estas relaciones se obtiene:

$$\xi_0 = -\xi'_0 = \xi''_0 = -\xi'''_0$$

Entonces, la ecuación (1) queda:

$$\xi = \xi_0 \left[\begin{array}{l} \text{sen}[wt - (k_x x + k_y y)] - \text{sen}[wt - (k_x x - k_y y)] + \\ + \text{sen}[wt - (-k_x x + k_y y)] - \text{sen}[wt - (-k_x x - k_y y)] \end{array} \right]$$

Utilizando las transformaciones trigonométricas vistas en los puntos 6.1., queda:

$$\begin{aligned} \xi &= 2 \xi_0 [-\text{sen } k_y y \cdot \cos(wt - k_x x) + \text{sen } k_y y \cdot \cos(wt + k_x x)] = \\ &= 2 \xi_0 \text{sen } k_y y [-\cos(wt - k_x x) + \cos(wt + k_x x)] \end{aligned}$$

Transformando de nuevo la diferencia de cosenos en un producto, queda finalmente:

$$\xi = -4 \xi_0 \text{sen } k_x x \cdot \text{sen } k_y y \cdot \text{sen } wt \quad (2)$$

(Esta ecuación es la de una onda estacionaria, de amplitud $A = 4 \xi_0 \text{sen } k_x x \cdot \text{sen } k_y y$ y frecuencia circular ω).

Aplicando las condiciones de contorno, se tiene:

$\xi = 0$ para $x = 0$ o para $y = 0$, se cumple evidentemente

$\xi = 0$ para $x = a$, ha de ser $\text{sen } k_x \cdot a = 0 \Rightarrow k_x \cdot a = n_1 \pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$\xi = 0$ para $x = b$, ha de ser $\text{sen } k_y \cdot b = 0 \Rightarrow k_y \cdot b = n_2 \pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Como $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ queda: $k = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}$

Las frecuencias serán $\nu = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}$ y las longitudes de onda

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}$$

Las figuras 196 representan las ondas estacionarias en la placa para diferentes valores de n_1 y n_2 .

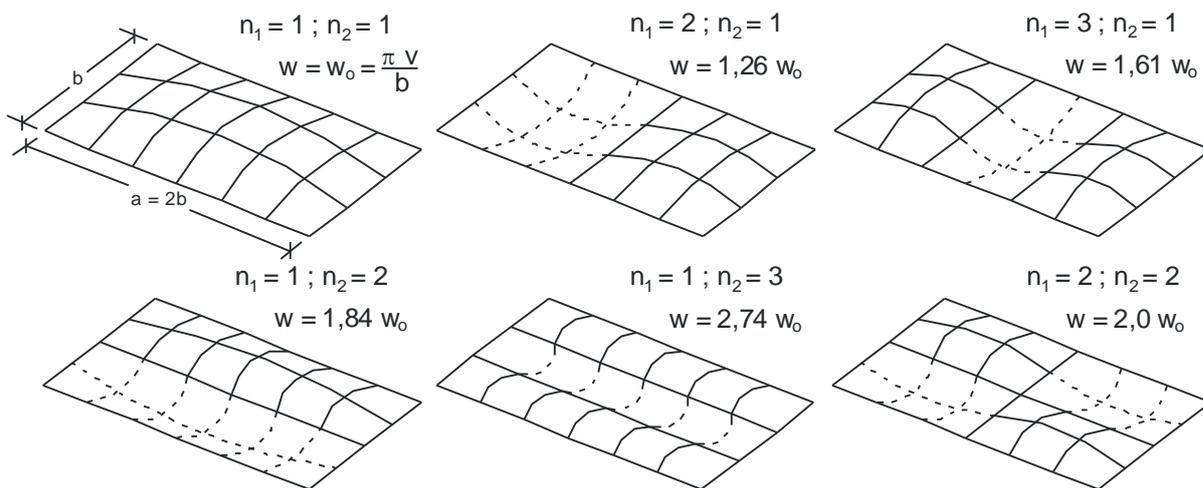


Fig. 196

11.4.- ONDAS ESTACIONARIAS EN TRES DIMENSIONES.- CAVIDADES RESONANTES.-

El estudio de las ondas estacionarias en tres dimensiones es completamente similar al caso de dos dimensiones.

En la figura 197 se representa una cavidad tridimensional formada por un prisma de caras **a**, **b**, **c**.

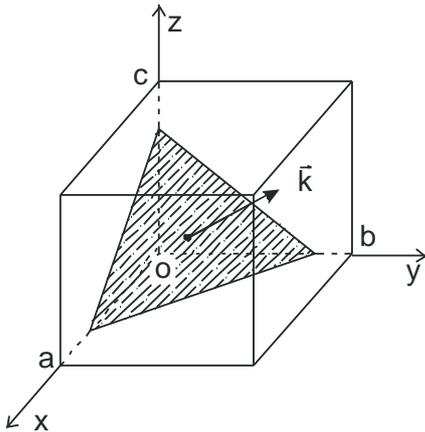


Fig. 197

En el interior de esta cavidad se propaga una plana caracterizada por el vector \vec{k} (perpendicular al plano de la onda).

Si esta es de tipo senoidal, su amplitud viene dada por:

$$\xi = \xi_0 \cdot \text{sen}(wt - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

o en forma de componentes:

$$\xi = \xi_0 \cdot \text{sen}[wt - (k_x x + k_y y + k_z z)]$$

Esta onda se refleja sucesivamente en todas las caras, estableciéndose un conjunto de ocho ondas reflejadas (las que resultan de las diferentes combinaciones $\pm k_x ; \pm k_y ; \pm k_z$). La interferencia de todas estas ondas da lugar a las correspondientes ondas estacionarias, que teniendo en cuenta que en los bordes $\xi = 0$, han de cumplir:

$$\begin{aligned} k_x \cdot a &= n_1 \cdot \pi & k_y \cdot b &= n_2 \cdot \pi \\ k_z \cdot c &= n_3 \cdot \pi & n_1, n_2, n_3 &= (1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

o también: $k_x = \frac{n_1 \pi}{a}$ $k_y = \frac{n_2 \pi}{b}$ $k_z = \frac{n_3 \pi}{c}$

como $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, puede ponerse $k = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}}$ y las frecuencias posibles en el interior de esta cavidad serán:

$$\nu = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}}$$

Las cavidades capaces de mantener ondas estacionarias en su interior se denominan “cavidades resonantes”.

11.5.- LA ECUACIÓN DE ONDA EN LAS ONDAS ESTACIONARIAS.-

Como se vio en el punto 2.1., la ecuación de una onda unidimensional viene dada por:

$$\frac{\delta^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\delta^2 \mathbf{x}^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\delta^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\delta t^2} \quad (1)$$

Se vio que dos ondas viajeras, una de sentido positivo del eje \mathbf{x} y otra en sentido contrario, del tipo $f_1(\mathbf{x} - \mathbf{vt})$ y $f_2(\mathbf{x} + \mathbf{vt})$ satisfacían la ecuación anterior

$$\xi = f_1(\mathbf{x} - \mathbf{vt}) + f_2(\mathbf{x} + \mathbf{vt})$$

Cuando se estudió la propagación de una onda en una dirección se elegía f_1 o f_2 , pero no ambas.

Sin embargo, cuando una onda se refleja (para conformar una onda estacionaria) han de utilizarse los dos sumandos.

NOTA 89:

En el punto 6.2. se vio que la ecuación de la onda estacionaria (senoidal) que aparece en una cuerda con los extremos fijos es:

$$\xi = 2 \xi_0 \text{ sen } kx \cdot \text{cos } wt$$

en la que, como se ve, las variables x y t están separadas (no aparece ninguna función que ligue x y t simultáneamente).

La amplitud $A = 2 \xi_0 \text{ sen } kx$ varía con x , pero no depende de t .

Teniendo el recordatorio anterior en cuenta, puede realizarse una formulación más general para las ondas estacionarias.

En efecto, como la amplitud es una función de \mathbf{x} , puede ponerse:

$$\xi = f(\mathbf{x}) \cdot \text{sen } wt \quad (2)$$

Como esta expresión (2) ha de ser una solución de la ecuación (1), puede determinarse el valor de $f(\mathbf{x})$ para que así sea.

Derivando (2) se obtiene:

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} = \frac{d^2 f(x)}{d x^2} \text{sen } wt \quad ; \quad \frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = -w^2 f(x) \cdot \text{sen } wt$$

Sustituyendo estos valores en (1) y eliminando el factor común **sen wt**, queda:

$$\frac{d^2 f(x)}{d x^2} = -\frac{w^2}{v^2} f(x)$$

Como $k = \frac{w}{v}$, queda finalmente:

$$\frac{d^2 f(x)}{d x^2} + k^2 f(x) = 0 \quad (3)$$

Esta ecuación debe satisfacer a la amplitud $f(x)$ si la onda estacionaria dada por la ecuación (2) es una solución de la ecuación (1).

La solución de la ecuación homogénea de segundo orden (3) es:

$$f(x) = C_1 \text{sen } kx + C_2 \text{cos } kx$$

siendo C_1 y C_2 constantes (a determinar en función de las condiciones de contorno).

En resumen, la ecuación de onda puede escribirse:

$$\xi = (C_1 \text{sen } kx + C_2 \text{cos } kx) \text{sen } wt \quad (4)$$

NOTA 90:

En el caso de la cuerda fija en sus extremos, y de longitud L , se tiene:

$$\xi = 0 \text{ para } x = 0 \text{ y } x = L$$

$$\text{- para } x = 0 \quad \xi_{x=0} = C_2 \text{sen } wt = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{- para } x = L \quad \xi_{x=L} = C_1 \text{sen } kL \text{sen } wt = 0$$

Como C_1 no puede ser cero (no habría onda), tendrá que ser:

$$\text{sen } kL = 0, \text{ lo que implica } kL = n\pi \text{ o también } \lambda = \frac{2L}{n}.$$

(Igual resultado que el que se obtuvo en el punto 6.2.)

12.- PROPAGACIÓN DE ONDAS Y MOVIMIENTOS RELATIVOS.- EFECTO DOPPLER. ONDAS DE MACH.-

Es fácil comprobar que si un observador se encuentra quieto en una carretera por donde circula un automóvil tocando la bocina (foco emisor de un tren de ondas sonoras), percibirá un cambio del tono del sonido que escucha (de su frecuencia), que será más agudo a medida que se acerque a él, y más grave a medida que se vaya alejando.

Igualmente ocurriría si fuera el observador el que se moviera rápidamente en el interior de un automóvil, y este pasara frente a una sirena inmóvil. El percibiría un tono cada vez más agudo (mayor frecuencia) a medida que se acerca a la sirena, y luego lo iría percibiendo más grave (menor frecuencia) a medida que se va alejando de ella.

Este cambio de la frecuencia de un sonido, cuando el foco emisor y el observador están en movimiento relativo, fue descubierto (para las ondas sonoras, pero es aplicable a cualquier tipo de ondas) por el físico *Christian Doppler (1840)* y de ahí el nombre de este fenómeno.

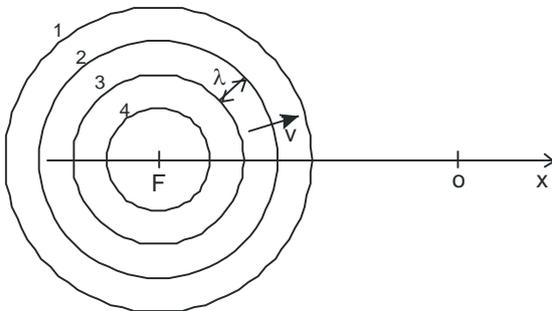


Fig. 198

En la fig. 198 se representa un foco emisor de ondas, de longitud λ , y un observador fijo en la posición O .

Los círculos representan las máximas amplitudes de dos ondas consecutivas. La distancia entre dos círculos es λ .

La línea entre el foco emisor F y el observador O se hace coincidir con el eje x .

Si el período de la onda es T , y el foco empezó a emitir en $t = t_0$, la figura corresponde al tiempo $t = t_0 + 4T$. En este instante t , la primera onda emitida (**1**) ha recorrido la distancia 4λ , la segunda onda (**2**), 2λ , y así sucesivamente.

Sin embargo, si se supone que la fuente se está moviendo, con velocidad v_F , la situación será la mostrada en la figura 83.

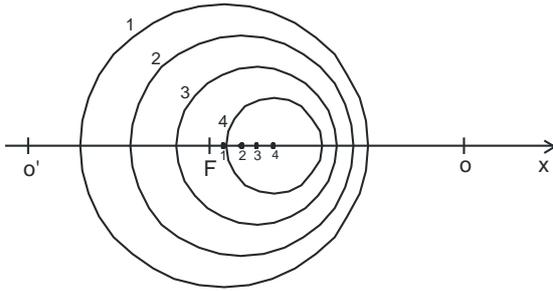


Fig. 199

La onda representada con **(1)** en la figura se emitió en $t = t_0$ y con el foco emisor en la posición **(1)**.

La onda representada por **(2)** se emitió en el instante $t = t_0 + T$, y el foco emisor se encontraba en la posición **(2)**.

En resumen, las ondas no son ahora concéntricas, encontrándose más juntas por el lado que avanza la fuente y más separadas por el lado contrario.

Un observador en reposo en la posición **O** percibiría el tren de ondas con una menor amplitud (o lo que es igual, una mayor frecuencia), mientras que si se encuentra en la posición **O'**, percibirá una mayor longitud de onda (o una frecuencia más baja).

Si se supone que el observador también está en movimiento con la velocidad v_0 , la situación se complica algo más.

(Por ejemplo, si el observador de la figura 199 situado en la posición **O**, se mueve hacia la izquierda, percibirá una onda de menor longitud que si se hubiera mantenido en reposo (mayor frecuencia), y lo contrario ocurriría si se alejara de la fuente.

En definitiva, la frecuencia ν_0 registrada por el observador y la frecuencia ν_F emitida por la fuente, no son iguales. Dependen de v_F y de v_0 .

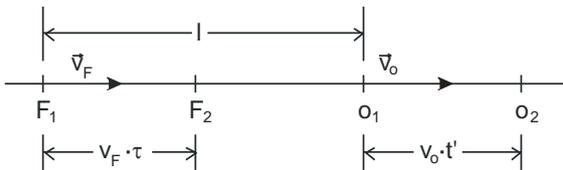


Fig. 200

Supóngase que en el instante $t = 0$, la fuente se encuentra en F_1 , y se está moviendo con la velocidad v_F , y el observador se encuentra en O_1 , y se mueve con la velocidad v_0 .

La distancia, en $t = 0$, entre la fuente y el observador es l . (fig. 200)

La onda que emitió la fuente en $t = 0$ llega al observador t segundos después. Durante esos t segundos, el observador se habrá movido la distancia $\mathbf{v}_0 \cdot t$, y la distancia total recorrida por la onda desde que partió de F_1 será $l + \mathbf{v}_0 \cdot t$. Por otra parte, si \mathbf{v} es la velocidad de propagación de la onda, esa misma distancia será $\mathbf{v} \cdot t$.

En consecuencia:

$$\mathbf{v} \cdot t = l + \mathbf{v}_0 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{l}{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}$$

En un tiempo $t = \tau$, contado a partir de $t = 0$, la fuente estará en F_2 , y la onda emitida en ese instante alcanzará al observador en el tiempo t' (medido desde $t = 0$).

En ese tiempo t' , el observador habrá recorrido la distancia $\mathbf{v}_0 \cdot t'$, y la distancia total recorrida por la onda desde que fue emitida en F_2 será $(l - \mathbf{v}_F \cdot \tau) + \mathbf{v}_0 \cdot t'$.

El tiempo real durante el cual viajó la onda es $(t' - \tau)$ y la distancia recorrida por la onda a su velocidad de propagación \mathbf{v} , será $\mathbf{v}(t' - \tau)$.

Por tanto:

$$\mathbf{v}(t' - \tau) = (l - \mathbf{v}_F \cdot \tau) + \mathbf{v}_0 \cdot t' \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{l + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_F) \cdot \tau}{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}$$

En resumen, el intervalo de tiempo registrado por el observador entre las ondas emitidas por el foco emisor en F_1 y F_2 es:

$$\tau' = t' - t = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_F}{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0} \tau \quad (1)$$

Si ν_F es la frecuencia de la fuente, el número de ondas emitidas en el tiempo τ es:

$$\nu_F \cdot \tau$$

Esas ondas las percibe el observador en el tiempo τ' , con lo que la frecuencia que él percibe será:

$$\nu_0 = \frac{\nu_F \cdot \tau}{\tau'}$$

Sustituyendo en la ecuación (1), queda:

$$\nu_0 = \nu_F \cdot \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{\mathbf{v} - \mathbf{v}_F} \quad (2)$$

Expresión que relaciona la frecuencia percibida por el observador (ν_0), con la frecuencia con que emite la fuente (ν_F), en función de las velocidades de propagación de la onda (v), con la que se mueve la fuente (v_F) y con la que se mueve el observador (v_0).

NOTA 91:

Si v_0 y v_F son mucho más pequeñas que v puede hacerse una simplificación.

En efecto,

$$\nu_0 = \frac{1 - \frac{v_0}{v}}{1 - \frac{v_F}{v}} \nu_F = \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) \cdot \left(1 - \frac{v_F}{v}\right)^{-1} \cdot \nu_F$$

Desarrollando $\left(1 - \frac{v_F}{v}\right)^{-1}$ por el binomio de *Newton*, podemos sustituir esta expresión por $\left(1 + \frac{v_F}{v}\right)$, con lo cual queda:

$$\nu_0 = \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) \cdot \left(1 + \frac{v_F}{v}\right) \cdot \nu_F = \left(1 - \frac{v_0}{v} + \frac{v_F}{v} - \frac{v_0 v_F}{v^2}\right) \cdot \nu_F$$

Despreciando los términos de segundo orden, puede ponerse:

$$\nu_0 = \left(1 - \frac{v_0 - v_F}{v}\right) \cdot \nu_F = \left(1 - \frac{v_{0/F}}{v}\right) \cdot \nu_F$$

siendo $v_{0/F}$ la velocidad relativa del observador (*O*) respecto de la fuente (*F*).

Si $v_{0/F}$ es positiva, el observador se aleja de la fuente, y la frecuencia percibida es menor. Si el observador y la fuente se acercan, la frecuencia percibida es mayor.

Cuando la dirección de $\vec{v}_{0/F}$ no coincide con la de \vec{v} , sino que forman un ángulo θ , puede ponerse:

$$\nu_0 = \left(1 - \frac{v_{0/F} \cdot \cos \theta}{v}\right) \cdot \nu_F$$

NOTA 92:

Cuando el observador esta inmóvil y la fuente se mueve con una velocidad v_F mayor que la de la propagación de la onda v , es decir, $v_F > v$, entonces en un tiempo dado $t = \tau$, la fuente avanza más que la onda.

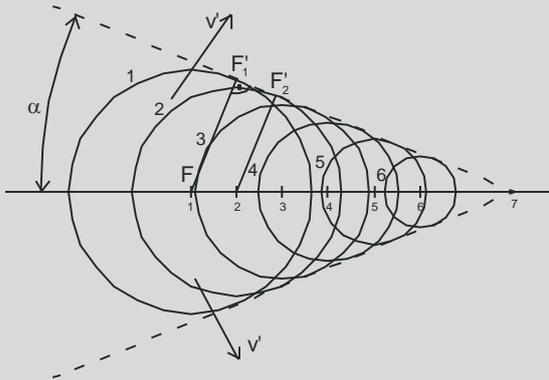


Fig. 201

Si en un tiempo t , la fuente pasa de F_1 a F_7 , la onda emitida en F_1 ha viajado hasta F'_1 ; la emitida en F_2 hasta F'_2 , y así sucesivamente.

La superficie tangente a todas las sucesivas ondas es un cono, cuyo eje es la línea sobre la que se mueve la fuente, y cuya apertura α viene dada por:

$$\text{sen } \alpha = \frac{v}{v_F}$$

El movimiento ondulatorio resultante es una onda cónica que se propaga en la dirección de \vec{v}' ($|\vec{v}| = |\vec{v}'|$). Se llama “onda de choque” u “onda de Mach”. (fig. 201).

(Es el sonido repentino y violento que se oye al paso de un avión que vuela a velocidad supersónica).